

**COMPENDIU  
DE FIZICĂ  
PENTRU  
ADMITERE  
ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL  
SUPERIOR**



*Lucrarea a fost elaborată de:*

Lect. univ. dr. ION BUNGET  
Lect. univ. LUCIAN BURLACU  
Lect. univ. dr. DUMITRU CIOBOTARU  
Asist. univ. ADRIAN COSTESCU  
Lect. univ. VIORICA FLORESCU  
Lect. univ. LUCIAN GEORGESCU  
Asist. univ. MIRCEA RUSU

*Coordonatorul colectivului:*

Lect. univ. Dr. I. BUNGET

*Coperta:*

NICOLAE ȘIRBU

# **COMPENDIU DE FIZICĂ** **pentru admitere** **în învățămîntul superior**

*Prefața:*

**Prof. univ. dr. CRISTIAN CONSTANTINESCU**

Facultatea de Fizică  
Universitatea din București



*Editura Științifică*

BUCUREȘTI, 1972



## Prefață

*Experiența ultimelor 3—4 decenii arată că descoperirile în domeniul fizicii au o importanță excepțională pentru umanitate, nu numai pentru producția de bunuri materiale, ci și pe un plan mai general, social și chiar politic.*

*Pentru ilustrare este suficient să amintim numai câteva realizări ale fizicii, care contribuie direct la progresul societății: reactorul nuclear și reacțiile termonucleare dirijate, cu implicații extraordinare pentru energia viitorului; tranzistorul și numeroase alte dispozitive semiconductoare care au revoluționat electronica; laserul, cu importante aplicații în tehnologie, telecomunicații, medicină etc.*

*Pătrunderea fizicii în cele mai diferite ramuri ale economiei, științei, tehnicii militare etc., determină o creștere din ce în ce mai accentuată a cererilor de fizicieni cu înaltă calificare în institute de cercetări de diferite specialități, laboratoare uzinale, metrologie, laboratoare de analiză sau direct în producție.*

*Creșterea nivelului de pregătire în fizică este însă o problemă de mare actualitate nu numai pentru fizicieni ci și pentru o categorie mult mai largă de specialiști, având în vedere că fizica este de mare utilitate pentru numeroase specialități tehnice (electronica, electrotehnica, energia, metalurgia, termotehnica etc.), având de asemenea implicații directe sau prin domenii de graniță cu multe alte discipline ca chimia, biologia, medicina, geologia și altele.*

*Din cele de mai sus rezultă că, practic, întreg învățământul tehnic, universitar (de științele naturii), învățământul medical, militar etc. beneficiază în cea mai mare măsură de fizică și se poate prevedea că în viitor aportul fizicii va crește și mai mult.*

*Pe de altă parte, în dezvoltarea actuală și de perspectivă a învățământului tehnic în țara noastră, pregătirea de fizică joacă de asemenea un rol important. Este suficient să amintim școlile tehnice de electronică și mai ales cele în domeniul tehnicii nucleare pentru care fizica reprezintă una din disciplinele fundamentale.*

*În sfârșit, trebuie subliniat faptul că fizica nu oferă numai un anumit bagaj de cunoștințe de specialitate, ci însușirea ei contribuie și la formarea unei concepții materialiste asupra fenomenelor naturii și interpretării lor.*

*Îmbunătățirea pregătirii de fizică la toate nivelele învățământului, contribuie în mod hotărâtor la formarea unor specialiști de înaltă calificare și, prin aceasta, la accelerarea progresului tehnico-științific în țara noastră, la dezvoltarea economiei naționale.*

*Lucrarea de față constituie o încercare reușită de a prezenta în mod unitar bazele fizicii, la un nivel corespunzător pregătirii generale a elevilor de la secția reală a liceelor, ținând seama, în linii generale, de programele analitice respective. Nivelul este însă superior manualelor de fizică de liceu (prin manualele actuale, după părere-*

rea subsemnatului, se subapreciază posibilitățile de asimilare ale elevilor) în primul rînd prin folosirea judicioasă a matematicii (elemente de calcul diferențial și integral).

Colectivul de autori este format din fizicieni de la Facultatea de Fizică a Universității din București, care se bucură de prestigiu în activitatea lor didactică și științifică.

Necesitatea unei asemenea cărți a fost menționată în repetate rînduri atît de cadre didactice cît și de elevi, fiind impusă de mai multe motive printre care cităm:

— fizica este predată în liceu de-a lungul a 5 ani, unele capitole fiind fragmentate pe diferenți ani, ceea ce face ca ansamblul cunoștințelor de fizică să nu formeze un sistem încheiat. Lipsa acestui sistem este generată și de faptul că nu există o corelare între manualele pentru diferite clase, deoarece și colectivele de autori sînt de regulă diferite;

— în clasele a XI-a și a XII-a elevii se întîlnesc cu elemente de matematică superioară (calcul diferențial și integral, geometrie analitică) care nu sînt folosite în tratarea exactă a unor probleme de fizică și în definiția riguroasă a unor mărimi fizice.

Autorii lucrării de față au încercat să vină în ajutorul candidaților de la admitere în învățămîntul superior prin realizarea unei sinteze a programei de fizică predată în liceu făcînd însă uz de unele elemente de matematică superioară. În decursul expunerii sînt prezentate unitățile de măsură din sistemul internațional, dar, lucru pozitiv, sînt prezentate și unele unități tolerate, încă folosite curent în practică, ca de exemplu: cal-putere, calorie, gauss, electron-volt. Autorii au avut în vedere, în mod justificat, faptul că sistemul S I nu este încă suficient de înrădăcinat în toate domeniile fizicii: distanțele dintre atomi și alte particule sau dimensiunile lor liniare sînt încă evaluate în Å; caloria este încă des folosită ca unitate pentru cantitatea de căldură, iar ohm·cm pentru rezistivitatea electrică.

Structura cărții este cea clasică (mecanică, fizică moleculară și căldură, electricitate și magnetism, optică și fizică atomică), dar conține și o parte separată, „Elemente de fizica solidului”, parte care prezintă unele fenomene a căror descriere este dispersată în manuale la alte capitole (benzi de energie, semiconductori, tranzistori, efect termoelectronic, supraconductibilitate, difracția radiațiilor X, laserul). Aici aceste probleme se tratează în mod unitar și la un nivel superior celui din manuale. Trebuie apreciată pozitiv introducerea acestui capitol avînd în vedere că în prezent fizica solidului reprezintă o ramură distinctă a fizicii, de mare actualitate științifică și aplicativă.

Pentru ca lucrarea să nu reprezinte o simplă reformulare sau reorganizare a materiei de liceu, Editura a încurajat pe autori să includă și unele elemente noi față de programa de liceu și de admitere, avîndu-se în vedere că această carte nu trebuie să reprezinte un simplu manual, ci să satisfacă parțial setea de cunoaștere a unor elevi mai pasionați pentru fizică, să vină și în ajutorul profesorului de liceu, să arate în ultimă instanță că ansamblul de cunoștințe însușit pînă la acest stadiu nu este închis, că el face parte dintr-un sistem mai larg, cu implicații științifice și practice deosebit de importante.

Vom sublinia în continuare cîteva din „noutățile” incluse de autori în lucrare, care reprezintă aproximativ un sfert din volumul materialului:

— În partea de Mecanică menționăm tratarea detaliată a oscilațiilor amortizate și suprapunerea undelor în diferite cazuri, precum și dinamica punctului de masă variabilă, cu aplicații la rachete.

— La Căldură și fizică moleculară se remarcă aprofundarea teoriei cinetice a gazelor, precum și introducerea a două capitole consacrate fenomenelor de transport, și unor elemente de fizică statistică.

— În partea a treia (Electricitate, magnetism și elemente de electronică) sînt prezentate unele fenomene legate de electricitatea atmosferică, deducerea legii lui Ohm în modelul electronilor liberi, elemente de geomagnetism, forme de magnetism.

— În partea a patra (Optică și spectroscopie) reține atenția tratarea detaliată a opticii geometrice pornind de la noțiunea de dioptru, dezvoltarea spectroscopiei și aplicațiile ei.

— În partea a cincea (Fizică atomică și nucleară și elemente de mecanică cuantică) se remarcă expunerea riguroasă a modelului vectorial al atomului, o prezentare mai largă a fizicii nucleului și particulelor elementare și în sfîrșit, ca un capitol de sine stătător, o introducere în mecanica cuantică, disciplină care stă la baza întregii fizici moderne.

Consider că autorii merită felicitări pentru curajul cu care au abordat această problemă, pentru nivelul și modul de prezentare judicioase și accesibile pentru elevi.

Pentru aprofundarea cunoștințelor cartea conține un număr de aproximativ 90 probleme, cu soluții și indicații, unele dintre ele avînd un grad sporit de dificultate.

Trebuie menționat faptul că această carte nu este un manual obligatoriu pentru examenul de admitere, ci constituie numai un ghid pentru candidații la acest examen, o încercare de a spori interesul pentru fizică, știință fundamentală, cu largi implicații în numeroase domenii de activitate, care au fost arătate mai sus.

Consider că lucrarea și-a atins scopul propus, autorii reușind să rezolve cu deosebit succes o serie de probleme dificile, legate de conținut, nivel și metodică.

Această lucrare de incontestabilă valoare se înscrie în mod evident și cu prioritate, pe linia modernizării învățămîntului și ea ar putea constitui o bază pentru elaborarea viitoarelor manuale de fizică.

Avînd în vedere sfera largă de probleme pe care le abordează și nivelul la care sînt prezentate, cred că, în afara elevilor liceelor, lucrarea va servi unor categorii mult mai largi de cititori.

Felicităm călduros Editura Științifică pentru includerea în planul său a publicării unei lucrări atît de necesare și solicitate.

Prof. univ. dr. CR. CONSTANTINESCU  
Facultatea de Fizică a Universității din București



# Tabla de materii

## I MECANICĂ ȘI ACUSTICĂ (de L. Burlacu și A. Costescu)

1. Introducere .....	21
1.1. Mișcare și repaus .....	21
1.2. Elementele mișcării .....	23
② Cinematica .....	24
2.1. Obiectul de studiu .....	24
2.2. Viteza .....	25
2.3. Accelerația .....	28
2.4. Ecuațiile mișcării .....	31
2.5. Mișcarea rectilinie.....	32
2.6. Mișcarea circulară.....	40
2.7. Mișcarea oscilatorie armonică .....	46
2.8. Compunerea mișcărilor oscilatorii .....	51
③ Dinamica .....	59
3.1. Primul principiu al mecanicii: principiul inerției .....	59
3.2. Principiul al doilea al mecanicii .....	60
3.3. Principiul relativității mecanice, al lui Galilei.....	64
3.4. Principiul al treilea al mecanicii.....	68
3.5. Legea conservării impulsului .....	69
3.6. Forțe de frecare .....	71
3.7. Momentul forței și momentul cinetic.....	73
3.8. Greutatea corpurilor .....	76
3.9. Forțe în mișcarea circulară uniformă.....	80
3.10. Forțe elastice. Pendulul matematic.....	82
3.11. Atracția universală .....	94
3.12. Sisteme neinertiale. Forțe de inerție.....	100
3.13. Forțe de inerție la suprafața Pământului.....	106
3.14. Dinamica punctului de masă variabilă .....	114

<b>4) Lucrul mecanic și energia</b> .....	121
4.1. Lucrul mecanic .....	121
4.2. Puterea .....	127
4.3. Energia cinetică .....	127
4.4. Energia potențială .....	129
4.5. Legea conservării energiei mecanice .....	132
4.6. Aplicații ale legii conservării energiei .....	133
4.7. Ciocniri elastice și inelastice .....	137
<b>5) Mișcarea corpului rigid</b> .....	140
5.1. Cinematica corpului rigid .....	140
5.2. Centrul de masă .....	142
5.3. Momentul cinetic și momentul de inerție. Legea conservării momentului cinetic .....	144
5.4. Legea a doua a dinamicii pentru mișcarea de rotație .....	148
5.5. Energia cinetică de rotație .....	149
5.6. Efectul giroscopic .....	150
<b>6) Statica</b> .. ..	154
6.1. Echilibrul forțelor .....	154
6.2. Sisteme de forțe concurente. Compunerea forțelor. Momentul forței .....	155
6.3. Sisteme de forțe paralele. Cuplu de forțe .....	159
6.4. Centrul de greutate .....	162
6.5. Echilibrul corpurilor sub acțiunea gravitației .....	164
<b>7) Elemente de elasticitate și rezistența materialelor</b> .....	168
7.1. Introducere .....	168
7.2. Tipuri de deformății. Forțe interioare. Efort .....	169
7.3. Legea lui Hooke .....	172
7.4. Curba caracteristică .....	174
7.5. Rezistența admisibilă. Coeficientul de siguranță .....	177
<b>8) Mașini simple</b> .....	179
8.1. Introducere .....	179
8.2. Pârghii .....	179
8.3. Balanțe .....	182
8.4. Trolul .....	185
8.5. Scripeti .....	187
8.6. Planul înclinat .....	192
8.7. Pana .....	193
8.8. Șurubul .....	195
8.9. Randamentul mașinilor simple .....	197



<b>9. Hidro- și aerostatica</b>	199
9.1. Proprietățile generale ale fluidelor	199
9.2. Presiunea	200
9.3. Presiunea hidrostatică	201
9.4. Legea lui Arhimede	203
9.5. Plutirea corpurilor	205
9.6. Presiunea atmosferică	207
9.7. Legea lui Arhimede pentru gaze	210
9.8. Barometre	211
<b>10. Hidro- și aerodinamica</b>	212
10.1. Fluide perfecte	212
10.2. Curgerea staționară a fluidului perfect	212
10.3. Curgerea fluidului real	219
10.4. Mișcarea corpurilor prin fluide	221
10.5. Energia hidraulică	225
<b>11) Unde elastice</b>	227
11.1. Mișcarea ondulatorie. Propagarea undelor în medii elastice	227
11.2. Ecuația unei unde plane	230
11.3. Principiul lui Huygens	231
11.4. Reflexia și refracția undelor elastice	233
11.5. Interferența undelor	236
11.6. Unde staționare	237
11.7. Energia undelor	240
11.8. Efectul Doppler-Fizeau	242
<b>12. Acustica</b>	245
12.1. Producerea și propagarea sunetelor	245
12.2. Calitățile sunetului	247
12.3. Perceperea sunetelor	249
12.4. Reflexia sunetelor	252
12.5. Interferența sunetelor	253
12.6. Surse sonore	254
12.7. Ultrasunetele	258
<b>13) Elemente de mecanică relativistă</b>	263
13.1. Spațiul și timpul în mecanica newtoniană	263
13.2. Experiența Michelson-Morley	265
13.3. Principiile teoriei relativității restrânse	268
13.4. Transformările Lorentz	269
13.5. Consecințele fizice ale transformărilor Lorentz	272
13.6. Dinamica relativistă	277
13.7. Relația dintre masă și energie	279
<b>Probleme</b>	281

## II. CĂLDURĂ ȘI FIZICĂ MOLECULARĂ

(de V. Florescu și L. Georgescu) .....	289
<b>1. Bazele experimentale ale teoriei cinetico-moleculare .....</b>	<b>291</b>
1.1. Introducere .....	291
1.2. Legile combinării chimice — dovezi ale existenței atomilor și moleculelor. Ipoteza lui Avogadro .....	291
1.3. Mase moleculare relative. Unitatea atomică de masă. Molecula-gram. Numărul lui Avogadro .....	292
1.4. Difuzia și mișcarea browniană—dovezi ale mișcării moleculare .....	294
1.5. Forțe intermoleculare .....	295
1.6. Teoria cinetico-moleculară și unele proprietăți ale substanței..	298
<b>2. Temperatură. Cantitate de căldură .....</b>	<b>300</b>
2.1. Echilibrul termic. Temperatura empirică.....	300
2.2. Termometrul cu gaz la volum constant.....	303
2.3. Scara absolută a temperaturii termodinamice.....	304
2.4. Temperatura de zero absolut .....	304
2.5. Interpretarea cinetico-moleculară a temperaturii.....	305
2.6. Lucru mecanic și cantitate de căldură.....	306
2.7. Măsurarea cantității de căldură. Căldura specifică.....	308
2.8. Principiul echivalenței dintre lucru mecanic și căldură.....	310
2.9. Determinarea echivalentului mecanic al căldurii.....	312
2.10. Calorimetrie .....	314
<b>3. Proprietățile termice ale gazelor .....</b>	<b>318</b>
3.1. Presiunea gazelor și măsurarea ei. Tehnica vidului.....	318
3.2. Legile empirice ale gazelor.....	322
3.3. Termometrul normal cu hidrogen.....	326
3.4. Legea gazelor perfecte .....	328
3.5. Gazul perfect din punct de vedere cinetico-molecular. For- mula presiunii .....	333
3.6. Energia internă a unui gaz perfect, monoatomic.....	338
3.7. Transformări cuasistatice ale gazelor. Lucrul mecanic efectuat într-o transformare cuasistatică a unui gaz.....	339
3.8. Coeficienții termici ai gazelor.....	341
3.9. Gaze reale. Ecuația Van der Waals.....	344
<b>4. Principiile termodinamicii .....</b>	<b>345</b>
4.1. Introducere .....	345
4.2. Energia internă. Principiul întâi al termodinamicii.....	345
4.3. Aplicarea principiului întâi la gazul perfect.....	348
4.4. Transformări reversibile și transformări ireversibile.....	354
4.5. Perpetuum mobile de speța a doua. Postulatul lui Kelvin ....	355
4.6. Mașina bitermă. Teorema Carnot .....	356
4.7. Ciclul Carnot cu fluid .....	359
4.8. Temperatura termodinamică .....	360

4.9. Legătura dintre temperatura în scara gazului perfect și temperatura termodinamică .....	362
4.10. Scara internațională de temperaturi.....	363
4.11. Imposibilitatea atingerii lui 0°K.....	365
4.12. Motoare termice .....	365
<b>5. Proprietăți termice ale lichidelor și solidelor. Fenomene de suprafață în lichide .....</b>	<b>369</b>
5.1. Caracterizare generală a stărilor solidă și lichidă.....	369
5.2. Dilatarea corpurilor solide .....	370
5.3. Dilatarea lichidelor .....	374
5.4. Alte proprietăți termice ale lichidelor și solidelor.....	376
5.5. Presiunea moleculară .....	378
5.6. Tensiunea superficială .....	379
5.7. Presiunea sub o suprafață curbă de lichid.....	382
5.8. Fenomene la contactul lichid-solid. Adeziune și capilaritate	384
5.9. Aplicație: o metodă de determinare a tensiunii superficiale	386
<b>6. Schimbarea stării de agregare .....</b>	<b>388</b>
6.1. Topirea și solidificarea .....	388
6.2. Vaporizarea și condensarea .....	392
6.3. Punctul triplu .....	395
6.4. Noțiuni de higrometrie .....	395
6.5. Lichefierea gazelor .....	397
<b>7. Teoria cinetică a gazelor .....</b>	<b>402</b>
7.1. Echilibru termodinamic și echilibru statistic.....	402
7.2. Distribuția moleculelor după poziții.....	403
7.3. Distribuția Maxwell după viteze .....	404
7.4. Legea echipartiției energiei. Problema căldurilor specifice....	407
7.5. Drum liber mediu. Fascicule moleculare.....	408
7.6. Fenomene de transport .....	411
<b>Probleme .....</b>	<b>414</b>
<b>III) ELECTRICITATE, MAGNETISM ȘI ELEMENTE DE ELECTRONICĂ (de I. Bunget)</b>	<b>419</b>
<b>(1) Electrostatica .....</b>	<b>421</b>
1.1. Noțiunea de sarcină electrică.....	421
1.2. Interacțiuni între sarcinile electrice.....	424
1.3. Câmpul electric .....	428

1.4. Potențialul câmpului electrostatic .....	433
1.5. Mecanisme de electrizare. Mărimi caracteristice.....	442
1.6. Capacitatea. Condensatorii .....	450
1.7. Electricitatea atmosferică .....	458
1.8. Feroelectricitatea și piezoelectricitatea .....	464
<b>2. Curentul electric staționar .....</b>	<b>468</b>
2.1. Natura curentului electric .....	468
2.2. Mărimi și noțiuni fundamentale .....	472
2.3. Circuite electrice .....	479
2.4. Procedee practice în tehnica măsurătorilor electrice.....	485
2.5. Efectele curentului electric .....	489
<b>3. Câmpul magnetic staționar .....</b>	<b>496</b>
3.1. Descrierea generală a câmpului magnetic.....	496
3.2. Fluxul magnetic .....	503
3.3. Circuitul magnetic. Electromagnetii. Aplicații .....	506
3.4. Forme de magnetism .....	510
<b>4. Electromagnetism .....</b>	<b>519</b>
4.1. Forța Lorentz .....	519
4.2. Forța electrodinamică .....	519
4.3. Inducția electromagnetică .....	522
4.4. Curenți variabili (curentul alternativ și curentul pulsant)....	532
4.5. Circuite electrice în curent alternativ.....	638
4.6. Generatoare și motoare de curent electric alternativ și continuu .....	542
<b>5. Oscilații și unde electromagnetice .....</b>	<b>556</b>
5.1. Încărcarea și descărcarea condensatorului printr-o rezistență .....	556
5.2. Oscilații electrice .....	559
<b>6. Elemente de electronică .....</b>	<b>563</b>
6.1. Emisia termoelectronică .....	563
6.2. Tuburi electronice și aplicații.....	565
6.3. Emisia și recepția undelor radio.....	575
6.4. Oscilograful catodic și unele aplicații.....	580
6.5. Principiul radiolocației .....	582
<b>Probleme .....</b>	<b>584</b>
<b>IV. OPTICĂ ȘI SPECTROSCOPIE (de D. Ciobotaru) .....</b>	<b>591</b>
1. Introducere .....	593
2. Optică geometrică .....	594
2.1. Legile fundamentale ale opticii geometrice.....	594
2.2. Reflexia totală .....	599
2.3. Stigmatism riguros și aproximativ. Aproximația lui Gauss..	600

2.4. Oglinda plană .....	603
2.5. Oglinzi sferice .....	605
2.6. Lama cu fețe plan paralele. Refracții succesive.....	612
2.7. Prisma optică .....	614
2.8. Lentile .....	617
2.9. Noțiuni despre aberații .....	629
2.10. Aparate optice .....	635
2.11. Noțiuni de fotometrie .....	651
<b>3. Optică ondulatorie .....</b>	<b>660</b>
3.1. Natura luminii .....	660
3.2. Interferența luminii .....	663
3.3. Difracția luminii .....	673
3.4. Polarizarea luminii. Transversalitatea vectorului luminos....	678
<b>4. Optică fonică și spectroscopie .....</b>	<b>684</b>
4.1. Efectul fotoelectric .....	684
4.2. Noțiuni de spectroscopie .....	690
<b>Probleme .....</b>	<b>693</b>
<b>V FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ.</b>	
<b>ELEMENTE DE MECANICĂ CUANTICĂ (de M. Rusu) .....</b>	<b>699</b>
<b>1. Structura discretă a materiei .....</b>	<b>700</b>
1.1. Introducere .....	700
1.2. Electronul .....	700
1.3. Fotonul .....	706
<b>2. Modele atomice .....</b>	<b>708</b>
2.1. Modelul Thomson .....	708
2.2. Modelul planetar .....	708
2.3. Postulatele lui Bohr .....	710
2.4. Atomul de hidrogen .....	711
2.5. Excitarea și ionizarea atomului .....	713
2.6. Radiația emisă de atomul de hidrogen .....	717
2.7. Modelul Bohr-Sommerfeld .....	719
<b>3. Elemente de mecanică cuantică .....</b>	<b>726</b>
3.1. Unde și particule .....	726
3.2. Unda asociată. Experiența Davisson și Germer.....	727
3.3. Ecuația Schrödinger .....	730
3.4. Noua imagine asupra microcosmosului.....	733
3.5. Rezolvarea ecuației Schrödinger .....	735

<b>4. Atomul de hidrogen în mecanica cuantică</b>	<b>740</b>
4.1. Orbitali atomici	740
4.2. Momentul cinetic și momentul magnetic al atomului	744
4.3. Spinul electronului	748
4.4. Momentul cinetic total al atomului	750
<b>5. Atomul cu mai mulți electroni</b>	<b>752</b>
5.1. Modelul păturilor electronice	752
5.2. Radiația emisă de atomii multielectronici	756
5.3. Bazele fizice ale sistemului periodic al elementelor	758
<b>6. Fizica nucleului</b>	<b>762</b>
6.1. Structura nucleului	762
6.2. Caracteristicile fundamentale ale nucleelor	763
6.3. Forțele nucleare	768
6.4. Modele nucleare	769
6.5. Radioactivitatea	773
6.6. Reacții nucleare	780
6.7. Metode experimentale în fizica nucleară	790
6.8. Particule elementare	803
<b>Probleme</b>	<b>806</b>
<b>VI ELEMENTE DE FIZICA SOLIDULUI (de I. Bunget)</b>	<b>809</b>
<b>1. Introducere</b>	<b>811</b>
<b>2. Structura cristalină</b>	<b>813</b>
2.1. Solide cristaline și solide necristaline	813
2.2. Defecte structurale	815
2.3. Legătura chimică și structura cristalină	816
2.4. Difracția radiației X	818
2.5. Oscilațiile particulelor din nodurile rețelei cristaline	820
<b>3. Nivele de energie ale electronilor în solide</b>	<b>823</b>
3.1. Legătura chimică și stările de energie ale electronilor	823
3.2. Zonele de energie: metal, semiconductor, izolator	824
3.3. Modelul electronilor liberi	826
3.4. Supraconductibilitatea	829
3.5. Efectul termoelectric la contactul metal-metal	830
<b>4. Semiconductori</b>	<b>833</b>
4.1. Semiconductori intrinseci și semiconductori impurificați	833
4.2. Efectul fotoelectric în semiconductori	835
4.3. Efectul de redresare la contactul metal-semiconductor	837
4.4. Joncțiuni $p-n$ și aplicații	838
4.5. Tranzistorul	842



<b>5. Emisia stimulată a luminii (LASER) (de D. Ciobotaru) .....</b>	<b>845</b>
5.1. Inversiunea populațiilor .....	845
5.2. Emisia spontană și emisia indusă.....	846
5.3. Principiul de funcționare a laserului.....	847
5.4. Nivelele energetice ale ionilor paramagnetici în dielectrics	849
5.5. Laserul cu rubin .....	850
5.6. Laserul cu gaz .....	853
5.7. Laserul cu semiconductori .....	855
5.8. Proprietățile radiației laser .....	857
5.9. Aplicații ale emisiei stimulate.....	858
 <b>Probleme .....</b>	 <b>859</b>
 <b>ANEXĂ MATEMATICĂ .....</b>	 <b>861</b>



I

# Mecanică și acustică



# 1. Introducere

## 1.1. MIȘCARE ȘI REPAUS

În prima parte a cărții noastre vom studia cea mai simplă formă de mișcare a materiei, care constă în deplasarea corpurilor (sau ale unor părți ale acestora) în raport cu altele. Acest tip de mișcare poartă numele de *mișcare mecanică*. Din viața de toate zilele sîntem cu toții familiarizați cu astfel de mișcări: mișcarea unui automobil sau a unui avion, mișcarea unei pietre aruncată de o prastie și multe altele. Cititorul, chiar dacă de-abia pășește în primul an de liceu, știe deja că toate fenomenele din natură nu înseamnă altceva decît diferite forme de mișcare, însă puține dintre ele sînt pur mecanice, adică reducibile la simpla deplasare a unor corpuri sau particule. Dacă deplasarea este cea mai simplă formă de mișcare pe care o întîlnim în natură, totodată ea este și extraordinar de importantă datorită faptului că însoțește toate celelalte fenomene fie ele fizice, chimice, sau chiar biologice.

Să începem acum studiul mișcărilor mecanice. Pentru început trebuie să precizăm un lucru extrem de important: cum stabilim dacă un obiect se mișcă sau este în repaus? La prima vedere problema ar părea simplă: într-adevăr, știm din experiență că se poate stabili cu ușurință, chiar din vedere, dacă un automobil se deplasează sau nu față de o clădire, un copac etc. Pentru aceasta e suficient să observăm dacă distanța dintre clădire și automobil se schimbă mereu sau nu. Întrebarea ridicată ar avea deci un răspuns simplu: ne fixăm un reper, numit sistem de referință (de exemplu, o clădire). Dacă obiectul își schimbă poziția față de acest reper el se găsește în stare de mișcare, iar dacă nu și-o schimbă, se află în stare de repaus. În acest fel am definit starea de mișcare și starea de repaus în raport cu sistemul de referință ales. Pentru a vedea ce consecințe are introducerea sistemului de referință, să mai analizăm un exemplu. Să ne imaginăm un mare magazin în care se găsește o scară rulantă. Un cetățean care vrea să coboare de la un etaj va păși o treaptă a benzii coboritoare, aflîndu-se astfel în repaus în raport cu treapta, dar în mișcare față de pereții magazinului. În schimb, dacă cineva va alerga suficient de iute în sens invers pe scara coboritoare, va constata, la un moment dat, că deși sare din treaptă în treaptă, deci e în mișcare față de scara mobilă, de fapt nu se mișcă de loc față de pereții magazinului. Aceasta înseamnă că de fapt *starea de mișcare sau de repaus este relativă*, deoarece același corp este în mișcare sau în repaus, după cum ne raportăm la un sistem de referință sau la altul.

Apare acum firească întrebarea dacă putem stabili în mod absolut că un corp este în mișcare sau repaus, dacă există deci în univers un corp absolut nemișcat în raport cu care să putem împărți lumea în corpuri absolut mobile sau absolut

imobile. În vechime se credea că un astfel de corp este Pământul, apoi s-a stabilit că acesta, ca și celelalte planete, se rotește în jurul Soarelui. Astronomii au dovedit însă că și Soarele se mișcă față de stelele considerate fixe, dar că de fapt și acestea se mișcă unele față de altele cu viteze colosal de mari. Astfel, sistemul solar se deplasează spre constelația Hercules cu cca. 30 km/s iar toată galaxia noastră (Calea Lactee) are o mișcare de ansamblu de rotație. Astăzi este bine stabilit că nu există nicăieri în univers un corp absolut imobil, astfel că nu putem găsi un sistem de referință față de care unele corpuri sînt absolut în mișcare sau absolut nemișcate.

Concluzia discuției anterioare este deci următoarea: starea de mișcare sau de repaus este relativă deoarece un același corp poate fi în mișcare față de un sistem de referință dar în repaus față de un altul. În practică este însă întotdeauna suficient să stabilim starea de mișcare sau repaus în raport cu un sistem de referință particular, ales în mod convenabil.

Mișcările mecanice sînt de mai multe tipuri, prezentînd uneori un caracter destul de complicat. Astfel, într-un fel decurge mișcarea pietrei aruncate, mișcarea unui automobil, dar altfel are loc învîrtirea roților în jurul osiilor însoțită totodată de deplasarea lor în lungul drumului, mișcarea unei sfîrleze ș.a.m.d. Pentru a putea studia mișcările reale le înlocuim cu mișcări mai simple, care pot fi studiate mai ușor (mișcări doar ale unor părți ale corpului, mișcări de translație, mișcări de rotație etc.) și apoi revenim la mișcări mai complicate, cît mai apropiate de cele reale.

Cea mai simplă mișcare pe care o putem concepe este mișcarea unui corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate. Pentru aceasta în mecanică se folosește noțiunea (abstractă) de *punct material care este prin definiție un punct geometric purtător al întregii substanțe a corpului*. În practică, corpuri reale, chiar de dimensiuni apreciabile, pot fi considerate ca puncte materiale în funcție de problema pe care vrem s-o rezolvăm. Astfel, dacă studiem mișcarea unui proiectil, fără să ne intereseze, într-o primă aproximație, influența rezistenței aerului și a rotației proprii în timpul deplasării, este posibil să-l tratăm ca pe un punct material. În mod analog, legile mișcării planetelor în jurul Soarelui pot fi găsite, prin calcul, considerîndu-le puncte materiale. Uneori nu este însă posibil să facem această simplificare. Astfel mișcarea unei sfîrleze nu poate fi redusă în nici un fel la cea a unui punct material.

Mecanica este deci acea parte a fizicii care studiază mișcările mecanice. Ea este divizată în trei capitole principale: cinematica, dinamica și statica.

În cinematică este cuprins studiul diferitelor tipuri de mișcări mecanice fără a lua în considerare cauzele care le produc sau le pot modifica.

Dinamica se referă la studiul efectelor forțelor care sînt cauzele ce întrețin sau modifică mișcările.

În sfîrșit, statica se ocupă cu studiul echilibrului corpurilor și al sistemelor de corpuri sub acțiunea unor forțe care își compensează reciproc efectele.

În partea I a cărții vom prezenta și unele probleme cum ar fi: noțiuni de elasticitate, rezistența materialelor, care, deși înrudite și direct legate de mecanică, ies propriu-zis din sfera ei de investigare.



## 1.2. ELEMENTELE MIȘCĂRII

În continuare ne vom ocupa de descrierea mișcării unui punct material. Pentru a realiza acest lucru este necesar să putem preciza, ori de câte ori dorim, poziția exactă a corpului mobil (pe scurt mobil), atașând corpului, desemnat ca reper sau sistem de referință, un *sistem de coordonate* convenabil ales. De fapt, în capitolul de cinematică vom presupune, în general, că sistemul de coordonate este dat (sistem de coordonate rectangular), iar mai târziu vom vedea cum se alege acest sistem.

Vom defini în continuare elementele fundamentale ale mișcării:

*Traietoria* este locul geometric al pozițiilor succesive pe care le ocupă punctul material în mișcare sau, mai simplu, drumul străbătut de punctul material. Deoarece acesta este un punct geometric, traietoria sa este o linie geometrică. După cum linia este curbă sau dreaptă, mișcarea este *rectilinie* sau *curbilinie*. Se folosește de asemenea și termenul de *spațiu* (notat de obicei cu  $s$ ), care are însă un sens mai restrâns, definind lungimea drumului parcurs pe traietorie.

Dacă am vorbit de lungime trebuie să introducem și modul de măsurare a ei. Unitatea de lungime este *metrul* (cu simbolul  $m$ ). Etalonul metrului, confecționat dintr-un aliaj format din platină și iridiu, este păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți (Sèvres—Paris) și reprezintă aproximativ a 40-a milioana parte din lungimea meridianului terestru. Cea de a XI-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți a abrogat definiția metrului pe baza acestui etalon, definindu-l ca lungimea care cuprinde 1 650 763,73 lungimi de undă ale radiației portocalii a izotopului Kripton 86, în vid. Metrul definit astfel este foarte apropiat de vechiul metru și este la îndemîna tuturor laboratoarelor, ne mai fiind necesară compararea continuă cu etalonul din Franța. În practică se folosesc ca unități derivate multiplii și submultiplii metrului: kilometrul ( $km$ ),  $1 km = 10^3 m$ ; centimetrul ( $cm$ ),  $1 cm = 10^{-2} m$ ; milimetrul ( $mm$ ),  $1 mm = 10^{-3} m$ ; micrometrul ( $\mu m$ ),  $1 \mu m = 10^{-3} mm = 10^{-6} m$ ; ângström (Å),  $1 Å = 10^{-8} cm = 10^{-10} m$ ; nanometrul ( $nm$ ),  $1 nm = 10^{-9} m$  etc.

Un alt element fundamental, necesar pentru caracterizarea mișcării, este timpul. De noțiunea de timp ne dăm seama din experiența personală a fiecăruia și ea este legată de succesiunea sau simultaneitatea evenimentelor. În mecanică ne interesează durata mișcării care este măsurată prin *timpul* scurs (notat cu  $t$ ) între momentul plecării corpului și momentul opririi sale. De asemenea ne poate interesa și timpul necesar pentru ca mobilul să parcurgă drumul dintre două puncte de pe traietoria sa. Unitatea de măsură pentru timp (de fapt ceea ce măsurăm noi sînt durate sau intervale de timp) este secunda (simbol  $s$ ) care este definită ca intervalul de timp egal cu a 86 400-a parte a zilei solare medii. Și în acest caz cea de-a XI-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți a adoptat o definiție mai precisă și anume: secunda este intervalul de timp egal cu  $\frac{1}{31\,556\,925,975}$  din anul tropic la 1 ianuarie 1900.

Prin an tropic se înțelege intervalul de timp dintre două treceri succesive ale Soarelui (în mișcarea sa aparentă pe ecliptică) prin punctul corespunzător echinocțiului de primăvară. În practică se folosesc ca unități derivate: minutul ( $min$ ),  $1 min = 60 s$ ; ora ( $h$ ),  $1 h = 60 min$ ; miliseconda ( $10^{-3}s$ ); microsecunda ( $10^{-6}s$ ); nanosecunda ( $10^{-9}s$ ); picosecunda ( $10^{-12}s$ ).

## 2. Cinematica

### 2.1. OBIECTUL DE STUDIU

Problema generală a cinematicii este următoarea:

Cunoscând în orice moment poziția punctului material față de sistemul de coordonate dat, adică știind modul în care coordonatele punctului depind de timp,

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (2.1)$$

să se determine traiectoria, viteza și accelerația sa. În paragrafele următoare vom defini noțiunile de viteză și accelerație și apoi vom vedea cum se rezolvă problema enunțată. Reamintim aici că a da coordonatele,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ale unui punct  $M$ , în limbaj vectorial, revine la a scrie vectorul  $\vec{r}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , unde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  sînt versorii celor trei axe de coordonate (fig. I.2.1). Cunoașterea poziției punctului la orice moment, față de sistemul de coordonate considerat fix, revine la cunoașterea dependenței de timp a funcției vectoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Vectorul  $\vec{r}$  mai este numit și vector de poziție sau rază vectorie.

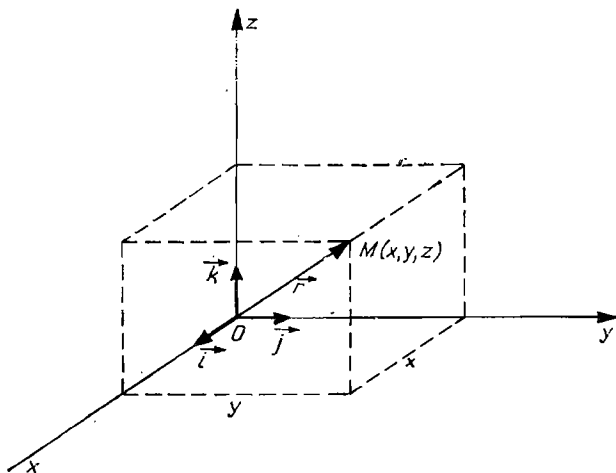


Fig. I.2.1

## 2.2. VITEZA

Vom considera, pentru început, cazul mai simplu al mișcării rectilinii. Poziția corpului în orice moment poate fi determinată prin distanța  $s$ , de la punctul  $N$ , în care se află la momentul respectiv, la un punct  $O$  de pe dreaptă, ales ca origine a mișcării (fig. I.2.2). Aceasta se reduce la a cunoaște pe  $s$  ca funcție de timp

$$s = f(t), \quad (2.2)$$

unde  $f(0) = 0$ , dacă am început să măsurăm timpul din momentul în care corpul trece prin punctul  $O$ .

Distanța de la  $O$  la  $N$  poate fi parcursă de diferite corpuri în mișcare mai iute sau mai încet, adică aceeași distanță poate fi parcursă într-un interval de timp mai lung sau mai scurt. *Viteza* este o mărime fizică care caracterizează tocmai acest aspect al mișcării. Vom spune că mobilul  $A$  are viteza mai mare decât mobilul  $B$  dacă în același interval de timp mobilul  $A$  a parcurs un spațiu mai mare decât mobilul  $B$  sau dacă același spațiu este parcurs de mobilul  $A$  într-un timp mai scurt decât de mobilul  $B$ . Viteza este o mărime egală cu spațiul ( $s$ ) parcurs de mobil într-un interval de timp ( $t$ ) raportat la acel interval de timp,

$$v_m = \frac{s}{t}. \quad (2.3)$$

Dacă vrem să calculăm viteza cu care mobilul a parcurs distanța dintre punctele  $M$  și  $N$  (fig. I.2.2.), formula (2.3) trebuie transcrisă în mod corespunzător. Distanța dintre  $M$  și  $N$  va fi distanța de la punctul  $O$  la punctul  $N$  minus distanța de la  $O$  la  $M$ , adică  $\Delta s = s - s_0$  ( $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$ ). Dacă presupunem că mobilul a trecut prin punctul  $M$  în momentul  $t_0$ , iar prin punctul  $N$  în momentul  $t$ , intervalul de timp în care a parcurs distanța  $\overline{MN}$  va fi  $\Delta t = t - t_0$ . În acest caz formula (2.3) devine

$$v_n = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}. \quad (2.4)$$

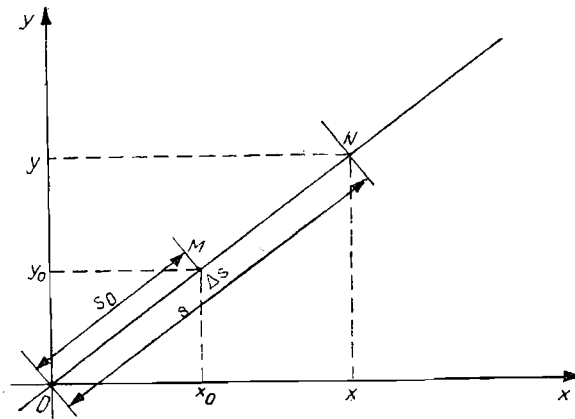


Fig. I.2.2

Să observăm însă că această definiție nu ne determină în mod corect viteza mobilului în fiecare punct al traiectoriei. Într-adevăr știm din experiență că un vehicul nu se mișcă întotdeauna cu aceeași viteză. De exemplu, un automobil va merge mai repede pe o șosea asfaltată liberă, dar mai încet când va trece printr-o localitate ș.a.m.d. Dacă împărțim acum spațiul total parcurs de automobil la intervalul de timp care s-a scurs, nu vom obține viteza cu care s-a mișcat automobilul pe diferite porțiuni din traseul său, ci *viteza medie* cu care a străbătut întreg traseul, adică viteza pe care ar fi trebuit s-o aibă automobilul pentru a parcurge traseul în același timp dacă s-ar fi mișcat tot timpul la fel de iute (cu aceeași viteză).

În general, dacă împărțim distanța dintre două puncte de pe traiectorie la intervalul de timp în care mobilul a parcurs acea distanță, vom obține viteza medie a mobilului între cele două puncte. Evident că această definiție a vitezei ne dă o caracterizare destul de vagă a mișcării, deoarece mărimea vitezei medii va depinde de alegerea celor două puncte. Pentru a cunoaște mai precis mișcarea ar trebui să știm viteza mobilului pe porțiuni ale traiectoriei oricât de mici dorim (altfel spus, viteza mobilului pe distanțe parcurse în intervale de timp oricât de mici dorim). Să considerăm în acest scop spațiul  $\Delta s$  parcurs într-un interval  $\Delta t$  de mobilul care trece în momentul  $t_0$  prin punctul  $M$  (fig. I.2.2.) Raportul  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  ne va da din nou o viteză medie, care însă va fi cu atât mai aproape de viteza cu care mobilul a trecut prin punctul  $M$  cu cât  $\Delta s$  este mai mic. Avem deci

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Dacă facem ca  $\Delta t$  să tindă la zero obținem:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (2.6)$$

care se numește *viteza instantanee* (sau pur și simplu *viteza*) mobilului în momentul  $t_0$  în care trece prin punctul  $M_0$ . Deci viteza pe care o are un mobil în momentul  $t_0$  este egală numeric cu derivata spațiului în raport cu timpul, calculată în momentul  $t = t_0$ . În formulele (2.3 — 2.5) am notat viteza cu  $v_m$  pentru a indica faptul că aceste formule definesc viteza medie a mobilului spre deosebire de (2.6) care definește viteza instantanee.

Pentru a descrie corect mișcarea unui mobil, care în general poate avea loc în lungul unei traiectorii curbilinii (mișcarea curbilinie), este necesar să dăm nu numai valoarea vitezei ci și orientarea sa. Aceasta înseamnă că trebuie să găsim *vectorul viteze*.

Cu ajutorul lui putem reformula chestiunile discutate mai înainte. În cazul mișcării rectilinii, viteza va fi un vector orientat în lungul dreptei pe care se deplasează mobilul și îndreptat în sensul mișcării. Vectorul  $\vec{r}(t)$  care ne dă poziția mobilului la orice moment este un vector de direcție fixă, a cărui lungime este  $s$ ,  $|\vec{r}| = s$  (fig. I.2.2). Relația (2.6) va fi scrisă sub formă vectorială astfel:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (2.7)$$

Dacă presupunem că  $\vec{r}$  este situat în planul  $xOy$ , componentele vectorului  $\vec{v}$  după direcțiile axelor de coordonate sînt (vezi relația (A.35.b)):

$$v_x = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad (2.8)$$

iar mărimea vitezei va fi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.9)$$

Să vedem cum stau lucrurile în cazul mișcării curbilinii. Vom încerca să folosim cît mai mult din ceea ce am stabilit pentru mișcarea rectilinie. Pentru precizarea ideilor să considerăm o traiectorie curbilinie (fig. I.2.3a) în planul  $xOy$ . În momentul  $t_0$  mobilul se găsește în punctul  $M_0$  a cărui poziție este dată de vectorul de poziție  $\vec{r}(t_0)$ . După un interval de timp  $\Delta t$  el a parcurs arcul  $\Delta s = \widehat{M_0M}$  și se găsește în punctul  $M$  determinat de vectorul  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0 + \Delta t)$ . Coarda  $\overline{M_0M}$  orientată de la  $M_0$  la  $M$  este dată de vectorul  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ . Pentru a găsi viteza instantanee trebuie să luăm intervale  $\Delta t$  care tind la zero. În acest caz atît lungimea arcului cît și a coardei tind la zero și, după cum știm de la geometrie, ele se suprapun, avînd, ambele, direcția tangentei la curbă. Pe o porțiune foarte mică a traiectoriei putem considera deci mișcarea ca fiind rectilinie, viteza mobilului avînd valoarea

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

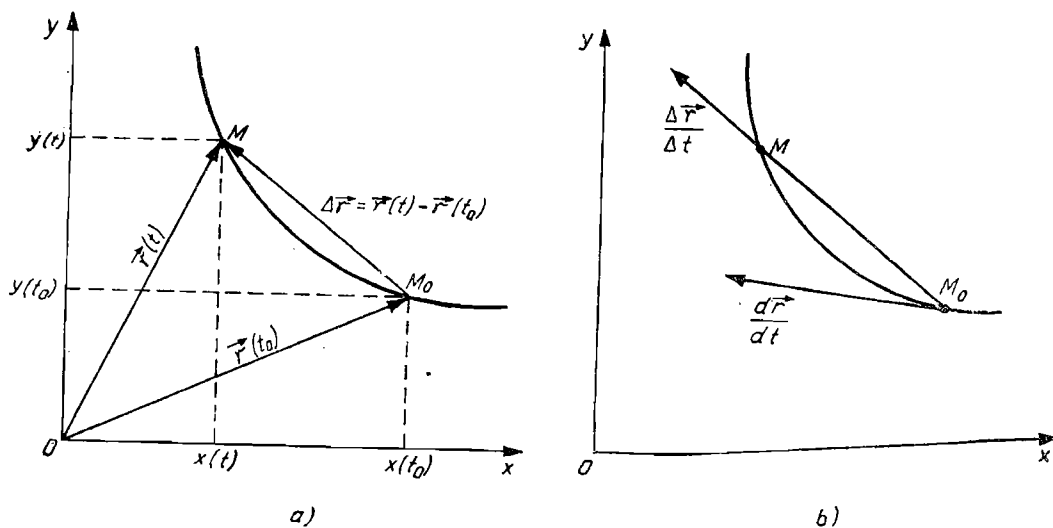


Fig. I.2.3

Ea este orientată în direcția tangentei la traiectorie în punctul  $M_0$ . Deoarece atunci cînd  $\Delta t \rightarrow 0$  coarda  $\overline{M_0M}$  coincide cu tangenta, expresia vectorială a vitezei este (fig. I.2.3b)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (2.10)$$

Se poate scrie  $\vec{v}(t)$  și sub forma următoare:

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{v}_0(t), \quad (2.11)$$

unde  $\vec{v}_0(t)$  este versorul vitezei, iar  $v(t)$  mărimea sa. Relația (2.11) ne permite o clasificare a mișcărilor: dacă versorul  $\vec{v}_0(t)$  nu depinde de timp (are direcție fixă) mișcarea este rectilinie; dacă  $v(t)$  nu depinde de timp, adică în intervale egale de timp mobilul parcurge arce de lungime egală, avem cazul mișcării curbilinii uniforme. În cazul mișcării curbilinii oarecare, variază în timp atât  $v$  cît și  $\vec{v}_0$ .

Relațiile (2.8) și (2.9) sînt corecte și pentru mișcarea curbilinie; mai general, în cazul unei traiectorii curbilinii neplane se pot scrie relațiile

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (2.12)$$

unde

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.13)$$

modulul vitezei fiind dat de

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.14)$$

Din relațiile scrise anterior rezultă imediat ecuația dimensională și unitățile de măsură. Dacă notăm dimensiunile spațiului și timpului cu  $[s] = L$  (lungime) și respectiv  $[t] = T$  (timp), atunci dimensiunile vitezei vor fi  $[v] = [s]/[t] = L/T = LT^{-1}$ . În acest caz unitatea de viteză în S.I. va fi m/s, în C.G.S. — cm/s, iar ca unități practice — km/s, km/h.

## 2.3. ACCELERAȚIA

Am văzut în paragraful anterior că viteza unui mobil nu este în general aceeași, ea poate să aibă valori diferite în diferite puncte de pe traiectorie, sau, altfel spus, la momente de timp diferite. *Accelerația* este mărimea fizică ce caracterizează modul în care variază viteza în timp. Pentru a o defini ne vom referi tot la cazul simplu al mișcării rectilinii (fig. I.2.2). Dacă mobilul are viteza  $v_0$  în momentul cînd trece prin punctul  $M$  (la momentul  $t_0$ ), iar la momentul  $t$  cînd trece prin  $N$  are viteza  $v$ , vom numi accelerație

raportul dintre variația vitezei  $\Delta v = v - v_0$  în intervalul de timp  $\Delta t = t - t_0$  și acest interval:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}. \quad (2.15)$$

Observînd însă că nici accelerația unui mobil nu este întotdeauna aceeași rezultă că relația (2.15) definește doar o accelerație medie și că pentru a o defini pentru fiecare punct, trebuie să procedăm ca și în cazul vitezei. Vom defini accelerația instantanee (sau pur și simplu accelerația) în momentul  $t_0$  ca fiind derivata vitezei în raport cu timpul, pentru  $t = t_0$ :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (2.16)$$

În cazul mișcării curbilinii, am văzut că viteza ca vector variază atît în mărime cît și în direcție. Aceasta înseamnă că și accelerația trebuie definită ca un vector. Pentru a o determina procedăm ca și mai înainte, făcînd raportul dintre variația vitezei  $\Delta \vec{v}$  și intervalul de timp  $\Delta t$  în care are loc, luînd apoi limita pentru  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (2.17)$$

Cu ajutorul relației (2.10), (2.17) devine

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{t=t_0}. \quad (2.18)$$

Expresia (2.18) ne arată că accelerația este dată de derivata de ordinul I a vitezei în raport cu timpul, sau de derivata de ordinul II a vectorului de poziție în raport cu timpul. Ca și viteza, accelerația poate fi descompusă după cele trei axe de coordonate:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (2.19)$$

Ținînd seama de (2.13) componentele accelerației sînt

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (2.20)$$

Relația (2.17) mai poate fi scrisă, introducînd pe (2.11) și ținînd seama de regulile de derivare, în felul următor:

$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{v}_0(t) + v(t) \frac{d\vec{v}_0(t)}{dt}, \quad (2.21)$$

adică vectorul accelerație este descompus în doi vectori  $\vec{a}_1 = \frac{dv}{dt} \vec{v}_0$  și  $\vec{a}_2 = v \frac{d\vec{v}_0}{dt}$ . Să vedem ce semnificație au aceste componente. Primul termen

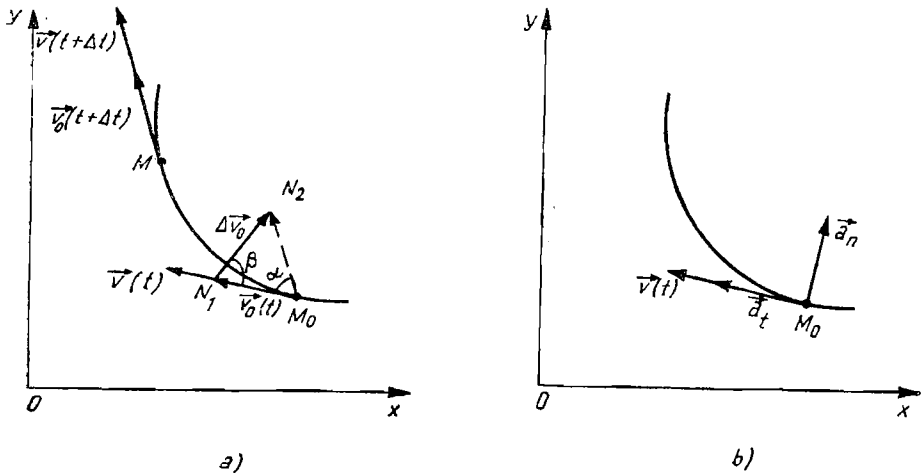


Fig. 1.2.4

reprezintă un vector care este îndreptat în sensul lui  $\vec{v}_0$ , deci este tot timpul paralel cu vectorul viteză, adică tangent la traiectorie. Din această cauză este numit *acclerație tangențială* ( $\vec{a}_t$ ):

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{v}_0. \quad (2.22)$$

Pentru a determina ce direcție are  $\vec{a}_2$ , adică  $\frac{d\vec{v}_0}{dt}$ , trebuie să evaluăm  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_0}{\Delta t}$ .

În fig. 1.2.4a am redesenat traiectoria din fig. 1.2.3 reprezentînd vectorii viteze și versorii respectivi în punctele  $M_0$  și  $M$ . Segmentul  $\overline{M_0N_2}$  este paralel cu  $\vec{v}(t + \Delta t)$  și are lungimea unitate așa că  $\overline{N_1N_2}$  este tocmai vectorul  $\Delta \vec{v}_0$ . Triunghiul  $M_0N_1N_2$  este un triunghi isoscel astfel că unghiul  $\beta$  este egal cu  $\frac{\pi - \alpha}{2}$ . Cînd  $\Delta t \rightarrow 0$  punctul  $M$  se apropie de  $M_0$ , la limită  $\vec{v}(t + \Delta t)$  devenind

paralel cu  $\vec{v}(t)$ , adică în această limită  $\overline{M_0N_1}$  devine paralel cu  $\overline{M_0N_2}$ . Deci cînd  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  astfel că la limită  $\beta = \pi/2$ . Aceasta înseamnă că vectorul  $\frac{d\vec{v}_0}{dt}$  este perpendicular pe  $\vec{v}_0$ , din care cauză  $\vec{a}_2$  poartă numele de *acclerație normală* ( $\vec{a}_n$ ):

$$\vec{a}_n = v(t) \frac{d\vec{v}_0}{dt}. \quad (2.23)$$



Prin urmare, relația (2.21) poate fi scrisă astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \quad (2.21')$$

Accelerația tangențială ( $\vec{a}_t$ ) caracterizează variația vitezei în mărime, iar accelerația normală ( $\vec{a}_n$ ) descrie modificarea direcției vitezei în timp (fig. I.2.4b). Mărimea accelerației va fi dată de

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (2.24)$$

În mișcarea rectilinie accelerația este dată de relația (2.22) deoarece viteza are tot timpul aceeași direcție. În cazul mișcării curbilinii uniforme, viteza variind doar în direcție,  $\vec{a}_t = 0$ , accelerația totală coincide cu cea normală. Într-adevăr, deoarece mărimea vitezei nu variază în timp, avem  $\vec{v}^2 = v^2 =$  constant și derivând obținem  $\vec{v} \frac{dv}{dt} = 0$  sau  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ . Ultima relație ne arată că în cazul mișcării curbilinii uniforme accelerația este tot timpul perpendiculară pe viteză (adică  $\vec{a}_t = 0$ ).

Din relația (2.18) rezultă imediat dimensiunile accelerației:  $[a] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}$ . Unitatea de accelerație va fi deci  $m/s^2$ , iar în sistemul CGS  $cm/s^2$ .

## 2.4. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

În paragrafele anterioare am prezentat definițiile mărimilor fundamentale ale cinematicii. Ne propunem acum să găsim relațiile dintre aceste mărimi pentru anumite cazuri particulare de mișcări. În acest scop, este util să prezentăm o clasificare a mișcărilor, care în general se face după traiectorie și respectiv după legea de mișcare. Astfel, după forma traiectoriei există mișcări *rectilinii* dacă traiectoria este o linie dreaptă, sau *curbilinii* dacă este o linie curbă.

După legea de mișcare există mișcări *uniforme* dacă viteza mobilului rămâne constantă în mărime\* și mișcări *variate* dacă mărimea vitezei nu e constantă în timp. Când viteza crește în timp mișcarea este *accelerată*, iar când scade — *încetinită*. Dacă și accelerația este constantă avem de-a face cu o mișcare *uniform accelerată*, respectiv *uniform încetinită*.

O categorie aparte a mișcărilor variate o formează *mișcările periodice*, adică acele mișcări care se repetă după un interval dat de timp, numit *perioadă*. O clasificare completă a mișcării unui punct material implică stabilirea clasei de mișcare atât după traiectorie cât și după legea de mișcare.

Pentru găsirea legilor de mișcare să observăm că relațiile din § 2.1 și § 2.2 ne permit să rezolvăm problema inversă. Aceasta înseamnă că atunci când cunoaștem modul în care accelerația depinde de timp, adică funcțiile  $a_x(t)$ ,

\* De multe ori prin mișcare uniformă se înțelege o mișcare în cursul căreia vectorul viteză este constant, adică o mișcare rectilinie și uniformă.

$a_y(t)$  și  $a_z(t)$ , relațiile (2.20) pot fi tratate ca ecuații diferențiale și prin integrare vom obține

$$v_x(t) = \int a_x(t)dt + C_x, v_y(t) = \int a_y(t)dt + C_y, v_z(t) = \int a_z(t)dt + C_z, \quad (2.25)$$

iar cînd cunoaștem dependența de timp a vitezei, adică funcțiile  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  și  $v_z(t)$ , din relațiile (2.13) obținem dependența de timp a coordonatelor:

$$x(t) = \int v_x(t)dt + C'_x, y(t) = \int v_y(t)dt + C'_y, z(t) = \int v_z(t)dt + C'_z. \quad (2.26)$$

Constantele  $C_x, C_y, C_z$  și  $C'_x, C'_y, C'_z$  pot fi determinate cunoscînd valorile mărimilor  $v_x, v_y, v_z$ , și respectiv  $x, y, z$  la un moment oarecare. Altfel spus, cunoașterea vectorului accelerație la orice moment,  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ , ne permite să determinăm viteza  $\vec{v}(t)$  și respectiv poziția mobilului  $\vec{r}(t)$  la orice moment cu condiția precizării vitezei și poziției la un moment oarecare  $t_0$ , adică prin precizarea condițiilor inițiale:  $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$  și  $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ .

Relațiile (2.25) și (2.26) pot fi scrise condensat sub formă vectorială:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}, \quad (2.25')$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}', \quad (2.26')$$

unde prin  $\vec{C}$  și  $\vec{C}'$  am înțeles vectorii constanți de componente  $(C_x, C_y, C_z)$  și respectiv  $(C'_x, C'_y, C'_z)$ .

Pentru mișcarea rectilinie uniformă și uniform variată poate fi rezolvată problema inversă și pe o cale mai simplă. În cele ce urmează vom prezenta ambele variante.

În încheierea acestui paragraf indicăm procedeul general de aflare a traiectoriei. Folosind (2.26) găsim poziția mobilului la orice moment de timp  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  și  $z = z(t)$  și eliminînd apoi între acestea variabila  $t$  obținem o relație între  $x, y$  și  $z$  adică ecuația unei curbe care descrie traiectoria.

## 2.5. MIȘCAREA RECTILINIE

a) **Mișcarea rectilinie uniformă.** Un mobil se mișcă rectiliniu și uniform dacă traiectoria sa este o linie dreaptă și parcurge spații egale în intervale de timp egale. În acest caz, vectorul viteză are în decursul mișcării aceeași direcție, iar viteza instantanee coincide cu viteza medie.

Spațiul ( $s$ ) parcurs în timpul  $t$  va fi, conform (2.3),

$$s = v_0 t \quad (2.27)$$

unde  $v_0$  este viteza mobilului.

Dacă la momentul  $t = t_0$  mobilul se găsește la distanța  $s_0$  de punctul ales ca origine, atunci din (2.4) obținem

$$s = s_0 + v_0(t - t_0). \quad (2.28)$$

Relația (2.28) trece în relația (2.27) dacă  $t_0 = 0$  și  $s_0 = 0$ .

Problema poate fi rezolvată și prin integrarea ecuațiilor (2.13), adică folosind relațiile (2.26). Deoarece traiectoria este o linie dreaptă, să alegem, pentru simplificare, axa  $Ox$  ca direcție de mișcare a mobilului (fig. 1.2.5). În acest caz  $v_z = v_0 = \text{constant}$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Din (2.26) obținem atunci

$$x(t) = v_0 t + C_x', \quad y(t) = C_y', \quad z(t) = C_z'.$$

Folosind condițiile inițiale  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = z(t_0) = 0$ , obținem pentru constante valorile  $C_x = x_0 - v_0 t_0$ ,  $C_y = 0$ ,  $C_z = 0$ , și deci coordonatele mobilului sînt

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0); \quad y(t) = 0; \quad z(t) = 0. \quad (2.29)$$

Relațiile ne arată că mișcarea are loc în lungul axei  $Ox$ , așa cum am presupus. Observăm că  $x$  reprezintă distanța de la origine la punctul în care se

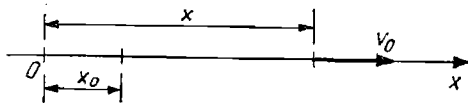


Fig. 1.2.5

găsește mobilul la momentul  $t$ , adică ceea ce am notat mai înainte cu  $s$  și deci formulele (2.28) și (2.29) coincid. Dacă  $v_0$  este pozitiv mobilul se depărtează de origine. Relațiile (2.27), (2.28) sau (2.29) sînt numite *ecuațiile mișcării rectilinii*.

Relația dintre spațiu și timp poate fi reprezentată grafic, luînd pe abscisă timpul iar pe ordonată spațiul ( $x$  sau  $s$ ). O asemenea reprezentare grafică poartă numele de *diagramă a mișcării*. În figura 1.2.6 este reprezentată grafic relația (2.29) (și cazurile particulare în care  $x_0$  și (sau)  $t_0$  sînt zero). Scriînd (2.29) sub forma  $x - x_0 = v_0(t - t_0)$ , se vede imediat că aceasta reprezintă ecuația unei drepte care trece prin punctul de abscisă  $t_0$  și ordonată  $x_0$ , făcînd unghiul  $\alpha$  cu axa absciselor, unde

$$\text{tg } \alpha = v_0 \quad (2.30)$$

reprezintă panta drepte. Diagrama mișcării permite aflarea poziției mobilului la un moment  $t$  luînd ordonata punctului a cărei abscisă este  $t$ .

Observații: Nu este obligatorie alegerea axei  $Ox$  în direcția mișcării. De exemplu dacă presupunem că vectorul constant  $\vec{v}_0$  ar fi în planul  $xOy$ , adică am avea  $v_x = v_{0x}$  și  $v_y = v_{0y}$ , din (2.26) obținem

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0); \quad y = y_0 + v_{0y}(t - t_0). \quad (2.31)$$

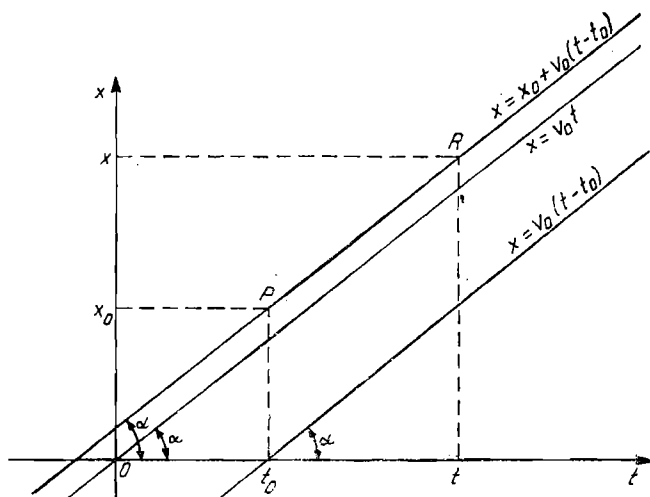


Fig. 1.2.6

Eliminând  $t - t_0$  rezultă

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}. \quad (2.32)$$

Aceasta este ecuația unei drepte în planul  $xOy$ , deci traiectoria este din nou o dreaptă.

b) **Mișcarea rectilinie uniform variată.** Un mobil descrie o mișcare rectilinie uniform variată dacă traiectoria sa este o linie dreaptă dar viteza variază cu cantități egale în intervale de timp egale. În acest caz vectorul accelerație are aceeași direcție și mărime în tot timpul mișcării iar accelerația instantanee coincide cu cea medie.

Dacă mobilul are accelerația  $a_0$  constantă atunci viteza pe care o va avea la momentul  $t$  va fi, conform relației (2.15),

$$v = v_0 + a_0(t - t_0), \quad (2.33)$$

unde  $v_0$  este viteza pe care mobilul o avea la momentul  $t = t_0$ .

Din relația (2.33) rezultă că în mișcarea uniform variată viteza crește sau scade direct proporțional cu timpul, dacă  $a_0$  și  $v_0$  au același semn și respectiv semne contrare.

Să vedem, în continuare, cum variază în timp spațiul parcurs. Pentru aceasta să ne reamintim că spațiul parcurs de mobil în mișcare variată într-un interval de timp  $(t - t_0)$  este egal cu spațiul pe care l-ar parcurge mobilul în mișcarea uniformă în același interval de timp și având viteza egală cu viteza medie. Conform relației (2.4) vom avea:

$$s = s_0 + v_m(t - t_0). \quad (2.34)$$

Ținând seama de (2.33), după intervale de timp care diferă cu 1 secundă, viteza are valorile:

$$\begin{array}{ll} v_0 = v_0 & \text{la } t = t_0, \\ v_1 = v_0 + a_0 & \text{la } t = t_0 + 1, \\ v_2 = v_0 + 2a_0 & \text{la } t = t_0 + 2, \\ v_k = v_0 + ka_0 & \text{la } t = t_0 + k, \end{array} \quad (2.35)$$

adică viteza crește în progresie aritmetică cu rația  $a_0$ . În acest caz viteza medie este egală cu media aritmetică a valorilor  $v_0, \dots, v_k$ ,

$$v_m = \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_k}{k + 1} = \frac{v_0 + v_k}{2},$$

deoarece la numărător avem suma unei progresii aritmetice cu  $(k + 1)$  termeni, a cărei valoare este  $\frac{v_0 + v_k}{2} (k + 1)$ . Datorită relației (2.33) valorile vitezei se vor găsi în progresie aritmetică chiar dacă în loc de a lua intervale de 1 s vom considera intervale de timp mai mici. Astfel, dacă împărțim intervalul  $t - t_0$  în  $N$  subintervale  $\Delta t$ , obținem o progresie aritmetică a cărei rație este  $\Delta t \cdot a_0$  în loc de  $1 \cdot a_0$ . Cum în expresia sumei progresiei nu ne apare rația, rezultă că se poate scrie în general

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Înlocuind pe  $v$  cu expresia (2.33), viteza medie are expresia  $v_m = v_0 + \frac{1}{2} a_0 \cdot (t - t_0)$ . Introducând acum în (2.34), obținem ecuația mișcării uniform variate:

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2. \quad (2.36)$$

Ca și în cazul mișcării rectilinii uniforme problema poate fi rezolvată și prin integrarea ecuațiilor (2.20) și (2.13) adică folosind relațiile (2.25) și (2.26). Alegând axa  $Ox$  în lungul traiectoriei ( $a_x = a_0 = \text{constant}$ ,  $a_y = a_z = 0$ ) vom avea următoarele condiții:

$$v_x(t_0) = v_0, \quad v_y(t_0) = 0, \quad v_z(t_0) = 0, \quad (2.37 \text{ a})$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = 0, \quad z(t_0) = 0. \quad (2.37 \text{ b})$$

Din (2.25) rezultă  $v_x(t) = a_0 t + C_x$ ,  $v_y = C_y$ ,  $v_z = C_z$ , și folosind (2.37 a) se determină constantele  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ , obținându-se

$$v_x(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0. \quad (2.38)$$

Coordonatele se obțin cu ajutorul lui (2.26):  $x(t) = v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2} - a_0 t_0 t + C'_x$ ,  $y(t) = C'_y$ ,  $z(t) = C'_z$ . Ținând seama de condițiile (2.37 b) rezultă

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (2.39)$$

Am obținut din nou relațiile (2.33) și (2.36) însă cu alte notații.

În cele discutate pînă acum nu am precizat nimic cu privire la semnul relativ dintre  $v_0$  și  $a_0$ . Dacă viteza crește cu timpul în valoare absolută, adică  $v_0$  și  $a_0$  au același semn, mișcarea se numește *uniform accelerată*, iar dacă scade, adică  $v_0$  și  $a_0$  au semne contrare, mișcarea se numește *uniform încetinită*. Este evident că nu putem avea mișcare uniform încetinită decît dacă viteza inițială  $v_0$  este diferită de zero (dacă mobilul este în repaus nu avem ce încetini), în timp ce mișcarea uniform accelerată poate avea loc și în cazul în care corpul pleacă din repaus ( $v_0 = 0$ ).

Alegînd axa  $Ox$  în direcția lui  $\vec{v}_0$ , adică  $v_0 > 0$ , și notînd cu  $a_0$  valoarea absolută a accelerației, putem scrie:

$$v_x = v_0 \pm a_0(t - t_0), \quad (2.38')$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} a_0(t - t_0)^2, \quad (2.39')$$

unde termenii cu  $a_0$  au semnul (+) în cazul mișcării uniform accelerate și (−) în cazul mișcării uniform încetinite. Se pot folosi în continuare relațiile (2.33) și (2.36) respectiv (2.38) și (2.39), înțelegînd prin  $a_0$  mărimea accelerației cu semnul corespunzător.

Dacă vrem să determinăm viteza mobilului în mișcare uniform variată, în funcție de spațiul ( $s - s_0$ ), parcurs, eliminăm timpul ( $t - t_0$ ) între relațiile (2.33) și (2.36):

$$s - s_0 = v_0 \frac{(v - v_0)}{a_0} + \frac{1}{2} a_0 \left( \frac{v - v_0}{a_0} \right)^2,$$

de unde rezultă relația lui Galilei

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(s - s_0)}. \quad (2.40)$$

În particular pentru  $v_0 = 0$  și  $s_0 = 0$  expresia este mult simplificată:

$$v = \sqrt{2a_0s}.$$

Timpul scurs în mișcarea uniform încetinită pînă la oprirea mobilului ( $t_{opr}$ ) este obținut din (2.38') punînd condiția  $v_x = 0$ :

$$t_{opr} - t_0 = \frac{v_0}{a_0}. \quad (2.41)$$

Din aceeași relație se vede că acesta este egal cu timpul necesar ca mobilul să atingă viteza  $v_0$  dacă la momentul  $t = t_0$  avea viteza inițială nulă.

Spațiul parcurs pînă la oprire ( $x_{opr}$ ) se găsește introducînd (2.41) în (2.39'):

$$x_{opr} - x_0 = v_0/2a_0. \quad (2.42)$$

Vom remarca în încheiere că, și în mișcarea uniform variată, nu este necesar să alegem una din axe în lungul traiectoriei, aceasta din urmă poate fi o dreaptă oarecare într-un plan sau în spațiu.

c) **Compunerea a două mișcări rectilinii.** În paragrafele precedente am făcut cunoștință cu mișcarea simplă a unui mobil. Este posibil însă ca el să fie forțat să execute simultan două mișcări. Pentru precizarea ideilor să considerăm ca exemplu un vapor care traversează un râu. Să presupunem că datorită tracțiunii motoarelor el se mișcă în raport cu apa cu o viteză uniformă  $v_{vap}$  îndreptată perpendicular pe mal (fig. I.2.7). Deoarece apa râului curge într-un anumit sens, vaporul va fi antrenat odată cu apa într-o mișcare paralelă cu malul cu viteza  $v_{apă}$ , astfel că viteza vaporului față de mal (dacă alegem axele de coordonate ca în fig. I.2.7) va fi un vector de componente  $v_{apd}$  și  $v_{vap}$ . În acest caz ecuațiile de mișcare vor fi date de relațiile (2.31) cu  $v_{0x} = v_{apd}$ ,  $v_{0y} = v_{vap}$  și dacă presupunem că vaporul a plecat din punctul  $O$  (adică  $x_0 = y_0 = 0$ ) ecuația traiectoriei va fi:

$$\frac{y}{x} = \frac{v_{vap}}{v_{apd}}.$$

Din aceasta rezultă că atunci când vaporul a atins malul celălalt ( $y = L$ ) el s-a plasat totodată în lungul malului cu distanța

$$d = \frac{v_{apd}}{v_{vap}} L.$$

Rezultă deci că ecuațiile (2.31) și (2.32) ne descriu mișcarea obținută prin compunerea a două mișcări rectilinii uniforme ale căror viteze sînt perpendiculare între ele.

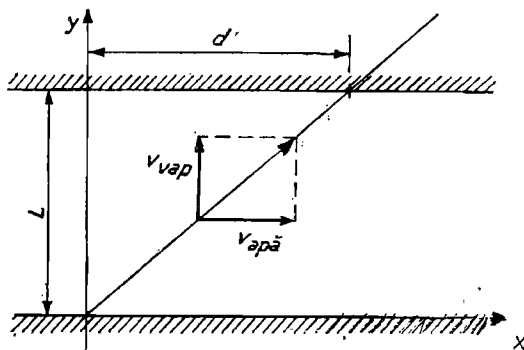


Fig. I.2.7

Atragem atenția că situația din exemplul nostru este un caz particular al unei probleme mai generale care se pune în mecanică, și anume: cunoscînd mișcarea unui mobil  $M$  față de un anumit sistem de referință mobil ( $S'$ ) (în exemplul nostru sistemul legat de masa de apă), să se determine mișcarea lui  $M$  față de un alt sistem ( $S$ ), considerat fix (în exemplu malul), fiind cunoscută mișcarea sistemului de referință mobil față de cel fix. Nu vom intra aici în amănunt asupra modului în care sînt legate mărimile care determină mișcarea față de cele două sisteme, amintind doar cîteva chestiuni de terminologie.

Astfel, viteza cu care se mișcă sistemul mobil  $S'$  față de cel fix  $S$  se numește *viteză de transport*  $\vec{v}_t$  (în cazul nostru  $\vec{v}_{apa}$ ), viteza mobilului față de sistemul mobil, *viteză relativă*  $\vec{v}_r$ , (în cazul nostru  $\vec{v}_{vap}$ ), iar viteza mobilului față de sistemul considerat fix  $S$ , *viteză absolută*  $\vec{v}_a$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_t + \vec{v}_r. \quad (2.43)$$

Derivînd în raport cu timpul obținem relația dintre accelerațiile corespunzătoare. Să observăm că dacă sistemul  $S'$  se mișcă rectiliniu și uniform față de  $S$

atunci accelerația absolută ( $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}$ ) este egală cu cea relativă ( $\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}$ ).

În general, cînd cunoaștem viteza și accelerația mobilului pe două direcții perpendiculare între ele, putem folosi relațiile date la începutul acestui paragraf pentru a găsi  $x(t)$  și  $y(t)$ , adică poziția mobilului în orice moment. Eliminînd pe  $t$  între cele două relații, găsim traiectoria. Să observăm că pentru problema noastră este suficient să știm că, față de un anumit sistem de coordonate, mobilul are viteza  $\vec{v}_0$  de componente  $v_{0x}$  și  $v_{0y}$  și accelerația  $\vec{a}_0$  de componente  $a_{0x}$  și  $a_{0y}$ . Nu ne interesează cauza pentru care mobilul capătă viteza și accelerația respectivă.

În cazul în care trebuie să compunem două mișcări rectilinii (perpendiculare) uniform accelerate, cu viteză inițială, alegem axele de coordonate în lungul celor două direcții de mișcare. Viteza și accelerația în lungul unei direcții vor fi  $v_{0x}$  și  $a_{0x}$ , iar în cealaltă  $v_{0y}$  și  $a_{0y}$  și folosind (2.25) și (2.26) găsim ecuațiile de mișcare. Nu vom mai efectua calculele, menționînd doar că în cazul general de compunere a două mișcări rectilinii uniform accelerate, perpendiculare, traiectoria nu mai este rectilie ci o curbă de gradul II. Pentru ca traiectoria obținută ca rezultat al celor două mișcări să fie rectilie trebuie să fie satisfăcută condiția  $v_{0x} a_{0y} - v_{0y} a_{0x} = 0$ , adică viteza și accelerația totală a mobilului (ca vectori) să fie coliniare.

Să considerăm și cazul în care compunem o mișcare rectilie uniformă (viteza  $v_{0x}$ ) și o mișcare rectilie uniform încetinită perpendiculară pe ea (viteza inițială  $v_{0y}$  și accelerația  $a_{0y} = a_0$ ). Notățiile au fost făcute presupunînd că am ales axa  $Ox$  în lungul direcției mișcării uniforme iar axa  $Oy$  în lungul celeilalte. Presupunînd că mobilul pleacă la momentul  $t_0 = 0$  din punctul  $x_0 = 0$  și  $y_0$ , din (2.25), (2.26) obținem:

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y} - a_0 t, \quad (2.44)$$

$$x = v_{0x} t, \quad y = y_0 + v_{0y} t - a_0 \frac{t^2}{2}. \quad (2.45)$$

Prin eliminarea timpului rezultă ecuația traiectoriei:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{a_0}{2v_{0x}^2} x^2 \quad (2.46)$$



care este ecuația unei parabole. Să reprezentăm grafic această traiectorie pentru două situații particulare:

Cazul  $y_0 = 0$  (fig. I.2.8 a). Traiectoria este parabola cu vârful în punctele de coordonate

$$x_1 = \frac{v_{0x}v_{0y}}{a_0}, \quad y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2a_0} \quad (2.47)$$

și taie axa  $Ox$  în punctele  $x = 0$  și  $x_{max}$ ,

$$x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{a_0} = 2x_1. \quad (2.48)$$

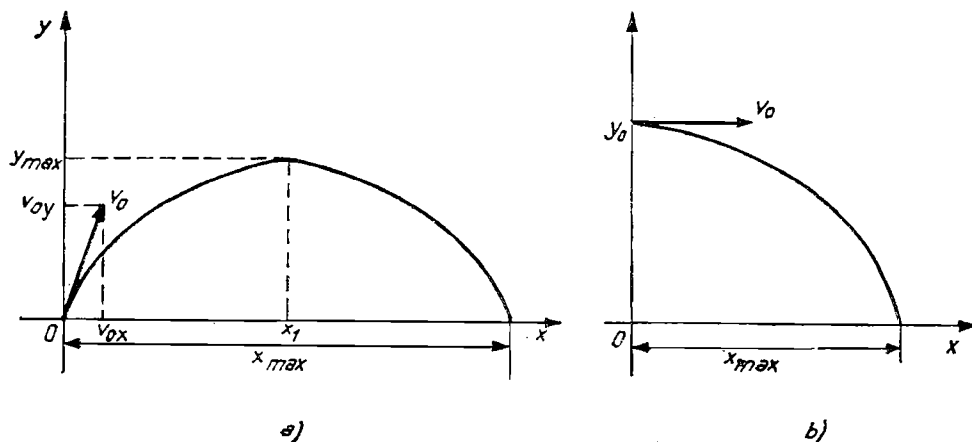


Fig. I.2.8

Valorile  $y_{max}$  și  $x_{max}$  pot fi obținute și într-un mod în care condițiile fizice sînt mai transparente. Astfel, viteza mobilului în lungul axei  $Oy$  scade de la valoarea  $v_{0y}$  pînă la valoarea  $v_y$  (conform relației 2.44) și după un timp  $t = t_1$  devine zero. Pentru  $t > t_1$ , această viteză devine negativă deci mișcarea se va efectua în sens invers versorului axei  $Oy$ , astfel că depărtarea maximă de  $Ox$  este  $y_{max} = y(t_1)$ . Din (2.44) rezultă

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{a_0} \quad (2.49)$$

și introducîndu-l în (2.45) obținem  $x_1$  și  $y_{max}$  date de relațiile (2.47). Pentru a găsi pe  $x_{max}$  trebuie calculat timpul  $t_2$  după care mobilul atinge din nou axa  $Ox$ , pentru care  $y = 0$ . Din (2.45) rezultă

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{a_0} = 2t_1, \quad (2.50)$$

iar  $x_{max}$  se calculează folosind relația (2.48).

Cazul  $v_{0y} = 0$  (fig. I.2.8b). Traiectoria este arcul de parabolă care pleacă din punctul  $x = 0, y = y_0$  și taie axa  $Ox$  în punctul

$$x_{max} = v_{0x} \sqrt{\frac{2y_0}{a_0}}. \quad (2.51)$$

În încheierea acestui paragraf menționăm că în general putem avea compunerea a două mișcări rectilinii care nu sînt perpendiculare între ele. În acest caz sînt luate proiecțiile vectorilor viteză  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  și accelerație  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$  pe două direcții perpendiculare și conform regulilor de adunare a vectorilor se obțin componentele vitezei și accelerației rezultante

$$v_{0x} = v_{1x} + v_{2x}, \quad v_{0y} = v_{1y} + v_{2y},$$

$$a_{0x} = a_{1x} + a_{2x}, \quad a_{0y} = a_{1y} + a_{2y},$$

pe care le folosim în relațiile (2.25) și (2.26), ca și mai înainte.

## 2.6. MIȘCAREA CIRCULARĂ

Un mobil execută o mișcare circulară dacă traiectoria sa este o circumferință. Mișcarea mobilului pe un cerc de rază  $R$  este complet cunoscută dacă știm la fiecare moment unghiul la centru  $\alpha = \angle MOM_0$  deci funcția  $\alpha(t)$ . Prin  $M$  am notat punctul în care se găsește mobilul în momentul  $t$ , iar  $M_0$  este un punct fix pe cerc (fig. I.2.9a). În continuare să ne amintim că mișcarea este cunoscută cînd cunoaștem raza vectorie la orice moment, adică  $\vec{r}(t)$ . Deoarece mișcarea are loc în lungul unei circumferințe, alegînd originea  $O$  în centrul cercului, mărimea razei vectorie este aceeași (constantă) în tot timpul mișcării, prin urmare:

$$\vec{r}(t) = R\vec{r}_0(t), \quad (2.52)$$

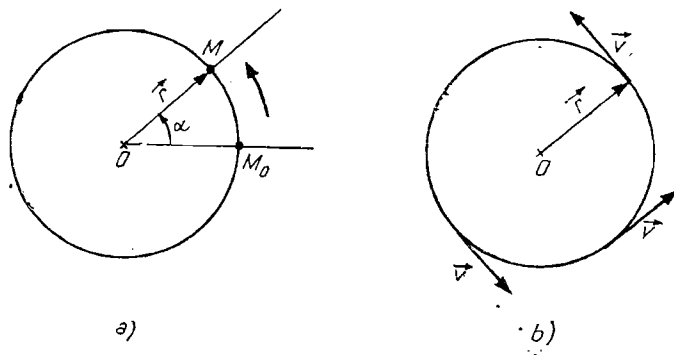


Fig. I.2.9

unde  $\vec{r}_0(t) = \vec{r}(t)/R$  este versorul direcției  $\vec{r}(t)$ , iar  $R$  este raza circumferinței. În această descriere,  $\alpha(t)$  reprezintă unghiul descris de raza vectoare în timpul  $t$  iar legătura între arcul  $\widehat{M_0M}$  și unghiul la centru este dată de relația

$$\widehat{s} = \text{arc } \widehat{M_0M} = R\alpha, \quad (2.53)$$

unde  $\alpha$  este măsurat în radiani iar cu  $s$  am notat lungimea drumului parcurs de mobil pe traiectorie (spațiul).

Dacă mișcarea este uniform circulară, mobilul va parcurge arce egale în intervale de timp egale, adică raza vectoare acoperă unghiuri egale.

Numim *viteză unghiulară* unghiul descris de raza vectoare în unitatea de timp. Viteza unghiulară se notează cu  $\omega$  și se măsoară în radiani pe secundă (rad/s). În cazul mișcării circulare uniforme avem

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \text{const. sau } \alpha = \omega t. \quad (2.54)$$

Este necesar să introducem încă două mărimi și anume *perioada* rotației ( $T$ ) și *frecvența de rotație* ( $\nu$ ). Perioada reprezintă timpul în care mobilul străbate întreaga circumferință, adică raza vectoare acoperă un unghi  $2\pi$ . Frecvența reprezintă numărul de rotații executate de mobil în unitatea de timp și se măsoară în rotații pe secundă (rot/s).

Perioada și frecvența sînt mărimi inverse deoarece mobilul efectuează în  $T$  secunde o rotație iar într-o secundă  $\nu$  rotații, deci:

$$T \cdot \nu = 1. \quad (2.55)$$

Deoarece într-un timp egal cu o perioadă,  $t = T$ , raza vectoare acoperă un unghi  $2\pi$ , folosind (2.54) și (2.55), viteza unghiulară este dată de

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \quad (2.56)$$

Pentru o mișcare circulară neuniformă, viteza unghiulară va fi definită astfel:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.57)$$

$\omega$  fiind dependentă de timp. În acest caz se poate defini și o *acelerație unghiulară* ( $\varepsilon$ ) prin relația

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.58)$$

În cazul mișcării circulare uniform variate accelerația unghiulară este constantă și din (2.58) și (2.57) obținem

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (2.59)$$

și

$$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad (2.60)$$

unde  $\omega_0$  este viteza unghiulară a mobilului la momentul  $t = 0$ , iar  $\epsilon$  este pozitiv sau negativ după cum mișcarea este uniform accelerată sau uniform încetinită.

*Viteza liniară* este viteza cu care mobilul parcurge circumferința, adică arcul străbătut în unitatea de timp. Conform celor discutate la sfârșitul lui 2.2, acesta este un vector orientat după tangenta la traiectorie, având mărimea

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

unde  $\Delta s$  este arcul parcurs de mobil în timpul  $\Delta t$ . Folosind relațiile (2.53) și (2.54 a) se obține arcul  $\Delta s = R\Delta\alpha = R\omega\Delta t$ , de unde, ținând seama și de (2.56) rezultă viteza liniară în mișcarea uniform circulară:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\omega\Delta t}{\Delta t} = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu. \quad (2.61)$$

În concluzie, în cazul mișcării circulare uniforme viteza liniară este un vector tangent la circumferință (fig. I.2.9b), orientat în sensul mișcării, de mărime constantă și egală cu produsul dintre raza circumferinței și viteza unghiulară.

Din cele discutate pînă acum rezultă că mișcarea circulară este perfect determinată cînd cunoaștem planul în care se găsește circumferința, raza acesteia  $R$ , viteza unghiulară  $\omega$  (sau mărimea vitezei liniare  $v$ ) și sensul în care este parcursă circumferința (sensul de rotație). Să observăm însă că dacă este dată raza  $R$ , toate celelalte caracteristici pot fi indicate cu ajutorul unei singure mărimi, însă vectoriale. Pentru aceasta introducem viteza unghiulară,

definită prin vectorul  $\vec{\omega}$  (fig. I.2.10a) cu următoarele caracteristici:

- este perpendicular pe planul de rotație;
- este orientat în sensul de înaintare al unui burghiu rotit în sensul mișcării;
- are mărimea egală cu viteza unghiulară  $\omega$ .

Reamintindu-ne definiția produsului vectorial a doi vectori, se vede din figura I.2.10a că putem scrie o relație între vectorul vitezei liniare și vectorul vitezei unghiulare:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.62)$$

Într-adevăr, această relație leagă corect sensurile vectorilor,  $\vec{r}$ ,  $\vec{\omega}$  și  $\vec{v}$ , precum și mărimile lor:

$$v = |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) \quad (2.63)$$

și cum  $|\vec{r}| = R$ ,  $|\vec{\omega}| = \omega$ , iar unghiul dintre  $\vec{\omega}$  și  $\vec{r}$  este  $\pi/2$ , rezultă  $v = R\omega$  adică relația (2.61).

Definiția vectorului vitezei unghiulare se menține și în cazul mișcării circulare neuniforme, dar mărimea sa este dată de relația (2.57) și nu mai este o constantă.

În discuția anterioară, am considerat originea  $O$  chiar în centrul circumferinței, adică vectorul de poziție  $\vec{r} = \vec{OM}$ . Să observăm însă că putem să luăm ca origine un punct oarecare  $O'$  de pe dreapta pe care se găsește vectorul  $\vec{\omega}$ , (fig. I.2.10b), adică vectorul de poziție  $\vec{r}$  va fi vectorul  $\vec{O'M}$ .

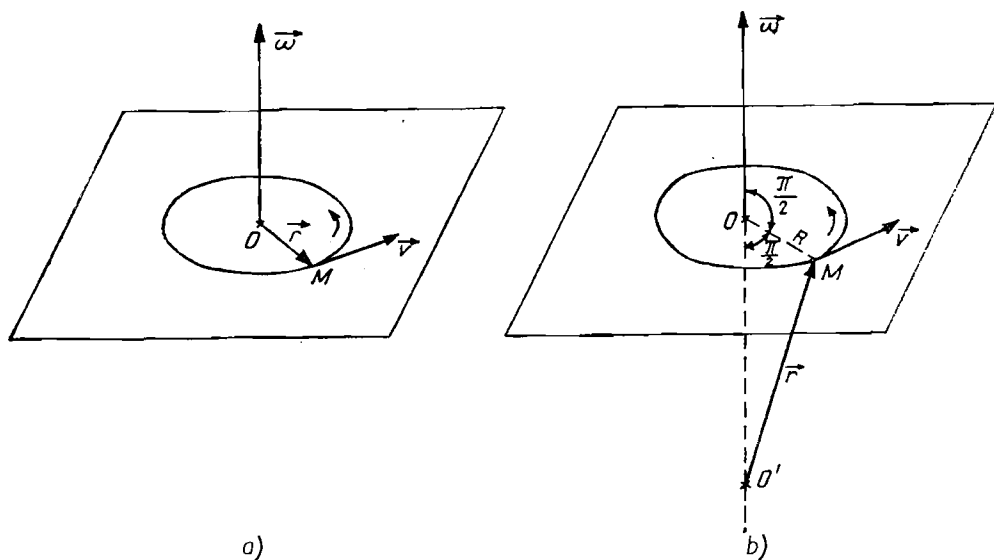


Fig. 1.2.10

Relația dintre  $\vec{r}$ ,  $\vec{\omega}$  și  $\vec{v}$  va fi tot (2.62). Într-adevăr din definiția produsului vectorial, direcția și sensul vectorului  $\vec{v}$  sînt corect determinate, iar mărimea este dată tot de relația (2.63). Din triunghiul dreptunghic  $MOO'$  avem însă  $\overline{OM} = \overline{O'M} \sin \widehat{OO'M}$ , adică  $R = |\vec{r}| \sin(\vec{r}, \vec{\omega})$ , deci relația (2.63) dă din nou  $v = R\omega$ .

*Accelerația.* Am văzut că în mișcarea circulară uniformă mărimea vitezei este aceeași tot timpul mișcării, însă direcția sa se modifică mereu pentru

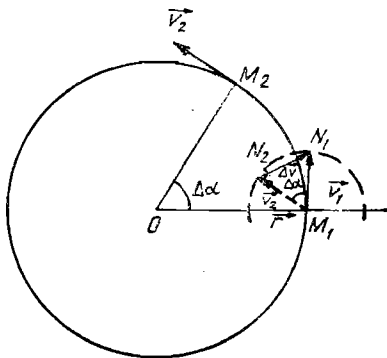


Fig. 1.2.11

a rămîne tangentă la circumferință. Aceasta înseamnă că vectorul viteză nu este constant în timp și deci pare o accelerație. Să presupunem că la un moment oarecare de timp mobilul se găsește în punctul  $M_1$  (fig. 1.2.11) și

are viteza  $\vec{v}_1$ . După un interval de timp foarte scurt el se găsește în punctul  $M_2$  avînd viteza  $\vec{v}_2$ . În acest timp raza vectoare a acoperit unghiul  $\Delta\alpha$ , de asemenea foarte mic. Pentru a găsi  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  translatăm pe  $\vec{v}_2$  în  $M_1$  și atunci  $\Delta\vec{v} = \vec{N_1N_2}$ .

Deoarece am definit accelerația  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ , pentru a găsi mărimea sa trebuie să evaluăm raportul  $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\overline{N_1N_2}}{\Delta t}$  pentru  $\Delta t \rightarrow 0$ . Deoarece mărimea vitezei liniare este constantă ( $v_2 = v_1 = v$ ), se poate construi un cerc de rază  $v$  cu centrul în  $M_1$ , care va trece prin punctele  $N_1$  și  $N_2$  (cercul punctat din fig. I.2.11). Unghiurile  $\widehat{M_2OM_1}$  și  $\widehat{N_2M_1N_1}$  sînt egale (unghiuri cu laturile perpendiculare) și deci unghiul  $\widehat{N_2M_1N_1} = \Delta\alpha$ . Arcul  $\widehat{N_1N_2}$  este egal cu raza cercului ( $v$ ) înmulțită cu unghiul la centru ( $\Delta\alpha$ ), adică arc  $\widehat{N_1N_2} = v\Delta\alpha$  și cum, pentru  $\Delta\alpha$  foarte mic, arcul  $\widehat{N_1N_2}$  este egal cu coarda  $\overline{N_1N_2}$ , avem

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\Delta\alpha}{\Delta t} = v\omega, \quad (2.64 \text{ a})$$

deoarece, conform (2.54),  $\Delta\alpha/\Delta t = \omega$  indiferent de intervalul de timp considerat. Direcția și sensul vectorului accelerație coincid cu cele ale vectorului  $\Delta\vec{v}$ , cînd  $\Delta t \rightarrow 0$ , adică punctul  $M_2$  se apropie foarte mult de punctul  $M_1$ . Din figura I.2.11 se vede că unghiul dintre  $\Delta\vec{v}$  și  $\vec{v}_1$  este egal cu  $\pi/2 - \Delta\alpha/2$ . Deoarece, cînd  $M_2 \rightarrow M_1$ ,  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , rezultă că la limită  $\Delta\vec{v}/\Delta t$  este perpendicular pe  $\vec{v}$ . Deci vectorul  $\vec{a}$  este perpendicular pe vectorul viteză liniară, adică, în cazul mișcării circulare uniforme, este diferită de zero doar componenta normală  $a_n$  a accelerației. Din (2.64 a) și (2.61) rezultă deci

$$a = a_n = v\omega = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}. \quad (2.64)$$

Tot din construcția făcută se observă că  $\vec{a}_n$  este orientat în lungul razei fiind tot timpul îndreptat spre centru. Din acest motiv accelerația normală în mișcarea circulară se mai numește și *centripetă*. Ținînd seama de relațiile (2.64) și (2.52) se poate scrie și relația vectorială

$$\vec{a}_n = -\omega^2 R\vec{r}_0 = -\omega^2\vec{r}. \quad (2.65)$$

Se poate remarca faptul că aceste concluzii rezultau direct din discuția generală de la sfîrșitul paragrafului 2.3. Într-adevăr, fiind vorba de o mișcare

în care viteza variază doar în direcție, rezultă că  $a_t = 0$  (relația 2.22). În aceste condiții

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

și folosind relația (2.62),  $\vec{a}_n$  devine:

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{\omega} \times \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \vec{\omega} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \end{aligned}$$

Folosind din nou relația (2.62), se obține

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.66)$$

sau, dezvoltând dublul produs vectorial, rezultă

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\vec{r} \omega^2,$$

în care am ținut seama că vectorii  $\vec{\omega}$  și  $\vec{r}$  sînt perpendiculari. Am obținut deci, din nou, relația (2.65).

Menționăm că dacă luăm originea ca în figura I.2.12,  $\vec{r}$  nu mai este perpendicular pe  $\vec{\omega}$  și în acest caz relația corectă este (2.66) și nu (2.65). Aceasta provine din faptul că  $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  reprezintă un vector în lungul razei circumferinței, în timp ce vectorul  $(-\omega^2 \vec{r})$  are o direcție arbitrară care depinde de alegerea originii  $O'$ .

În cazul mișcării circulare neuniforme, prin derivarea relației (2.62) obținem

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

unde prin  $\vec{\varepsilon}$  am notat vectorul accelerație unghiulară, care are aceeași direcție ca și  $\vec{\omega}$  și are mărimea  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  (fig. I.2.12). Vectorul produs vectorial  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

are aceeași direcție cu  $\vec{v}$ , deci reprezintă *accelerația tangențială* astfel că accelerația totală este dată de

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad (2.68)$$

unde

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (2.68 \text{ a})$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.68 \text{ b})$$

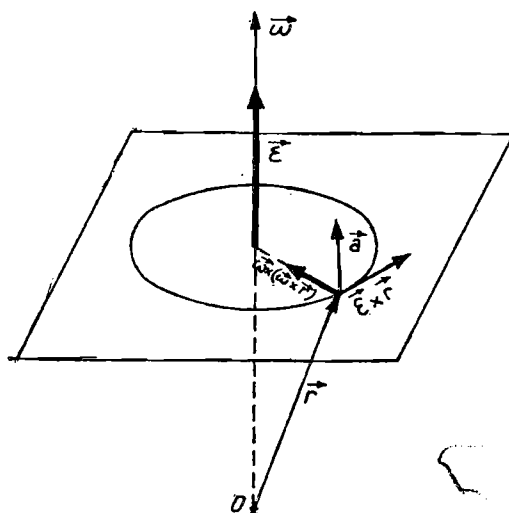


Fig. 1.2.12

Dacă mișcarea circulară este uniform variată, ținând seama de relațiile (2.59), (2.60) și (2.61), (2.53), precum și de faptul că mărimea accelerației tangențiale este  $a_t = \varepsilon R$ , se mai pot scrie următoarele relații scalare:

$$v = R (\omega_0 + \varepsilon t) = v_0 + a_t t \quad (2.69)$$

și

$$s = R \left( \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \right) = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2. \quad (2.70)$$

Din nou semnul lui  $a_t$  este pozitiv sau negativ, după cum mișcarea este uniform accelerată sau uniform încetinită.

## 2.7. MIȘCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ

Mișcarea unui mobil se numește oscilatorie dacă acesta se deplasează în timp de o parte și de alta a unui punct fix, numit poziție de echilibru. În cele ce urmează, ne vom ocupa de mișcarea rectilinie oscilatorie, când această deplasare are loc în lungul unei drepte. În cazul în care distanța ( $y$ ) de la mobilul  $P$  la punctul fix  $O$  (fig. 1.2.13a) variază în timp după legea

$$y = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (2.71)$$

mișcarea se numește *oscilatorie armonică*. Punctul fix  $O$  se mai numește *centru de oscilație*. Distanța  $y = \overline{OP}$  dintre poziția mobilului la un moment dat și punctul  $O$  se numește *elongație* iar depărtarea maximă de centrul de oscilație  $\overline{ON} = \overline{ON'} = A$  se numește *amplitudine* (fig. 1.2.13a). Din (2.71) observăm că  $|y| = A$  la un timp  $t$  pentru care  $\omega t + \varphi = (2k + 1) \pi/2$ .



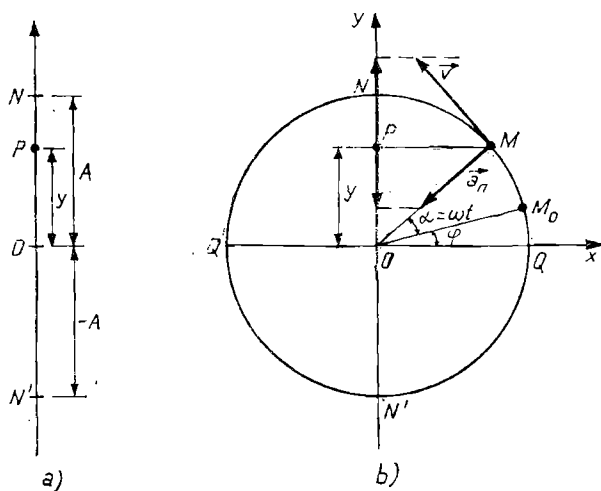


Fig. I.2.13

Pentru a găsi pe cale elementară viteza și accelerația în mișcarea oscilatorie armonică ne folosim de faptul că putem stabili o legătură între ea și mișcarea circulară uniformă. Să considerăm un punct în mișcare circulară uniformă în sens invers ceasornicului (fig. I.2.13b). Alegem axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  în lungul a doi diametri perpendiculari  $Q'Q$  și  $N'N$ . Fie  $P$  piciorul perpendicularei dusă din  $M$  pe  $N'N$ , deci  $\overline{OP}$  reprezintă proiecția razei  $\overline{OM}$  pe axa  $Oy$ . Observăm acum că atunci când  $M$  se mișcă în lungul circumferinței, punctul  $P$  efectuează o mișcare oscilatorie de o parte și de alta a punctului  $O$ . Într-adevăr, când punctul  $M$  parcurge circumferința în sensul  $QNQ'N'Q$ , punctul  $P$  se deplasează pe axa  $Oy$  în sensul  $ONON'O$ , situația repetându-se la fiecare nouă rotație a lui  $M$ . Dacă  $P$  reprezintă un punct material, atunci el va efectua o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, adică depărtarea sa față de poziția de echilibru (elongația), la un moment dat, va fi dată de o relație de tipul (2.71). Din figura I.2.13b observăm că  $y = \overline{OP} = \overline{OM} \cos \widehat{MON} = \overline{OM} \sin \widehat{MOQ}$  și cum  $\angle MOQ = \omega t + \varphi$ , punând  $\overline{OM} = A$  obținem relația (2.71).

Viteza în mișcarea oscilatorie armonică o putem obține ținând seama că viteza cu care se mișcă punctul  $P$  este egală cu proiecția vitezei liniare a punctului  $M$  pe axa  $Oy$ :

$$v_P = v_M \cos \widehat{MOQ} = v_M \cos (\omega t + \varphi).$$

Folosind acum (2.61) în care substituim  $R = \overline{OM} = A$ ,  $v$  devine:

$$v = A\omega \cos (\omega t + \varphi). \quad (2.72)$$

care reprezintă ecuația vitezei în mișcarea oscilatorie armonică.

Accelerația se obține în mod analog proiectând accelerația  $a_n$  corepunzătoare punctului  $M$  pe direcția axei  $Oy$ . Deoarece în mișcarea circulară uni-

formă nu avem decît accelerație normală, proiecția ei pe axa  $Oy$  este:

$$a_p = -a_{nM} \sin(\omega t + \varphi).$$

Cum  $a_n = R\omega^2$ , obținem

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.73)$$

care reprezintă ecuația accelerației în mișcarea oscilatorie armonică. Comparînd (2.73) cu (2.71) obținem o relație între accelerație și elongație:

$$a = -\omega^2 y. \quad (2.74)$$

Această relație ne permite să definim mișcarea oscilatorie armonică ca o mișcare oscilatorie în care accelerația este direct proporțională cu elongația și orientată spre poziția de echilibru.

Să revenim puțin la formulele anterioare pentru a discuta mărimile care apar în argumentul funcțiilor trigonometrice.

Ținînd seama de legătura pe care am stabilit-o cu mișcarea circulară uniformă, mărimea  $\omega$  se numește *pulsația mișcării oscilatorii* sau frecvența circulară. Argumentul  $(\omega t + \varphi)$  se numește *fază*, iar constanta  $\varphi$  — *faza inițială*\*.

Pentru compararea a două mișcări oscilatorii se mai întrebuintează și mărimea denumită *diferență de fază* sau *defazaj*. Să considerăm, de exemplu, două mișcări oscilatorii de aceeași pulsație, însă avînd fazele inițiale diferite,  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ . Diferența de fază va fi

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.75)$$

Dacă  $(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$ , spunem că prima mișcare este în avans de fază față de a doua, iar dacă  $(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$ , este în întîrziere de fază. Cînd  $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ , mișcările sînt în fază, iar cînd  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pi$ , sînt în opoziție de fază.

Relațiile (2.71 — 2.73) (ca și legătura cu mișcarea circulară) ne arată că mișcarea oscilatorie armonică este periodică. *Perioada* mișcării (perioada de oscilație) este intervalul de timp  $T$  după care mișcarea se repetă identic, adică elongația, viteza și accelerația capătă aceeași valoare și sens. Altfel spus, perioada  $T$  reprezintă timpul în care a fost efectuată o oscilație completă.

Din relațiile (2.71 — 2.74) rezultă că trebuie satisfăcute simultan relațiile

$$\sin[\omega(t + T) + \varphi] = \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\cos[\omega(t + T) + \varphi] = \cos(\omega t + \varphi),$$

adică

$$\omega T = 2\pi, \quad (2.76)$$

deoarece atît sinusul cît și cosinusul sînt funcții periodice cu perioada  $2\pi$ . Această relație ne arată că perioada mișcării oscilatorii este egală cu perioada mișcării circulare uniforme a punctului auxiliar  $M$ .

*Frecvența* oscilației ( $\nu$ ) reprezintă numărul de oscilații complete efectuate în unitatea de timp. Cu această definiție obținem aceleași relații ca în mișcarea circulară uniformă:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (2.77)$$

---

\* Reprezintă valoarea fazei la momentul inițial  $t = 0$ .

Frecvența mișcării oscilatorii se măsoară în *hertzi*. Un hertz (Hz) reprezintă frecvența unei oscilații cu perioada de o secundă. Ca unități derivate se folosesc multiplii hertz-ului:

1 kHz (kilohertz) =  $10^3$  Hz, 1 MHz (megahertz) =  $10^6$  Hz,

1 GHz (gigahertz) =  $10^9$  Hz, 1 THz (terahertz) =  $10^{12}$  Hz.

Este uneori comod să reprezentăm mișcarea oscilatorie cu ajutorul unui vector rotitor constant (fig. I.2. 14). Să observăm că în loc de a vorbi de mișcarea punctului auxiliar  $M$  pe circumferința de rază  $\overline{OM} = A$  (fig. I.2. 13b),

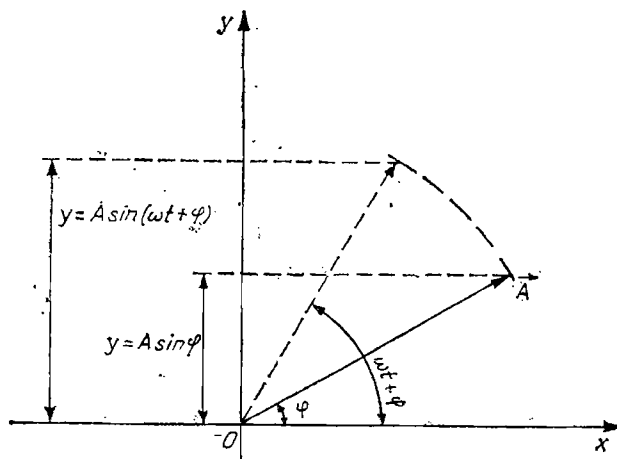


Fig. I.2.14

putem considera rotirea în planul  $xOy$  a vectorului constant  $\vec{A}$  (de lungime egală cu amplitudinea  $A$  în scara aleasă) a cărui proiecție pe axa  $Oy$  dă mărimea elongației în momentul respectiv. Pentru aceasta vom presupune că vectorul  $\vec{A}$  se rotește în sens direct trigonometric cu o viteză unghiulară constantă  $\omega$ , la momentul inițial ( $t = 0$ ) făcând un unghi  $\varphi$  cu axa  $Ox$ . În acest caz proiecția sa pe axa  $Oy$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

este tocmai elongația dată de relația (2.71).

Expresiile vitezei și accelerației în mișcarea oscilatorie pot fi obținute și direct folosind regulile de derivare ale funcțiilor trigonometrice, fără a mai considera mișcarea punctului auxiliar pe circumferință:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Relațiile de mai sus sînt identice cu (2.72) și respectiv (2.73).

Pentru a ne da seama cum sînt legate între ele variațiile în timp ale elongației, vitezei și accelerației mișcării oscilatorii, în tabelă sînt date valorile acestora (conform relațiilor 2.71–2.73) pentru diferite momente de timp, (din sfert în sfert de perioadă) începînd cu  $t = -\frac{\varphi}{2\pi}T$ .

TABELUL I.1.

$t$	$-\frac{\varphi}{2\pi}T$	$(\frac{1}{4} - \frac{\varphi}{2\pi})T$	$(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi})T$	$(\frac{3}{4} - \frac{\varphi}{2\pi})T$	$(1 - \frac{\varphi}{2\pi})T$	$(\frac{5}{4} - \frac{\varphi}{2\pi})T$	$(\frac{3}{2} - \frac{\varphi}{2\pi})T$	eto
$\omega t + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$	
$y$	0	$A$	0	$-A$	0	$A$	0	...
$v$	$\omega A$	0	$-\omega A$	0	$\omega A$	0	$-\omega A$	...
$a$	0	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$	0	

Din tabel rezultă că atunci când mobilul trece prin poziția de echilibru ( $y = 0$ ), viteza sa are valoarea maximă  $|v_{\max}| = \omega A$  iar accelerația este egală cu zero. Invers, când depărtarea de punctul de echilibru este maximă ( $y = A$ ) viteza mobilului este nulă, în timp ce accelerația are valoarea maximă. În fig. I.2. 15 sînt date graficele elongației, vitezei și accelerației în funcție de timp.

În cele discutate pînă acum am presupus implicit că sînt date mărimile  $\omega$ ,  $A$  și  $\varphi$ . În general, cînd se cunoaște frecvența (sau perioada oscilației) și condițiile inițiale (elongația și viteza la momentul  $t = 0$ :  $y_0$  și  $v_0$ ) este posibilă determinarea amplitudinii  $A$  și a fazei inițiale  $\varphi$ . Într-adevăr, luînd  $t = 0$  în (2.71) și (2.72), avem  $y_0 = A \sin \varphi$ ,  $v_0 = A \omega \cos \varphi$ , de unde rezultă

$$y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \text{ sau } A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (2.78)$$

și respectiv

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 \omega}{v_0}. \quad (2.79)$$

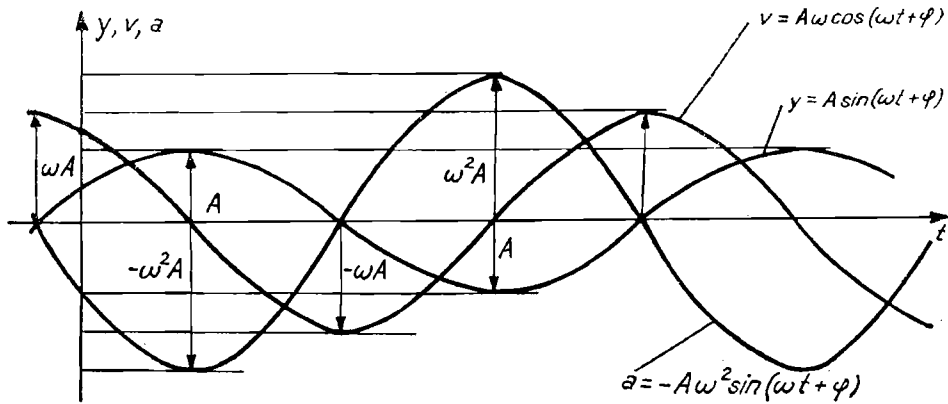


Fig. I.2.15

Ultimele două relații ne dau deci amplitudinea și faza inițială în funcție de elongația și viteza inițială.

Ținând seama de relațiile (2.71) și (2.72), se poate scrie la orice moment o relație de tipul (2.78):

$$y^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2. \quad \text{—}$$

## 2.8. COMPUNEREA MIȘCĂRILOR OSCILATORII

a) **Compunerea a două mișcări oscilatorii care au loc în lungul aceleiași drepte.** În practică, întâlnim de multe ori situația în care un mobil este solicitat concomitent de mai multe mișcări oscilatorii, care pot fi în aceeași direcție sau în direcții diferite. În acest caz, este interesant de găsit mișcarea rezultantă care se obține prin compunerea respectivelor mișcări oscilatorii.

Pentru început vom studia compunerea a două mișcări oscilatorii care au loc în aceeași direcție. Cele două mișcări au aceeași perioadă iar amplitudinile și fazele sînt diferite. Elongațiile sînt date de relațiile

$$y_1 = A_1 \sin (\omega t + \varphi_1), \quad y_2 = A_2 \sin (\omega t + \varphi_2). \quad (2.80)$$

Elongația mișcării rezultante va fi

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin (\omega t + \varphi_2). \quad (2.81)$$

Problema găsirii lui  $y$  se rezolvă comod dacă folosim reprezentarea mișcării oscilatorii cu ajutorul vectorului rotitor. Fie vectorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  corespunzători celor două mișcări oscilatorii componente, care fac, în momentul inițial, unghiurile  $\varphi_1$  și respectiv  $\varphi_2$  cu axa  $Ox$  (fig. I.2.16). Unghiul dintre cei doi vectori va fi  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  și va rămîne același în tot timpul mișcării deoarece ambii vectori se roteesc cu aceeași viteză unghiulară  $\omega$ . Ținînd seama de regulile de adunare ale vectorilor, suma proiecțiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecția vectorului rezultat pe aceeași axă. Aceasta înseamnă că se poate reprezenta mișcarea rezultantă cu ajutorul vectorului  $\vec{A}$  egal cu suma vectorială a vectorilor  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$ . Deoarece unghiul dintre vectorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  nu se modifică în timp, rezultă că paralelogramul  $OA_1MA_2$  rămîne neschimbat în decursul mișcării, rotindu-se doar în planul  $xOy$  cu aceeași viteză unghiulară cu care se roteesc vectorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$ . În concluzie, vectorul  $\vec{A}$  se rotește tot cu viteza unghiulară  $\omega$  și deci mișcarea mobilului va fi tot o mișcare oscilatorie de pulsație  $\omega$ , elongația  $y$  fiind dată de proiecția acestui vector pe axa  $Oy$ , adică

$$y = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (2.82)$$

Să determinăm acum amplitudinea  $A$  și faza inițială  $\varphi$ . Din figura I.2.16 rezultă imediat că

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (2.83)$$

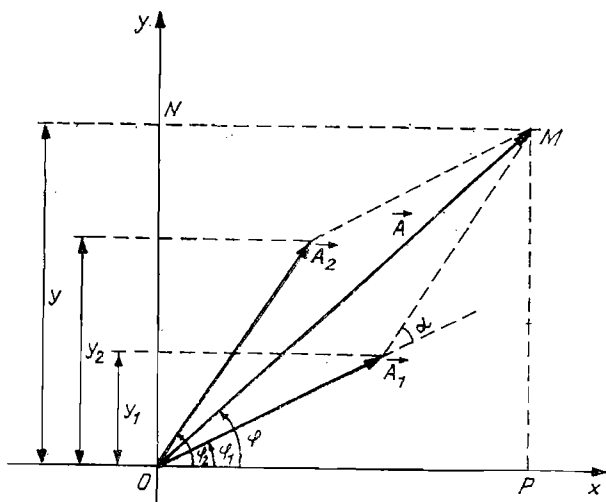


Fig. 1.2.16

unde am făcut din nou apel la faptul că suma proiecțiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecția vectorului rezultat pe aceeași axă.

Amplitudinea  $A$ , adică lungimea vectorului  $\vec{A}$ , ( $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ ), este dată de (vezi fig. 1.2.16):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \alpha.$$

Deoarece în timp unghiul dintre  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  nu se schimbă, se vede imediat din figură că,  $\alpha = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  și deci

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.84)$$

Introducând expresiile lui  $\varphi$  și  $A$  date de relațiile (2.83) și (2.84) în (2.82), obținem elongația mișcării oscilatorii compuse.

Din (2.84) rezultă că amplitudinea mișcării rezultante depinde de diferența de fază dintre mișcările componente. Deoarece funcția cosinus nu ia valori decât între  $+1$  și  $-1$ , amplitudinea are valorile situate între limitele

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2, \quad (2.85)$$

adică amplitudinea rezultantă nu ia valori mai mari decât suma amplitudinilor componente și nici mai mici decât diferența lor (am luat diferența în modul deoarece prin definiție amplitudinea este o mărime pozitivă). Situațiile extreme se obțin pentru  $\Delta\varphi = 0$ , când,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2, \quad A = A_1 + A_2$$

și respectiv pentru  $\Delta\varphi = \pi$ , când

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2, \quad A = |A_1 - A_2|.$$

Din ultima relație rezultă imediat că dacă cele două mișcări componente au aceeași amplitudine ( $A_1 = A_2$ ) și au un defazaj  $\Delta\varphi = \pi$  (sau un multiplu impar de  $\pi$ ) amplitudinea mișcării rezultante este nulă, deci mișcarea dispăre.

Menționăm că relațiile (2.83) și (2.84) se pot obține și pe o altă cale decît cea grafic expusă mai înainte. Pentru aceasta introducem pe  $y$ , dat de (2.82), în membrul stîng al relației (2.81) și dezvoltăm apoi în ambii membrii sinusul sumei a două unghiuri:

$$A [\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi] =$$

$$A_1 [\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1] + A_2 [\sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2].$$

Relația de mai sus este satisfăcută pentru orice  $t$  doar dacă coeficienții lui  $\sin \omega t$ , respectiv  $\cos \omega t$  din cei doi membri sînt egali între ei, adică

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2, A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2.$$

Împărțind cea de a doua relație la prima, obținem relația (2.83), iar prin ridicarea la pătrat și adunînd membru cu membru obținem (2.84).

Să vedem acum ce se întîmplă în cazul în care compunem două oscilații de pulsații diferite ( $\omega_1$  și  $\omega_2$ ). Pentru simplitate vom presupune că fazele inițiale sînt aceleași ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ). Această ipoteză de lucru nu înseamnă o restrîngere a generalității problemei, deoarece, în cazul pulsațiilor diferite, diferența de fază a oscilațiilor componente variază în timp și putem alege ca moment inițial pe acela care corespunde unui defazaj nul. În aceste condiții elongațiile celor două mișcări vor fi:

$$y_1 = A_1 \sin (\omega_1 t + \varphi), y_2 = A_2 \sin (\omega_2 t + \varphi). \quad (2.86)$$

Să presupunem că  $\omega_2 > \omega_1$ . Din punct de vedere practic este interesant cazul în care amplitudinile componente sînt egale ( $A_1 = A_2$ ) iar cele două pulsații sînt foarte apropiate ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ). Vom folosi din nou reprezentarea grafică. În fig. I.2.17 am figurat cei doi vectori  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  (de lungime egală) la un moment  $t$  oarecare, precum și vectorul sumă  $\vec{A}$  a cărui lungime va fi

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \alpha,$$

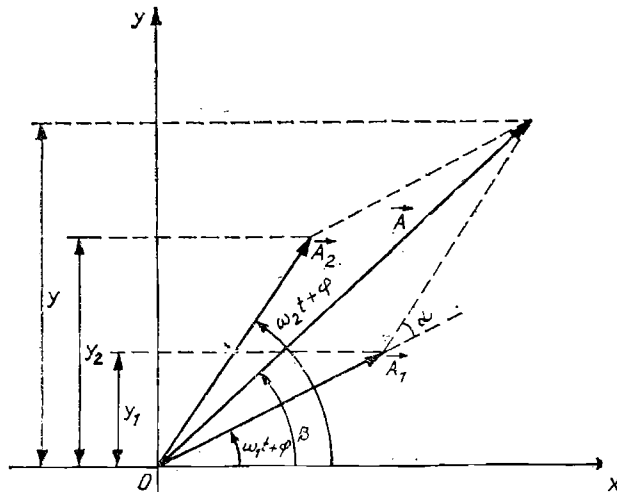


Fig. I.2.17

unde  $\alpha = (\omega_2 t + \varphi) - (\omega_1 t + \varphi) = (\omega_2 - \omega_1) t$ . Cum  $A_1 = A_2$ , rezultă

$$A^2 = 2 A_1^2 [1 + \cos (\omega_2 - \omega_1)t] = 4 A_1^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

și deci

$$A = \left| 2 A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (2.87)$$

Unghiul  $\beta^*$  dintre vectorul  $\vec{A}$  și axa  $Ox$  este egal cu semisuma unghiurilor corespunzătoare vectorilor  $\vec{A}_1$  și respectiv  $\vec{A}_2$  adică

$$\beta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi. \quad (2.88)$$

Rezultă deci că vectorul  $\vec{A}$  se rotește cu o viteză unghiulară egală cu semisuma pulsațiilor oscilațiilor componente. Luând acum proiecția vectorului  $\vec{A}$  pe axa  $Oy$  și folosind relațiile (2.87) și (2.88)) obținem elongația mișcării rezultante:

$$y = \left| 2 A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \sin \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right). \quad (2.89)$$

Observăm că în acest caz, amplitudinea nu numai că depinde de timp, ci, mai mult, este o funcție periodică. Periodicitatea este dictată de funcția  $\left| \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$  și cum perioada valorii absolute a cosinusului este  $\pi$ , rezultă că perioada variației amplitudinii ( $\bar{T}$ ) este

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (2.90)$$

iar frecvența de variație a amplitudinii ( $\bar{\nu}$ ) este

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\bar{T}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1. \quad (2.91)$$

Deci frecvența de variație a amplitudinii mișcării rezultante este egală cu diferența dintre frecvențele oscilațiilor componente. Deoarece am presupus pulsațiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  apropiate, rezultă  $\nu_1 \approx \nu_2$  și deci frecvența de variație  $\bar{\nu}$  a am-

\*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{A_1 [\sin (\omega_1 t + \varphi) + \sin (\omega_2 t + \varphi)]}{A_1 [\cos (\omega_1 t + \varphi) + \cos (\omega_2 t + \varphi)]} = \frac{2 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right)}{2 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right)} = \\ &= \operatorname{tg} \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right). \end{aligned}$$



plitudinii este foarte mică în comparație cu frecvența celui de al doilea factor din (2.89),  $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ . Putem deci considera mișcarea rezultantă ca pe o mișcare oscilatorie de frecvență  $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$  (pulsatie  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ) a cărei ampli-

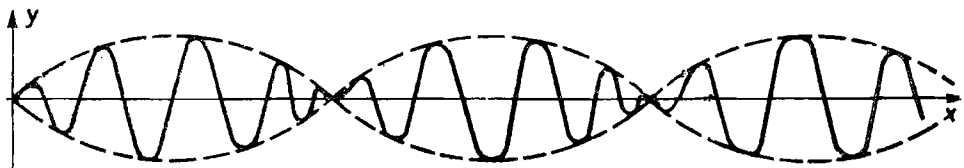


Fig. I.2.18

tudine variază periodic (însă lent) în timp, cu frecvența  $\bar{\nu} = \nu_2 - \nu_1$ . Acest fenomen poartă numele de *bătăi* și este reprezentat grafic (elongația funcție de timp) în fig. I.2.18.

b) **Compunerea a două mișcări oscilatorii care au loc în lungul a două direcții perpendiculare.** Vom presupune că un mobil este supus, în același timp, la două mișcări oscilatorii de perioade egale, perpendiculare între ele. Alegând cele două direcții de oscilații în lungul axelor  $Ox$  și  $Oy$ , elongațiile mișcărilor componente vor fi

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (2.92)$$

Pentru a găsi traiectoria trebuie să eliminăm timpul între cele două ecuații (2.92). Pentru aceasta le scriem sub forma

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1, \quad (2.93)$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2.$$

Înmulțind pe cea de a doua cu  $\sin \varphi_1$  și scăzând-o din prima ecuație înmulțită cu  $\sin \varphi_2$  obținem

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Înmulțind acum a doua cu  $\cos \varphi_1$  și scăzând-o din prima înmulțită cu  $\cos \varphi_2$  obținem

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = -\cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

În sfârșit, ecuația traiectoriei rezultă ridicând la pătrat ultimele două relații și adunându-le membru cu membru:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.94)$$

sau

$$y = \frac{A_2}{A_1} [x \cos (\varphi_2 - \varphi_1) \pm \sqrt{A_1^2 - x^2} \sin (\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (2.94')$$

Curba dată de ecuația (2.94) reprezintă, în general, o elipsă ai cărei parametri depind de diferența de fază  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Pentru a ne da seama mai bine de această dependență să considerăm câteva cazuri particulare.

1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  sau  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$ . În acest caz, din (2.94') obținem ecuația unei drepte

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

adică mișcarea are loc în lungul unei drepte care trece prin origine și face cu axa  $Ox$  un unghi a cărui tangentă este egală cu  $A_2/A_1$  (fig.I.2.19 a). Deoarece depărtarea mobilului față de origine va fi

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \frac{A_2^2}{A_1^2}} x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin (\omega t + \varphi_1),$$

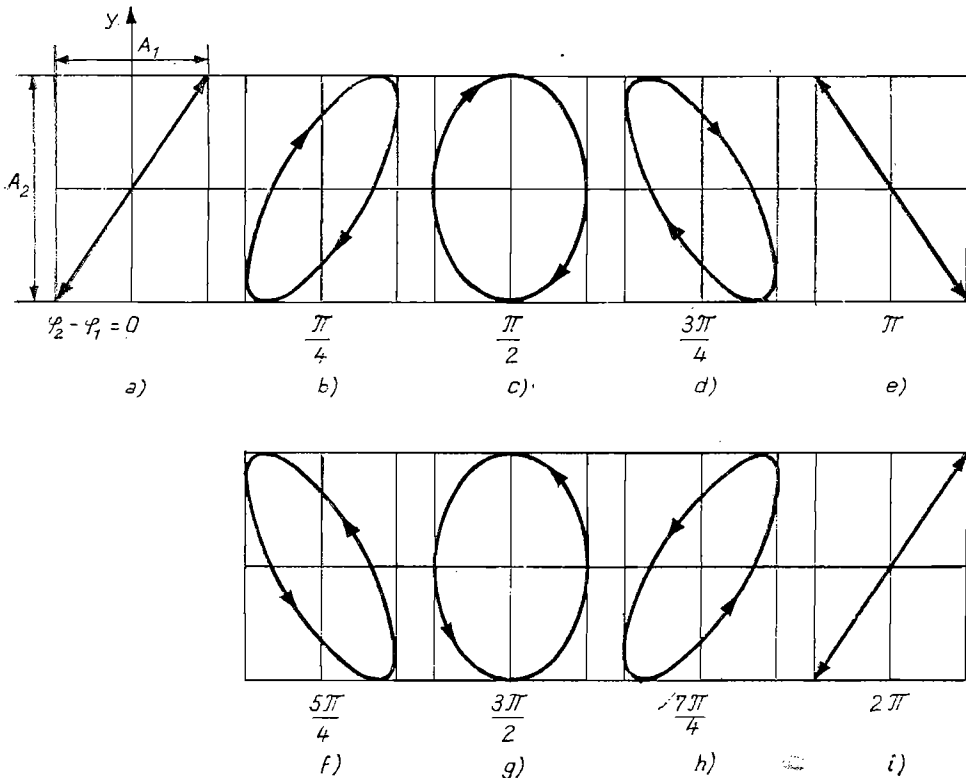


Fig. 1.2.19

rezultă că mobilul efectuează o mișcare oscilatorie armonică, liniară, de amplitudine  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  și pulsație  $\omega$  (egală cu cea a oscilațiilor componente).

2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ . În acest caz obținem ecuația

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x,$$

care corespunde unei oscilații armonice liniare în lungul unei drepte care face cu axa  $Ox$  un unghi de tangentă  $(-A_2/A_1)$ , de aceeași amplitudine și perioadă ca în cazul anterior (fig. I. 2.19e)

3)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  sau  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$ . Din relația (2.94) obținem expresia

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

care este ecuația unei elipse de semiaxe  $A_1$  și respectiv  $A_2$  (fig. I.2.19 c și g). Dacă amplitudinile celor două oscilații sînt egale,  $A_1 = A_2 = A$ , atunci traiectoria va fi un cerc de rază  $A$ . Situația cu  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$  se deosebește de cea cu  $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$  prin sensul de parcurgere al traiectoriei:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), y = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Să presupunem acum că la un anumit moment  $y = 0$  și  $x = A_1$ ; în momentul următor argumentul sinusului crește (deoarece  $t$  crește) și  $x$  rămîne pozitiv, dar  $y$  devine negativ, ceea ce înseamnă că mobilul se mișcă în sensul acelor unui ceasornic. Același raționament pentru  $\varphi_2 = \varphi_1 + 3\pi/2$  ne conduce la concluzia că mobilul se mișcă în sens invers acelor de ceasornic (fig. I. 2.19 c și g).

În toate celelalte cazuri (cu  $\varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ ) obținem din nou traiectorii eliptice, însă axele elipselor respective nu vor mai fi dirijate în lungul celor două axe de coordonate. Mișcarea care se obține pentru cazul  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$

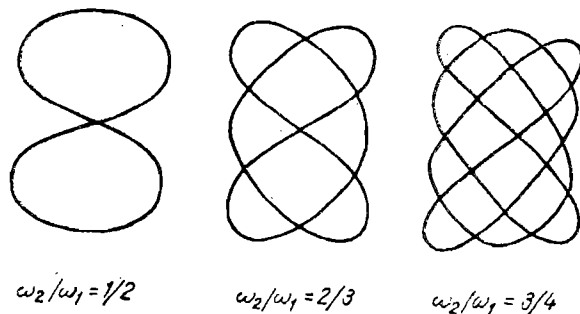


Fig. 1.2.20

și respectiv  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi - \Delta\varphi$  va avea loc în lungul unor elipse de aceeași semiaxe și va diferi doar prin sensul de parcurgere al traiectoriei. În figura I.2.19 sînt reprezentate grafic traiectoriile obținute pentru unele valori particulare ale lui  $\varphi_2 - \varphi_1$ .

Ar trebui acum să vedem ce se întîmplă în cazul mai general, cînd mobilul este supus la două oscilații perpendiculare însă de pulsații neegale. În acest caz, după calcule ceva mai laborioase se obțin traiectorii de o formă mai complicată care în general nu mai sînt curbe închise. Pentru ca traiectoria să fie o curbă închisă trebuie ca  $\omega_2/\omega_1$  să fie rațional ( $\omega_2/\omega_1 = n_2/n_1$ , unde  $n_2$  și  $n_1$  sînt numere întregi). Curbele care se obțin în cazul în care este îndeplinită această condiție se numesc *figurile Lissajous*. În figura I.2.20 am reprezentat traiectoriile pentru cîteva valori particulare ale raportului  $\omega_2/\omega_1$ .

Menționăm că în cazul  $\omega_2/\omega_1 \neq n_2/n_1$  curba fiind deschisă mobilul nu va mai trece prin poziția  $P$  prin care a trecut la un moment  $t$ . Se poate demonstra însă, că după un timp suficient de lung el poate trece oricît de aproape de această poziție.

### 3. *Dinamica*

În capitolul precedent am studiat diferite tipuri de mișcare mecanică și am stabilit ecuațiile de mișcare corespunzătoare fără a explica de ce un mobil execută o anumită mișcare mecanică sau de ce aceasta poate fi schimbată.

Dinamica este acel capitol al mecanicii care studiază cauzele ce determină sau modifică mișcarea corpurilor. În prima parte a expunerii noastre vom prezenta principiile mecanicii așa cum au fost ele enunțate de Newton.

#### 3.1. PRIMUL PRINCIPIU AL MECANICII: PRINCIPIUL INERȚIEI

Pe baza unor observații simple pot fi trase câteva concluzii deosebit de importante. Astfel, dacă asupra unui corp aflat în repaus nu se exercită acțiunea altor corpuri, vom constata că această stare se menține. De asemenea, dacă lansăm o bilă pe un plan orizontal vom constata că traiectoria acesteia va fi rectilinie și că mișcarea sa în intervale de timp nu prea mari va fi cu atât mai asemănătoare cu o mișcare uniformă cu cât suprafețele care vin în contact sînt mai bine șlefuite. Bila se va opri la un moment dat, deoarece pe lîngă rezistența aerului, în regiunea suprafețelor ce vin în contact apar interacțiuni care se opun mișcării și care nu pot fi înlăturate oricît de bine șlefuite ar fi suprafețele. Pe bună dreptate vom admite că toate acestea pot fi considerate drept cauze exterioare care influențează mișcarea bilei. Admitem astfel că mișcarea bilei ar fi rămas rectilinie și uniformă dacă am fi putut elimina complet aceste cauze exterioare. Discuția anterioară ne permite acum să enunțăm prima lege a mecanicii sau principiul inerției în modul următor:

— Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atîta timp cît asupra sa nu se exercită acțiunea altor corpuri.

Prin *inerție* se înțelege tendința corpurilor de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă. Inerția este o proprietate importantă, comună tuturor corpurilor din univers.

Experiența arată că există sisteme de referință în care principiul inerției nu se verifică. Deoarece asupra acestui lucru vom mai reveni ulterior, ne vom limita, deocamdată, la câteva exemple.

Să considerăm o sferă în repaus pe podeaua plană a unui vehicul care se mișcă rectiliniu și uniform. Vom constata că sfera păstrează starea de repaus

în raport cu vehiculul, adică principiul inerției este satisfăcut în sistemul de referință constituit chiar de vehicul. Atunci când vehiculul cotește, sau oprește brusc, vom observa că sfera va părăsi starea de repaus în raport cu mobilul, fără ca aparent să fi suferit vreo acțiune din partea altor corpuri. În această situație constatăm deci că, în sistemul de referință de mai sus, apar abateri de la prima lege a lui Newton.

O situație analogă apare și dacă considerăm ca sistem de referință globul pământesc. Efectuând observații asupra unui corp ce se mișcă rectiliniu și uniform față de suprafața Pământului, se pot pune în evidență și în acest caz abateri de la principiul inerției, care se datoresc rotației diurne a Pământului. Deoarece în multe cazuri aceste abateri sînt neimportante (devierea de la traiectoria rectilinie este neglijabilă) putem presupune că principiul inerției este aproximativ satisfăcut în sistemul de referință constituit de globul terestru. Datorită faptului că toate planetele din sistemul nostru solar efectuează, ca și Pământul, mișcări de rotație în jurul unei axe proprii, fără îndoială că am ajunge la aceleași rezultate dacă am avea posibilitatea să repetăm observațiile noastre chiar în sistemul de referință constituit de respectivele planete. Nici în sistemul de referință al Soarelui principiul inerției nu este exact satisfăcut, deoarece nici Soarele nu este în repaus, ci are o mișcare complicată în cadrul galaxiei noastre. Ajungem astfel la o situație aparent paradoxală: *prima lege a lui Newton*, care nu poate fi obținută direct pe cale experimentală ci rezultă pe baza generalizării experimentale, nu este de fapt verificată exact în nici un sistem de referință! Trebuie însă spus de la bun început că această situație apare nu datorită faptului că principiul inerției nu ar fi valabil, ci pentru că toate corpurile luate ca sisteme de referință sînt supuse unor acțiuni din partea altor corpuri, ceea ce conduce la efecte suplimentare, care nu pot fi evitate. Efectele suplimentare produc abaterile de la implicațiile principiului inerției. Din acest motiv, în loc să vorbim despre abateri de la principiul inerției este mai corect să vorbim despre abateri de la implicațiile ce decurg *numai* din principiul inerției.

Sistemul de referință în raport cu care principiul inerției este exact satisfăcut se numește *sistem inerțial*.

Toate sistemele de referință ce se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu un sistem inerțial sînt de asemenea sisteme inerțiale. Un sistem aflat într-o mișcare accelerată în raport cu un sistem inerțial este un sistem neinerțial. Din cele spuse mai înainte rezultă că în natură nu există sisteme inerțiale.

### 3.2. PRINCIPIUL AL DOILEA AL MECANICII

Dacă asupra unui corp se exercită o acțiune din partea altor corpuri, acesta poate fi scos din starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă. Spunem atunci că starea sa de mișcare a fost schimbată, înțelegînd prin aceasta că viteza lui s-a modificat, corpul căpătînd deci o accelerație.

Caenza care modifică starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă a unui corp se numește *forță*.

Deoarece prezența unei forțe conduce la apariția unei accelerații, care este o mărime vectorială, rezultă că și forța trebuie să fie un vector de aceeași direcție și sens cu accelerația pe care o produce.

Să considerăm, spre exemplu, un corp în repaus al cărui centru de simetrie se găsește la o înălțime  $h$  deasupra Pământului (fig. I.3.1a). Lăsat să cadă liber, corpul va începe să se miște accelerat, ceea ce înseamnă că asupra lui acționează o forță pe care o numim forța de greutate.

Pentru determinarea experimentală a caracteristicilor mișcării măsurăm spațiul  $s$  străbătut de mobil. Vom constata că acesta este proporțional cu pătratul timpului:

$$s = K_1 t^2. \quad (3.1)$$

Măsurînd apoi viteza  $v$  la diferite momente de timp, vom trage concluzia că aceasta este proporțională cu intervalul de timp scurs de la începutul mișcării, adică:

$$v = C_1 t. \quad (3.2)$$

Cercetînd ecuațiile de mișcare stabilite în capitolul precedent, constatăm că mișcării uniform accelerate îi este proprie o asemenea dependență de timp a spațiului și vitezei. Identificînd relația (3.1) cu (2.33) și (3.2) cu (2.36), tragem concluzia că  $C_1$  este chiar accelerația mișcării, iar  $K_1$  este jumătate din aceasta.

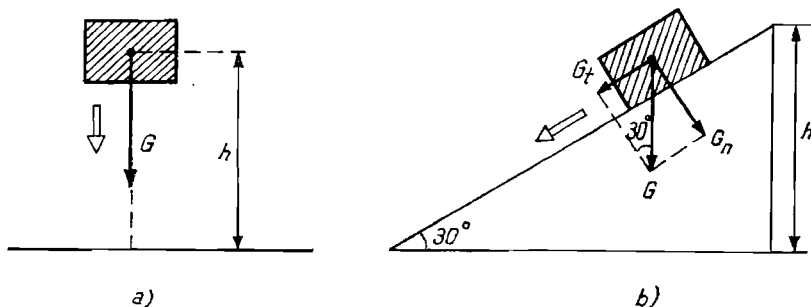


Fig. I.3.1

Să considerăm acum că același corp este lăsat liber pe un plan înclinat cu un unghi de  $30^\circ$  față de orizontală (fig. I.3.1b) și să presupunem că toate cauzele ce se opun mișcării (rezistența aerului, interacțiunea suprafețelor ce vin în contact) sînt neglijabile. Înarmîndu-ne din nou cu o riglă și un cronometru, determinăm spațiul străbătut după o secundă de la începerea mișcării, după două secunde, etc. simultan cu vitezele după aceleași intervale de timp. Vom găsi ecuații de mișcare tot de tipul mișcării uniform accelerate, însă cu alte constante  $C_2$  și  $K_2$ :  $s = K_2 t^2$  și respectiv  $v = C_2 t$ .

Prin urmare, pe planul înclinat vom avea tot o mișcare uniform accelerată dar cu altă accelerație decît în cazul căderii libere. Măsurînd vitezele după o secundă de la începerea mișcării, atît în cazul căderii libere cît și în cazul mișcării pe planul înclinat, ajungem să determinăm constantele  $C_1$  și  $C_2$ , adică accelerațiile celor două mișcări. Vom găsi pentru experimentul de mai sus că  $C_1 = 2C_2$ , adică accelerația în căderea liberă este de două ori mai mare decît în cazul mișcării pe planul înclinat cu  $30^\circ$  față de orizontală. Deoarece același corp a căpătat accelerații diferite, este logic să presupunem că mișcarea lui s-a efectuat sub acțiunea unor forțe diferite care trebuie conside-

rate cu atât mai mari, cu cât sînt mai mari accelerațiile căpătate de corp. După cum am văzut, în cazul căderii libere, asupra corpului acționează greutatea  $G$  care imprimă accelerația constantă  $C_1$ . Să evaluăm acum care este forța ce acționează asupra aceluiași corp în lungul planului înclinat. Descompunînd greutatea  $G$  după două componente, conform regulilor de calcul vectorial (fig. I.3.1b) și remarcînd că componenta normală pe plan,  $G_n = G \cos 30^\circ$  este compensată de rigiditatea suprafeței de sprijin, observăm că rămîne o singură componentă activă de valoare  $G_t = G \sin 30^\circ$ , adică  $\frac{G}{2}$ . Această componentă paralelă cu suprafața planului imprimă corpului o accelerație  $C_2 = \frac{C_1}{2}$ , de unde rezultă că accelerațiile căpătate de corp sînt proporționale cu forțele care acționează asupra corpului.

Este evident că se pot imagina și alte experiențe, în care asupra aceluiași corp să acționeze pe rînd forțe diferite, de altă natură decît cele de greutate, în care să determinăm accelerațiile corespunzătoare și să constatăm că acestea sînt proporționale cu forțele care le-au produs. Vom admite întotdeauna că forța  $F$  care acționează asupra corpului considerat este proporțională cu accelerația pe care o capătă corpul respectiv:

$$F = Ka, \quad (3.3)$$

unde  $K$  este un factor de proporționalitate caracteristic fiecărui corp, care trebuie precizat. Înainte de a face aceasta, să amintim că accelerația și forța sînt mărimi vectoriale, relația (3.3) va fi scrisă sub formă vectorială:

$$\vec{F} = K\vec{a}. \quad (3.4)$$

Relația (3.3) ne permite să comparăm între ele forțele ce acționează asupra unui corp dat, prin mărimea accelerației comunicate corpului de fiecare forță în parte.

Experiența ne arată că dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, fiecare în parte produce același efect ca și cînd ar acționa singură, adică produce aceeași accelerație ca și cum celelalte forțe nu ar fi prezente. Această afirmație, deosebit de importantă, este cunoscută sub denumirea de principiul suprapunerii efectelor sau *principiul superpoziției*. Să presupunem că asupra unui corp acționează un sistem de  $m$  forțe:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$ . Accelerațiile imprimate de ele sînt:  $\vec{a}_1 = \vec{F}_1/K, \vec{a}_2 = \vec{F}_2/K, \dots, \vec{a}_m = \vec{F}_m/K$ .

Conform regulilor de compunere vectorială, accelerația totală  $\vec{a}$  va fi dată de relația  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m$ , care devine:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{K} + \frac{\vec{F}_2}{K} + \dots + \frac{\vec{F}_m}{K} = \frac{1}{K} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m).$$

Suma  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m$  o interpretăm ca fiind forța rezultantă a sistemului de forțe  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m)$ . Atunci

$$\vec{a} = \frac{1}{K} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m) = \frac{1}{K} \vec{F}.$$



Ultima relație ne arată că accelerația totală, ce se obține ca suma vectorială a tuturor accelerațiilor date de fiecare forță în parte, este egală cu accelerația pe care ar primi-o corpul sub acțiunea unei singure forțe egală cu suma vectorială a tuturor forțelor date.

Să trecem acum la interpretarea factorului de proporționalitate  $K$ , ce figurează în relația (3.3). Pentru aceasta să presupunem că acționăm cu o forță  $F$  asupra mai multor corpuri diferite și să le determinăm accelerațiile imprimare. Deoarece forța care acționează este aceeași, direcțiile și sensurile de deplasare vor fi aceleași pentru toate corpurile. Vor fi diferite așadar, numai mărimile accelerațiilor. În general, constatăm că sub acțiunea unor forțe egale, corpuri diferite capătă accelerații de mărimi diferite, ceea ce ne arată că accelerațiile imprimate depind nu numai de forțele ce acționează asupra corpurilor, dar și de proprietățile lor individuale, ce se exprimă prin intermediul constantei  $K$ . Sub acțiunea unei forțe date  $F$  corpul are o accelerație mai mare sau mai mică, după cum  $K$  este mai mic sau mai mare, adică abaterea de la starea de repaus sau mișcare rectilinie și uniformă este cu atât mai mare cu cât constanta  $K$  este mai mică și invers. În acest sens se spune că mărimea constantă  $K$  este o măsură a inerției corpului. Această mărime fizică deosebit de importantă a primit denumirea de *masă* și o vom nota de-acum înainte cu  $m$ .

Relațiile (3.3) și (3.4) devin acum

$$F = ma \text{ sau } \vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.5)$$

Relația (3.5) reprezintă de fapt formularea matematică a celui de al doilea principiu al mecanicii ce poate fi enunțat astfel: *accelerația imprimată unui corp de masă dată este direct proporțională cu forța care acționează asupra corpului*. Deoarece masa  $m$  astfel definită este o măsură a inerției corpurilor, ea se mai numește și *masă inerțială*.

O altă mărime fizică importantă este vectorul impuls  $\vec{p}$  care, prin definiție, este

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.6)$$

unde  $\vec{v}$  este viteza corpului de masă  $m$ .

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (3.6) obținem

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}). \quad (3.7)$$

Dacă  $m$  este constantă, așa cum se presupune în mecanica newtoniană, expresia (3.7) devine

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (3.8)$$

Având în vedere (3.5), obținem

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.9)$$

adică variația în timp a impulsului este întotdeauna produsă de existența unei forțe, iar mărimea acesteia este egală cu forța care a provocat-o. După cum se vede, dacă masa  $m$  este o constantă, relațiile (3.5) și (3.9) sînt perfect echivalente, fiecare obținându-se din cealaltă. Din acest motiv, al doilea, principiu al mecanicii poate fi enunțat și conform relației (3.9): *forța este derivata de ordinul întâi a impulsului în raport cu timpul*. Merită de menționat faptul că Newton a formulat al doilea principiu sub o formă echivalentă relației (3.9).

Dacă masa  $m$  a corpului nu este constantă, relațiile (3.5) și (3.9) nu mai sînt echivalente, una dintre ele fiind sigur incorectă. Fără a intra în detalii aici (vezi § 3.15), vom menționa doar că relația (3.9) constituie formularea matematică corectă a principiului al doilea al mecanicii.

În cele ce urmează vom presupune că masa  $m$  a corpului este constantă, așa că vom utiliza și relația (3.5) și relația (3.9), după cum ne este mai convenabil. În situațiile în care masa variază, vom menționa acest lucru în mod explicit și vom utiliza în calcule doar ecuația (3.9).

Ca unitate de masă în SI se ia masa unui corp de platină iridiată care se păstrează la Biroul Internațional de Măsură și Greutăți de la Sèvres, care a fost numită kilogram (kg). Masa unui volum de  $1 \text{ dm}^3$  de apă distilată ce are temperatura de  $4^\circ\text{C}$  are o valoare de aproximativ 1 kg. Unitatea de masă în sistemul CGS este gramul (g). Prin definiție  $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ .

Unitățile de măsură pentru masă sînt unități fundamentale în sistemele CGS și SI. Cu ajutorul lor sînt definite unitățile de forță în cele două sisteme.

Unitatea de forță în sistemul CGS se numește dynă (dyn) și reprezintă forța care acționînd asupra masei de 1 g îi imprimă o accelerație de  $1 \text{ cm/s}^2$ :

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm/s}^2 = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2.$$

Unitatea de forță în sistemul SI se numește newton (N) și reprezintă forța care acționînd asupra masei de 1 kg îi imprimă o accelerație de  $1 \text{ m/s}^2$ :

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 10^3 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyn}.$$

Se mai folosesc încă unități ale sistemului tehnic în care se aleg ca mărimi fundamentale lungimea (1 m), timpul (1 s) și forța. Forța cu care Pămîntul atrage un corp cu masa de 1 kg, la nivelul mării și latitudinea de  $45^\circ$ , se numește kilogram-forță (kgf) și se alege ca unitate fundamentală în sistemul tehnic.

Din definiție rezultă

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9,8 \text{ N}.$$

### 3.3. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII MECANICE, AL LUI GALILEI

Pentru a caracteriza mișcarea unui corp sîntem obligați să considerăm un alt corp drept sistem de referință, față de care să raportăm mișcarea primului. Pe lângă sistemul de referință se introduce un sistem de coordonate, așa cum se procedează în geometria analitică. Vom considera că sistemul de coordonate este solidar legat de unul din corpuri. În acest caz, coordonatele tuturor punctelor celuilalt corp vor determina pe deplin poziția relativă a acestuia față de corpul căruia i-am atașat sistemul de coordonate.

Să considerăm un sistem de referință inerțial  $S$  și un sistem de coordonate cu originea în  $O$ , solidar legat de el.

Să presupunem acum că un al doilea sistem de referință  $S'$  de care este atașat sistemul de coordonate  $O'x'y'z'$  se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza  $\vec{V}$  față de  $S$ . Pentru simplificarea discuției, cele două sisteme de coordonate  $Oxyz$  și  $O'x'y'z'$  se aleg cu axele  $Oy$  și  $Oz$  paralele între ele iar direcția și sensul lui  $Ox$  și  $O'x'$  se aleg după direcția și sensul vitezei  $\vec{V}$  (fig. I.3.2). Alegem ca origine a timpului în ambele sisteme ( $t = t' = 0$ ) momentul în care  $O$  coincide cu  $O'$ .

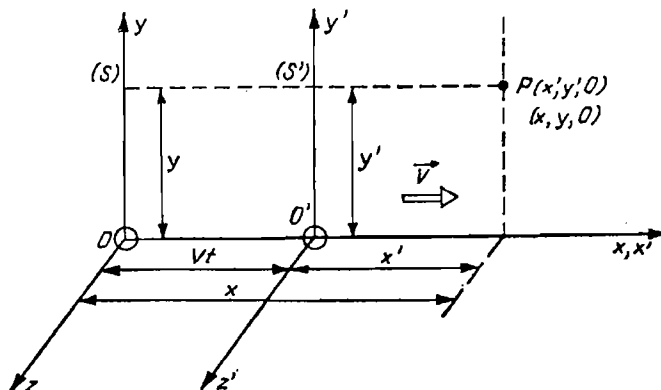


Fig. I.3.2

În experiența noastră un observator din sistemul  $S$  care urmărește un anumit fenomen fizic constată că acesta se desfășoară în  $t$  secunde. Un alt observator din  $S'$  urmărind același fenomen, măsoară o durată de  $t'$  secunde. Ne punem întrebarea dacă cele două intervale de timp sînt sau nu egale, ceea ce revine la a ști dacă timpul se scurge în același mod în cele două sisteme de referință deoarece scurgerea timpului nu poate fi apreciată decît urmărind evoluția unui anumit fenomen. Astfel, cînd privim cadranul unui ceas și afirmăm că au trecut 5 minute nu facem altceva decît să urmărim fenomenul deplasării acelor ceasornicului datorită destinderii unui resort. Ne vom imagina o experiență simplă care să ne permită compararea intervalelor de timp în cele două sisteme.

Să distribuim un număr de ceasuri în sistemul  $S$  în lungul axei  $Ox$  (fig. I.3.3.a). Să presupunem că o dată cu sistemul mobil  $S'$  un alt ceas trece prin fața ceasurilor din  $S$ . Potrivim ceasurile astfel ca la momentul inițial toate ceasurile să arate aceeași oră. Comparăm apoi ceasul din  $S'$  cu cel de-al doilea ceas din  $S$  pe lîngă care trece (fig. I.3.3 b) și ne convingem că indicațiile lor coincid.

Experiența ne arată deci că timpul se scurge la fel în ambele sisteme, adică  $t = t'$ .

Să considerăm, pentru simplitate, un punct  $P$  din planul  $O'x'y'$  a cărui coordonată  $z'$  este nulă, celelalte două coordonate fiind  $x'$  și  $y'$ . Coordonatele  $x, y, z$  ale unui punct, în sistemul  $S$ , pot fi scrise în funcție de coordonatele  $x', y', z'$  din sistemul  $S'$ . Din figura I.3.2 pot fi deduse imediat relațiile următoare:

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z' = 0 \quad (3.10)$$

deoarece  $OO' = Vt$  (la momentul  $t = 0, O$  și  $O'$  coincid).

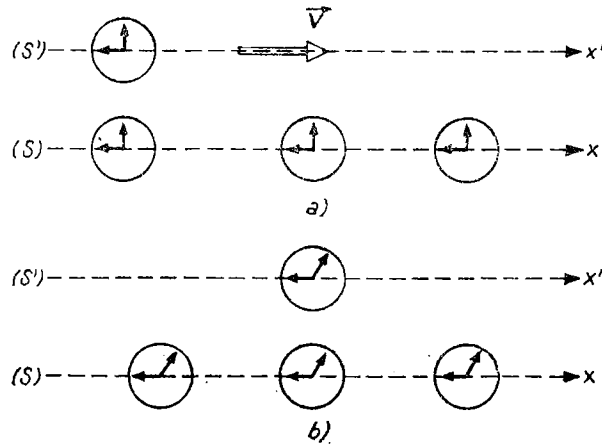


Fig. 1.3.3

Pentru un punct material  $P$  de coordonate  $x', y', z'$  am fi obținut în mod analog relațiile

$$x = x' + Vt; \quad y = y'; \quad z = z'. \quad (3.11)$$

Ecuațiile (3.11) reprezintă relațiile de transformare a coordonatelor la trecerea de la sistemul de referință  $S'$  la sistemul  $S$ . Adăugând acestora și relația  $t = t'$  obținem așa numita transformare a lui Galilei, care permite trecerea de la un sistem de referință la altul,

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt, & x' &= x - Vt, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= t', & t' &= t. \end{aligned} \quad \text{sau} \quad (3.12)$$

Sîntem acum în măsură să evaluăm vitezele  $\vec{v}$  și  $\vec{v}'$  ale punctului material  $P$  în cele două sisteme de referință:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V = v_x - V, \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = v_y, \\ v_z &= \frac{dz}{dt}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = v_z, \end{aligned} \quad (3.13)$$

unde am avut în vedere faptul că  $V$  este constant și că  $dt' = dt$ ,  $dy' = dy$ ,  $dz' = dz$  conform transformării lui Galilei. Ținînd seama că  $\vec{V}$  este dirijat în lungul axei  $Ox$ , relațiile (3.13) pot fi scrise sub formă vectorială astfel:

$$\vec{v}_x = \vec{v}_x - \vec{V}, \quad \vec{v}_y = \vec{v}_y, \quad \vec{v}_z = \vec{v}_z. \quad (3.14)$$

deci

$$\vec{v}' = \vec{v}'_x + \vec{v}'_y + \vec{v}'_z = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z - \vec{V}$$

de unde rezultă:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \text{ sau } \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (3.15)$$

Se vede că dacă în sistemul inerțial  $S$  punctul material se mișcă rectiliniu și uniform, cu  $\vec{v}$  constant, rezultă că și în sistemul  $S'$  mișcarea punctului material va fi de același tip însă cu viteza  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ . Demonstrația de mai sus ne permite să tragem concluzia că orice sistem ce se mișcă rectiliniu și uniform față de un anumit sistem inerțial este de asemenea un sistem inerțial.

Să vedem acum ce se întâmplă în sistemul inerțial  $S'$  dacă punctul material se mișcă accelerat în sistemul inerțial  $S$  cu  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Pentru aceasta să derivăm relația (3.15) în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}.$$

Dar termenul  $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'}$  nu este altceva decât accelerația  $\vec{a}'$  a punctului material în sistemul inerțial  $S'$ :

$$\vec{a}' = \vec{a}. \quad (3.16)$$

Prin urmare, pentru același corp accelerațiile sînt egale în sisteme inerțiale diferite. Conform legii a doua a mecanicii rezultă că sînt egale între ele și forțele care acționează asupra aceluiasi corp în cele două sisteme inerțiale. Dacă, spre exemplu, vrem să imprimăm o anumită accelerație unui corp ce se găsește într-un vehicul, trebuie să acționăm cu aceeași forță, indiferent că vehiculul este în repaus sau se mișcă rectiliniu și uniform. Deducem de aici că nu se poate concepe o experiență mecanică care să permită unui observator situat în interiorul unui sistem inerțial să determine viteza sistemului. Cu alte cuvinte, *prin nici o experiență mecanică, efectuată în interiorul unui sistem inerțial, nu se poate pune în evidență starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă a acestuia*. Acesta este principiul relativității enunțat de Galilei sau principiul mecanic al relativității.

Să analizăm pe scurt în ce măsură este verificat acest principiu pe Pămînt. La prima vedere, problema aceasta pare absurdă fiind evident pentru oricine că datorită mișcării de rotație în jurul axei sale cît și mișcării de revoluție în jurul Soarelui, planeta noastră nu constituie un sistem inerțial. Este totuși posibil să considerăm Pămîntul ca un sistem inerțial. Într-adevăr, în mișcarea de rotație, viteza liniară a Pămîntului la ecuator este doar de 464 m/s, iar raza Pămîntului este  $R = 6370$  km; rezultă că viteza unghiulară  $\omega = V/R$  este destul de mică (cca  $0,73 \cdot 10^{-4}$  rad/s). Din această cauză pentru un interval de timp nu prea mare (de ordinul minutilor) putem asimila arcul

de cerc, după care se mișcă un punct de pe suprafața globului, cu o dreaptă, așa încît se poate considera cu bună aproximație că respectivul punct se mișcă rectiliniu și uniform. Mișcarea de revoluție, deși viteza liniară este mult mai mare decît cea precedentă ( $v \simeq 30$  km/s), poate fi aproximată și mai bine cu o mișcare rectilinie și uniformă chiar pe durata unei zile terestre deoarece orbita Pămîntului are o curbura mică în orice punct al său din cauza perimetrului enorm de sute de milioane de km. Pentru un interval de timp de ordinul minutelor putem considera deci, cu bună aproximație, că Pămîntul este un sistem inerțial ce se mișcă cu viteza uriașă de 30 km/s. Credem că acum se înțelege afirmația că principiul relativității mecanice este verificat pe Pămînt, deoarece nici o ființă ce se mișcă, sau se află în repaus față de sol, nu simte că în tot acest timp participă la o mișcare cu o viteză de aproape 30 km/s.

### 3.4. PRINCIPIUL AL TREILEA AL MECANICII

Al treilea principiu al mecanicii, numit și principiul acțiunii și reacțiunii, afirmă că dacă un corp acționează cu o anumită forță asupra altui corp, acesta din urmă acționează, la rîndul său, asupra primului cu o forță egală și de sens contrar. Acțiunile dintre corpuri sînt deci întotdeauna reciproce. Valabilitatea acestui principiu poate fi verificată prin multe experiențe. Spre exemplu, dacă un amator de canotaj s-a apropiat prea mult cu barca de malul unui lac, pentru a se îndepărta el va împinge cu vîsla în mal, acționînd deci

asupra malului cu o forță  $\vec{F}$  (fig. I.3.4). Barca va începe să se miște spre larg, prin urmare, asupra sistemului om + barcă acționează o forță de reacțiune dirijată în sens contrar forței  $\vec{F}$ . Pentru a afirma că forța de reacțiune este chiar  $(-\vec{F})$  trebuie să măsurăm forța  $\vec{F}$  de împingere și să determinăm accelerația  $\vec{a}$  pe care o capătă sistemul om + barcă, cunoscînd masa  $m$  a acestuia.

Dacă facem toate acestea vom constata experimental că  $\vec{F} = -m\vec{a}$ . Cum forța aplicată sistemului, care este tocmai forța de reacțiune, este egală cu

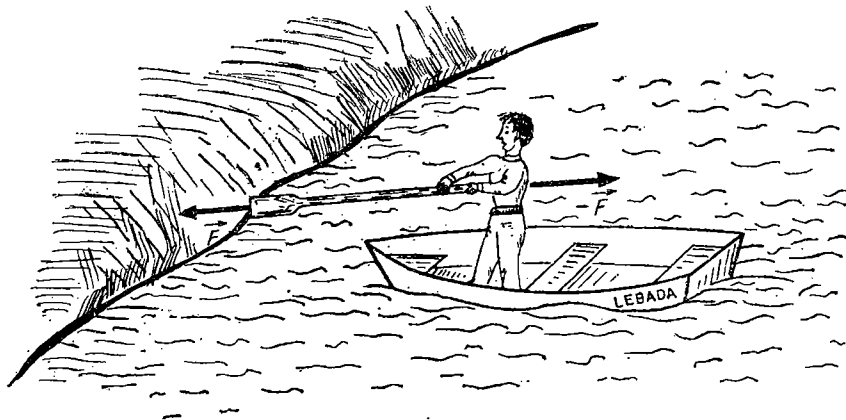


Fig. I.3.4

$\vec{m}\vec{a}$  rezultă că forța de reacțiune este chiar  $(-\vec{F})$  adică așa cum afirmă principiul al treilea. Este clar că accelerația  $\vec{a}'$  pe care o capătă malul datorită forței  $\vec{F}$  reprezintă de fapt accelerația pe care o capătă întreg globul terestru (malul fiind solidar legat de globul pământesc) sub acțiunea forței  $\vec{F}$ . Desigur că accelerația  $\vec{a}'$  va fi practic nulă pentru că masa Pământului ( $M$ ) este foarte mare în raport cu masa sistemului mobil.  $\vec{F} = M\vec{a}' = m\vec{a}$ , deci

$$\frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} = \frac{m}{M}, \quad (3.17)$$

adică accelerația primită de Pământ este de atâtea ori mai mică decât cea a sistemului om + barcă, de câte ori masa Pământului este mai mare decât cea a sistemului.

Dacă omul din barcă împinge însă cu vîsla în altă barcă, atunci evident că va observa mișcarea ambelor bărci în sensuri opuse. Bărcile vor căpăta aceeași accelerații dacă masele celor două sisteme mobile sînt egale.

Mișcarea vapoarelor și a avioanelor cu elice poate fi de asemenea explicată cu ușurință: rotirea elicei pune în mișcare fluidul (apă sau aer); deci se acționează cu o anumită forță asupra fluidului, acesta, la rîndul său, reacționează cu o forță egală și de sens contrar care se aplică vaporului, respectiv avionului. Deplasarea unor astfel de aparate cu elice este deci condiționată de prezența unui fluid cu care să interacționeze.

### 3.5. LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI

Să considerăm două corpuri  $A$  și  $B$  de mase  $m_1$  și respectiv  $m_2$  și să notăm cu  $\vec{F}_{AB}$  forța cu care acționează  $A$  asupra lui  $B$ , iar cu  $\vec{F}_{BA}$  forța cu care acționează  $B$  asupra lui  $A$  (fig. I.3.5). Dacă asupra sistemului format din cele două corpuri nu acționează forțe exterioare lui, spunem că avem de-a face cu un sistem mecanic izolat de exterior sau cu un *sistem mecanic închis*.

Conform principiului al treilea  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ , deci

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0. \quad (3.18)$$

Notînd cu  $\vec{p}_A$  și  $\vec{p}_B$  impulsurile celor două corpuri, conform principiului al doilea al mecanicii se poate scrie:

$$\vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \text{ și } \vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}. \quad (3.19)$$

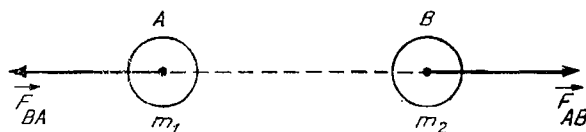


Fig. I.3.5

Introducînd (3.19) în (3.18) obţinem

$$\frac{d\vec{p}_B}{dt} + \frac{d\vec{p}_A}{dt} = 0 \text{ sau } \frac{d}{dt}(\vec{p}_B + \vec{p}_A) = 0. \quad (3.20)$$

Suma  $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_t$  este tocmai impulsul total al sistemului format din cele două corpuri  $A$  şi  $B$ . Deoarece derivata sa în raport cu timpul este nulă, rezultă că *impulsul total al unui sistem mecanic închis este constant în timp*, sau, cum se mai spune, se conservă în timp. Acesta este conţinutul legii conservării impulsului. Bineînţeles că impulsurile  $\vec{p}_A$  şi  $\vec{p}_B$  ale fiecărui corp în parte se pot modifica în timp, suma lor vectorială  $\vec{p}_A + \vec{p}_B$  trebuie să rămînă întotdeauna aceeaşi dacă asupra sistemului format din cele două corpuri nu se exercită forţe exterioare.

După cum se vede din demonstraţie, legea conservării impulsului este o consecinţă directă a principiului acţiunii şi reacţiunii. Din acest motiv toate fenomenele mecanice care se pot explica cu ajutorul principiului al treilea, pot fi explicate şi prin folosirea legii conservării impulsului. Astfel, experienţa în care barca se mişcă spre largul lacului, prin împingerea în mal cu vîsla, poate fi explicată şi astfel: înainte de a se acţiona cu vîsla, sistemul format din mal + barcă + om avea impulsul total nul. Ulterior subsistemul om + barcă se mişcă cu viteza  $\vec{v}$  avînd deci impulsul  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Deoarece impulsul total se conservă, el trebuie să fie zero. Înseamnă că malul va primi un impuls ( $-\vec{p}$ ) diferit de zero, deci malul va căpăta o viteză  $\vec{v}'$ , aşa încît  $-\vec{p} = M\vec{v}'$ . Deoarece  $|\vec{v}'| = \frac{m}{M}|\vec{v}|$ , desigur că  $|\vec{v}'|$  este practic zero, adică nu se va observa mişcarea malului.

Un raţionament analog poate fi utilizat pentru a explica înaintarea unei bărci pe suprafaţa unui lac perfect liniştit : la momentul iniţial toate corpurile ce alcătuiesc sistemul izolat om + barcă + apă sînt în repaus, deci impulsul total este zero. Ulterior, prin acţionarea vîslelor este pusă în mişcare o anumită masă  $m_1$  de apă cu o anumită viteză  $\vec{v}_1$  deci apa va căpăta un impuls  $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ . Pentru ca impulsul total să rămînă nul trebuie ca subsistemul barcă + om să capete un impuls egal şi de sens contrar, ( $-\vec{p}_1$ ), deci barca se va mişca în sens contrar maselor de apă puse în mişcare.

Reculul armelor de foc poate fi de asemenea explicat utilizînd legea conservării impulsului. Iniţial atît proiectilul cît şi arma se găsesc în repaus, deci impulsul total al sistemului armă + proiectil este nul. După tragere, proiectilul de masă  $m$  capătă o viteză  $\vec{V}$ , adică un impuls  $m\vec{V}$ . Pentru ca impulsul total să se conserve, adică să rămînă nul în continuare, arma de masă  $M$  se mişcă în sens contrar cu o viteză  $\vec{v}$  astfel încît impulsul său  $M\vec{v}$  să compenseze exact impulsul proiectilului:  $M\vec{v} + m\vec{V} = 0$ , deci

$$|\vec{v}| = \frac{m}{M}|\vec{V}|. \quad (3.21)$$



### 3.6. FORȚE DE FRECARÉ

Mișcarea unui mobil este influențată, după cum am văzut, de acțiunea forțelor. În rândul lor se înscriu și forțele de frecare ce se manifestă la deplasarea mobilului pe o anumită suprafață. În regiunea de contact se exercită acțiuni asupra mobilului, care se opun mișcării sale. Forțele care apar în regiunea de contact și care se opun mișcării au fost numite forțe de frecare. Prin urmare forțele de frecare au întotdeauna un sens opus vitezei corpului.

Datorită faptului că forțele de frecare apar întotdeauna când un corp se mișcă, înseamnă că în practică mișcarea rectilinie și uniformă a acestuia nu se poate efectua în virtutea inerției, ci doar datorită unei forțe de tracțiune egală și de sens contrar cu forța de frecare  $\vec{F}_f$ .

Legile frecării se pot studia cu ajutorul unui dispozitiv simplu numit tribometru (fig. I.3.6). Se pun greutăți pe taler pînă cînd corpul se mișcă rectiliniu și uniform realizîndu-se astfel situația în care forța de tracțiune  $\vec{F}$  datorită greutăților și talerului echilibrează forța de frecare  $\vec{F}_f$ :

$$\vec{F}_f = -\vec{F}.$$

Cunoscînd forța de apăsare normală  $\vec{F}_n$ , care în cazul figurii I. 3.6 este chiar greutatea corpului, se poate determina raportul

$$\mu_f = F_f/F_n \quad (3.22)$$

care poartă numele de *coeficient de frecare de alunecare*.

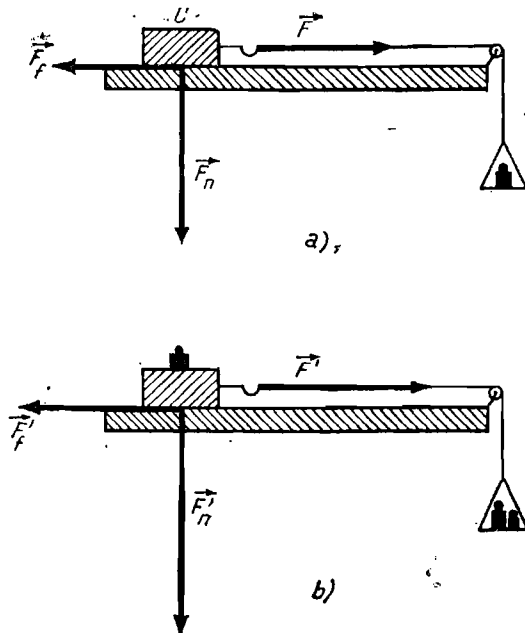


Fig. I.3.3

Se repetă experiența de mai sus așezînd o greutate suplimentară deasupra corpului. Vom observa că forța de tracțiune  $F'$  necesară pentru a echilibra forța de frecare  $F_f$  este mai mare decît în cazul precedent, dar raportul  $\mu_f = F_f/F_n$  nu s-a modificat, deci coeficientul de frecare nu depinde de forța de apăsare normală. Tot experiența ne arată că mărimea coeficientului de frecare nu depinde nici de mărimea suprafețelor ce vin în contact, ci doar de natura și gradul lor de șlefuire.

Relația (3.22) este totuși numai aproximativă deoarece în realitate coeficientul de frecare depinde și de viteza relativă dintre suprafețe. Într-adevăr, știm din proprie experiență că este mai greu să scoatem un corp din repaus decît să-i întreținem mișcarea după ce a pornit. Aceasta înseamnă că  $\mu_f$  este

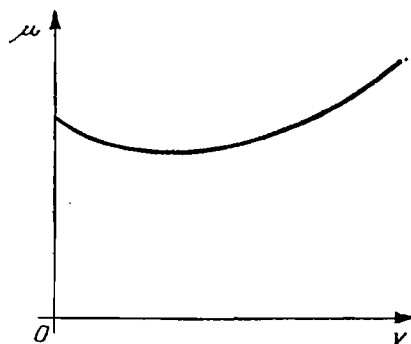


Fig. I.3.7

mai mare atunci cînd începe mișcarea, scăzînd ulterior, pe măsură ce viteza crește (fig. I.3.7). La viteze mai mari coeficientul de frecare începe însă să crească și poate fi considerat ca fiind proporțional cu viteza de deplasare, iar în cazul că aceasta crește și mai mult, coeficientul de frecare ajunge să crească și mai repede, fiind proporțional cu pătratul vitezei.

Deoarece forțele de frecare sînt în multe cazuri dăunătoare, în tehnică se utilizează lubrifianți pentru micșorarea acestora. Astfel, lagărele mașinilor sînt gresate cu diferite uleiuri minerale care reduc coeficienții de frecare dintre suprafețele ce vin în contact.

În tabelul I.2 sînt indicate valorile coeficienților de frecare pentru cîteva materiale.

TABELUL I.2

Suprafața	$\mu$	Suprafața	$\mu$
lemn pe lemn	0,36—0,50	fier pe fier	0,30—0,50
lemn pe metal	0,42—0,60	fier pe oțel	0,20—0,30
oțel pe gheață	0,014	oțel pe oțel	0,10—0,20

Din experiența cotidiană știm că în cazul unei mișcări de rostogolire, a unei sfere spre exemplu, forța de frecare este mult mai mică decât în cazul unei mișcări de alunecare, a aceleiași sferă, în condiții identice. Din acest motiv în tehnică se utilizează rulmenții cu bile care permit realizarea unei mișcări de rostogolire în locul uneia de alunecare.

### 3.7. MOMENTUL FORȚEI ȘI MOMENTUL CINETIC

Să considerăm un punct material, de masă  $m$ , ce se găsește într-un punct  $P$  de rază vectorie  $\vec{r}$  și asupra căruia acționează o forță  $\vec{F}$  (fig. 1.3.8.).

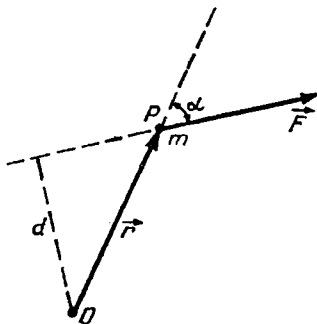


Fig. 1.3.8

Prin definiție, momentul forței  $\vec{F}$  față de punctul  $O$  este dat de expresia

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.23)$$

unde indicele atașat lui  $\vec{\mathcal{M}}$  indică punctul față de care s-a considerat momentul forței. Această mărime se va dovedi necesară în studiul mișcării corpului rigid ca și în numeroase probleme de statică.

Mărimea momentului este

$$|\vec{\mathcal{M}}_O| = rF \sin \alpha \quad (3.24)$$

unde  $d = r \sin \alpha$  reprezintă distanța de la punctul  $O$  pînă la suportul forței numit și brațul forței. Dacă  $\vec{r} \parallel \vec{F}$  atunci  $\alpha = 0$  și  $\mathcal{M}_O = 0$ .

Fie  $\vec{p}$  impulsul punctului material din  $P$ . Prin definiție, momentul impulsului sau momentul cinetic al unui punct material în raport cu un punct  $O$  este exprimat prin produsul vectorial

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (3.25)$$

Derivînd în raport cu timpul expresia (3.25) obținem

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F},$$

deoarece  $\vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$ . Comparînd acum ultima egalitate cu relația (3.23), rezultă

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O. \quad (3.26)$$

Relația este valabilă pentru orice punct  $O$  față de care considerăm cele două momente; astfel se poate renunța la indicele  $O$ , relația avînd un caracter general:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}, \quad (3.27)$$

adică variația în timp a momentului impulsului unui corp este egală cu momentul forței care acționează asupra acestui corp.

Dacă asupra unui sistem de  $n$  puncte materiale, de mase  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , acționează sistemul de forțe exterioare  $\vec{F}_1^{\text{ext}}, \vec{F}_2^{\text{ext}}, \dots, \vec{F}_n^{\text{ext}}$  (fig. I.3.9), atunci momentul resultant al sistemului de forțe în raport cu punctul  $O$  va fi dat, conform principiului suprapunerii efectelor, de suma vectorială a momentelor fiecărei forțe în parte, calculate în raport cu același punct  $O$ ,

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{tot}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{\text{ext}} + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{\text{ext}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}}.$$

Pe lîngă forțele exterioare, aplicate sistemului de puncte materiale, pot exista și forțe de interacțiune între punctele materiale ale sistemului, care sînt dirijate după direcțiile ce unesc aceste puncte și pe care le vom numi forțe interioare. Dacă notăm cu  $\vec{F}_{ij}$  forța cu care acționează punctul material  $m_i$  asupra punctului material  $m_j$ , atunci forța interioară totală ce se exercită asupra lui  $m_j$  din partea celorlalte particule este  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij}$ .

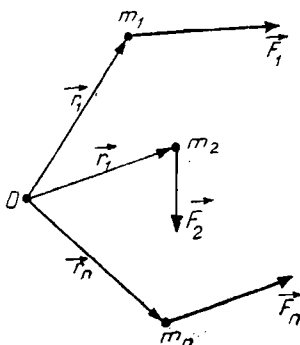


Fig. I.3.9.

Condiția  $i \neq j$  trebuie impusă deoarece punctul material nu acționează asupra sa însuși. Dacă ținem seama și de forța exterioară  $\vec{F}_j^{\text{ext}}$ , expresia

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} \quad (3.28)$$

reprezintă forța totală ce acționează asupra lui  $m_j$  și care îi modifică impulsul conform relației

$$\frac{d\vec{p}_j}{dt} = \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij}. \quad (3.29)$$

Momentul forței  $\vec{F}_j$  în raport cu  $O$  va fi dat de:

$$\vec{r}_j \times (\vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij}) = \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} + \vec{r}_j \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij},$$

iar momentul total va fi atunci

$$\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{tot}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^n \left( \vec{r}_j \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} \right) = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{int}}$$

unde  $\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}$  este momentul total al forțelor exterioare iar  $\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{int}}$  al celor interioare. Se poate ușor demonstra că momentul total al forțelor interioare este nul. Pentru aceasta să considerăm o pereche de puncte materiale oarecare (fig. 1.3.10) ce acționează unul asupra celuilalt cu forțele  $\vec{F}_{ij}$  și respectiv  $\vec{F}_{ji}$ , egale în mărime dar de sens contrar, conform principiului al treilea al mecanicii.

Suma momentelor acestor două forțe va fi nulă deoarece

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = -\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0,$$

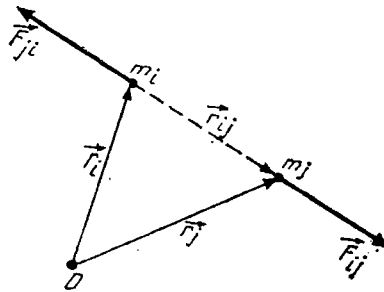


Fig. 1.3.10

$\vec{F}_{ij}$  și  $\vec{r}_{ij}$  avînd aceeași direcție. Cum aceasta se întîmplă pentru oricare din perechile de puncte materiale, rezultă că forțele interioare nu contribuie la momentul total al forțelor ce acționează asupra sistemului. Dacă punctele materiale au impulsurile  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ , momentul cinetic total al sistemului va fi

$$\vec{L}_O^{\text{tot}} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n.$$

Derivata lui în raportul cu timpul este

$$\frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt} = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \vec{r}_n \times \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

pentru că  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i = m\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Folosind expresia (3.29),  $\frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt}$  capătă forma

$$\frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \left( \vec{F}_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij};$$

ultimul termen fiind nul, obținem

$$\frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}, \quad (3.30)$$

adică variația în timp a momentului cinetic total este egală cu momentul total al forțelor exterioare.

Dacă  $\vec{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = 0$ , atunci

$$\frac{d\vec{L}_O^{\text{tot}}}{dt} = 0. \quad (3.31)$$

Deci cînd sistemul este izolat, adică asupra lui nu acționează forțe exterioare, momentul său cinetic se conservă.

### 3.8. GREUTATEA CORPURILOR

Este un fapt bine cunoscut că orice corp care nu este susținut se mișcă spre Pămînt, această mișcare numindu-se cădere liberă. Forța care produce căderea corpului este greutatea  $\vec{G}$ , direcția sa fiind dată de dreapta după care se efectuează căderea liberă\*. Această direcție, numită verticala locului se

\* Punctul de aplicație al forței de greutate a unui corp se numește centrul de greutate al corpului respectiv.

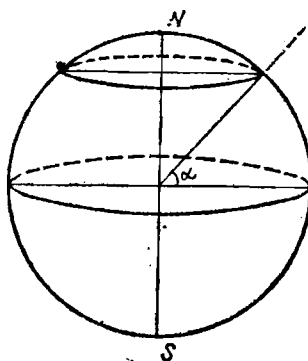


Fig. 1.3.11

poate ușor determina cu ajutorul firului cu plumb. Ea este dirijată după raza Pământului. Unghiul  $\alpha$  pe care-l face verticala locului cu verticala unui punct de pe ecuator, situat pe același cerc meridian, este tocmai latitudinea geografică a locului respectiv (fig. 1.3.11).

Dacă se studiază căderea liberă a corpurilor într-un tub în care s-a făcut vid (tubul lui Newton), se constată că toate corpurile capătă aceeași viteză și accelerație. Neglijând deci rezistența aerului, căderea corpurilor nu depinde de forma, dimensiunile sau natura lor.

Accelerația pe care o capătă corpurile datorită greutateii lor se numește accelerația gravitației și se notează cu  $g$ , deci  $G = mg$ .

Deoarece în căderea liberă viteza crește destul de rapid, pentru a înlesni observațiile se folosesc dispozitive în care accelerația ce se măsoară să fie sensibil mai mică decât  $g$ , mărindu-se astfel precizia măsurătorii; în plus, o dată cu micșorarea vitezei se reduce și rezistența opusă de aer la înaintare. În acest scop Galileo Galilei a utilizat planul înclinat (fig. 1.3.12), pentru care componenta activă a forței nu este  $G = mg$  ci  $G_1 = mg \sin \alpha$ , deci corpul capătă o accelerație  $a = g \sin \alpha < g$ . Măsurând intervalele de timp în care sînt străbătute diverse distanțe, se constată că mișcarea este uniform accelerată și se determină accelerația  $a = g \sin \alpha = gh/l$  calculîndu-se apoi  $g = al/h$ .

Un alt dispozitiv de determinare a lui  $g$  este mașina Atwood care constă din două corpuri identice de masă  $M$ , suspendate la capetele unui fir ce trece peste

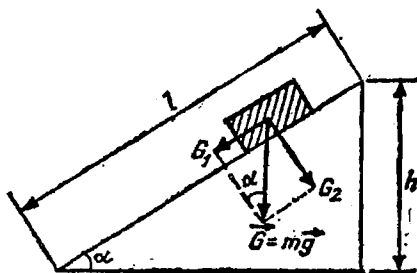


Fig. 1.3.12

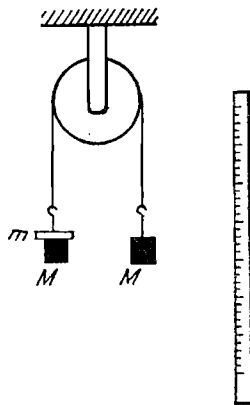


Fig. 1.3.13

un scripete fix (fig. 1.3.13). În cele ce urmează vom neglija atât frecările ce pot apare în regiunea de contact dintre fir și scripete, cât și rezistența aerului. Când se atașează o greutate suplimentară de masă  $m$ , întregul sistem de masă totală  $(2M + m)$  începe să se miște, sub acțiunea forței  $mg$ , în lungul unei rigle gradate. Accelerația sistemului se obține determinându-se timpurile în care sînt parcurse anumite distanțe date de rigla gradată. Se constată că este vorba tot de o mișcare uniform-accelerată și se găsește valoarea lui  $a$ . Folosind legea a doua a lui Newton  $mg = (m + 2M) a$ , se găsește apoi valoarea lui  $g$ .

Dacă un corp cade liber de la înălțimea  $h$ , fără viteza inițială, obținem timpul  $t$  cît durează coborîrea și viteza  $v$  pe care o are corpul cînd atinge solul:  $h = gt^2/2$ ,  $v = gt$ .

Eliminînd timpul între aceste două ecuații se obține relația lui Galilei:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.32)$$

Timpul de cădere de la înălțimea  $h$  este

$$t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3.33)$$

a) **Aruncarea pe verticală.** Cînd un corp este aruncat pe verticală cu viteza inițială  $v_0$ , acesta se va mișca uniform întîrziat, ecuațiile de mișcare fiind cele deduse în capitolul de cinematică. După  $t$  secunde de la aruncare viteza va fi  $v = v_0 - gt$ . Avînd în vedere, că atunci cînd mobilul atinge înălțimea maximă  $h$ , viteza sa este nulă, se găsește timpul de urcare  $t_{urc} = v_0/g$ , iar înălțimea maximă pînă la care se ridică este

$$h_{max} = v_0^2/2g. \quad (3.34)$$

După ce a ajuns la înălțimea maximă, corpul începe să cadă liber și, după cum se vede din relațiile (3.32) și (3.33), viteza finală cu care corpul ajunge la sol este egală cu cea inițială, iar timpul de coborîre este egal cu cel de urcare.



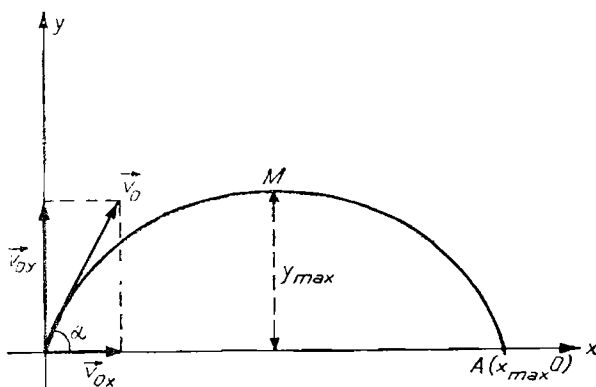


Fig. I.3.14

b) **Aruncarea sub un unghi dat.** Să considerăm acum aruncarea unui proiectil cu viteza inițială  $\vec{v}_0$ , ce face un unghi  $\alpha$  cu orizontala (fig. I.3.14). Vom neglija din nou rezistența aerului, considerînd că singura forță care acționează este greutatea. Viteza rezultantă a proiectilului la orice moment se va obține din compunerea vitezei inițiale  $\vec{v}_0$  cu viteza  $\vec{v}$  dirijată după verticală, de sus în jos, care apare datorită greutateii. Întîlnim deci compunerea unei mișcări uniform-încetinite după axa  $Oy$  (cu viteza inițială  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  și accelerația  $a_0 = g$ ) cu o mișcare uniformă după axa  $Ox$  (cu viteza  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ).

Ecuatiile de mișcare vor fi

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - gt^2/2. \quad (3.35)$$

Utilizînd formulele (2.47) – (2.50), avem posibilitatea să obținem înălțimea maximă  $y_{max}$  la care ajunge corpul, distanța maximă  $x_{max}$  străbătută de acesta pe orizontală (bătăia), timpul de urcare și de coborire:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad (3.36)$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (3.37)$$

$$t_{urc} = t_{cob} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.38)$$

Timpul total cît durează mișcarea va fi:

$$t = t_{urc} + t_{cob} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.39)$$

Traectoria mișcării, care se obține ușor eliminînd timpul din ecuațiile (3.35), este parabolă

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (3.40)$$

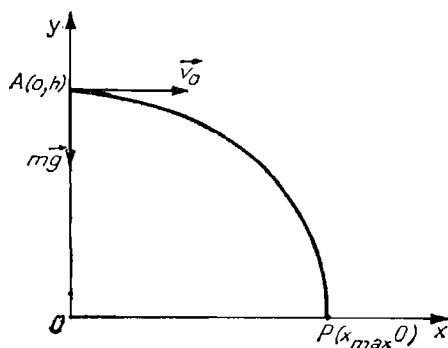


Fig. I.3.15

c) **Aruncarea pe orizontală.** În cazul în care corpul este lansat de la înălțimea  $h$  față de sol, cu viteza inițială  $\vec{v}_0$  dirijată după orizontală (fig. I.3.15), putem considera mișcarea mobilului ca fiind rezultatul compunerii unei mișcări rectilinii și uniforme după  $Ox$  (cu viteza  $v_0$ ) cu o mișcare uniform-accelerată, fără viteză inițială, după  $Oy$ .

Avînd în vedere că la momentul inițial  $t = 0$  mobilul se găsește în punctul  $A(0, h)$  ecuațiile de mișcare vor fi

$$x = v_0 t, \quad y = h - gt^2/2. \quad (3.41)$$

Eliminînd timpul din relațiile de mai sus obținem ecuația traiectoriei, care este parabola

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (3.42)$$

Momentul de timp în care mobilul atinge solul se obține punînd condiția  $y = 0$ , deci

$$t_{cob} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (3.43)$$

iar distanța maximă parcursă pe orizontală este

$$x_{max} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3.44)$$

### 3.9. FORȚE ÎN MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

Am stabilit în capitolul consacrat cinematicii expresia accelerației care apare în mișcarea circulară uniformă și am arătat că această accelerație este dirijată după rază, către centrul cercului, motiv pentru care a fost numită *centripetă*:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad \vec{a}_{cp} = -m\omega^2 \vec{r}. \quad (3.45)$$

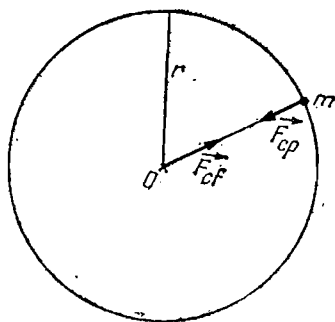


Fig. I.3.16

Conform principiului al doilea al mecanicii, apariția acestei accelerații se datorește unei forțe, pe care o vom numi centripetă

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r, \quad \vec{F}_{cp} = -m\omega^2 \vec{r}, \quad (3.46)$$

de asemenea dirijată după direcția razei, către centrul traiectoriei.

Legea a treia a mecanicii ne arată că o dată cu forța centripetă ce se aplică mobilului, trebuie să apară o forță egală și de sens contrar cu aceasta, numită forță centrifugă. Ea se aplică corpului care obligă un alt corp în mișcare să descrie o traiectorie circulară. De exemplu, să considerăm rotația unui corp legat cu o sfoară. Forța centripetă este aplicată mobilului, iar forța centrifugă este aplicată sforii, mâna care ține capătul sforii simte acțiunea acestei forțe (fig. I.3.16). Aceste forțe apar și dispar simultan.

În cazul unui vagon ce cotește la o curbă, șinele acționează asupra roților cu o forță dirijată către centrul arcului de cerc pe care-l formează șina, aceasta este deci o forță centripetă. La rîndul lor, roțile acționează asupra șinelor cu o forță egală ca mărime și de sens contrar, care este tocmai forța centrifugă. Deoarece forța centrifugă provoacă solicitarea șinelor, terasamentul căii ferate se înclină cu un unghi  $\alpha$ . După cum se vede din fig. I.3. 17 șina nu este solicitată

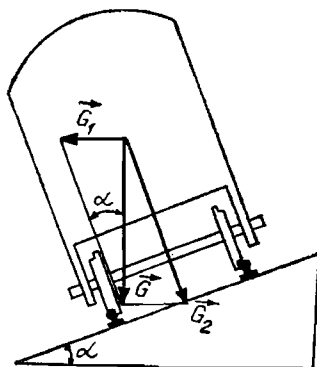


Fig. I.3.17

cînd componenta  $G_1$  a greutății  $G$  a vagonului, care acționează asupra șinei, echilibrează exact forța centrifugă;  $G_1 = F_{cf}$ ,

$$G \tan \alpha = mv^2/r \text{ deci } \tan \alpha = v^2/rg. \quad (3.47)$$

Relația (3.47) stabilește viteza cu care trenul trebuie să intre în curbă pentru o rază și un unghi de înclinare a terasamentului date astfel încît șinele să nu se uzeze. Se va vedea ulterior că dacă relația (3.47) este satisfăcută, vagonul are o stabilitate maximă.

### 3.10 FORȚE ELASTICE. PENDULUL MATEMATIC

a) **Forțe elastice și oscilații elastice.** Forțele exterioare care acționează asupra unui corp pot să deplaseze diferitele regiuni ale corpului unele față de altele, provocînd astfel o modificare a formei lui. Aceste modificări au fost numite *deformații*. Datorită deformării apar forțe interne care se exercită asupra regiunilor deplasate și care tind să refacă forma inițială a corpului. Din acest motiv, cînd forța exterioară dispare, forțele interne tind să readucă corpul la vechea sa formă.

În realitate, nici după încetarea acțiunii exterioare, deformarea nu dispare complet. Totuși, deoarece pentru multe corpuri întîlnite în natură, deformarea rămasă este neimportantă, putem considera cu bună aproximație că forțele interne au readus corpul chiar la vechea sa formă. Acest tip de deformații ce pot dispare complet se numesc *deformații elastice*, iar forțele interne care le înlătură se numesc *forțe elastice*. În sfîrșit proprietatea corpurilor de a se deforma sub acțiunea forțelor exterioare și de a reveni la vechea lor formă după încetarea solicitărilor externe se numește *elasticitate*.

Să presupunem că tragem de capătul unui resort care se deplasează astfel pe distanța  $y$  (fig. 1.3.18). Deoarece ne interesează și direcția și sensul în care s-a efectuat deplasarea, vom introduce vectorul  $\vec{y}$  al cărui modul este egal cu

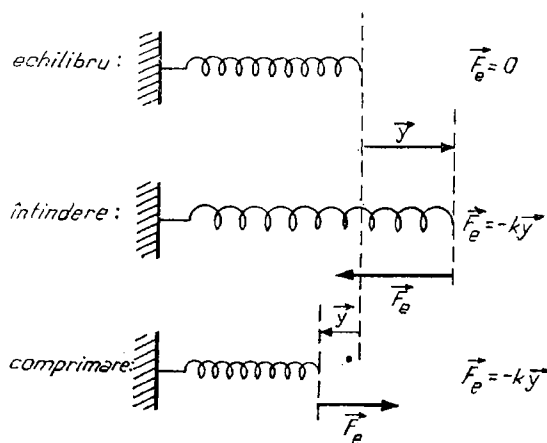


Fig. 1.3.18

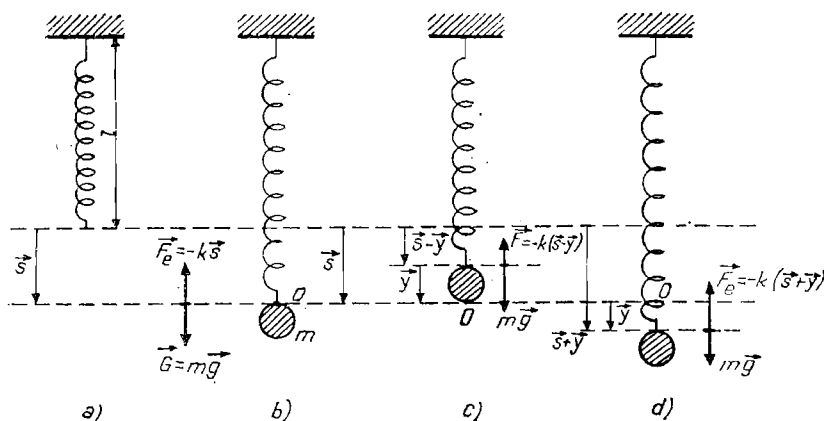


Fig. I.3.19

distanța  $y$  pînă la poziția de echilibru și pe care îl considerăm întotdeauna ca fiind îndreptat de la poziția de echilibru spre punctul unde a ajuns capătul resortului.

Experiența ne arată că forța elastică  $\vec{F}_e$  este proporțională cu distanța pînă la poziția de echilibru, adică:

$$\vec{F}_e = -k\vec{y}, \quad (3.48)$$

unde constanta  $k$  este pozitivă și se numește constanta elastică a resortului.

Vectorul  $\vec{y}$  fiind întotdeauna luat în sensul deplasării extremității resortului, semnul minus din relația (3.48) exprimă faptul că forța elastică se opune, în toate cazurile, acestei deplasări, indiferent că resortul este întins sau comprimat.

Să studiem un resort elastic care are lungimea  $l$  în stare nedeformată (fig. I.3.19a). De un capăt se suspendă o bilă de masă  $m$ ; sistemul resort + bilă astfel format se numește pendul elastic.

Cînd sfera suspendată se află în repaus (fig. I.3. 19b), forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  a bilei este echilibrată de forța elastică  $\vec{F}_e$  a resortului, care apare datorită alungirii  $\vec{s}$  a acestuia. Alungirea  $\vec{s}$  a resortului, pentru care se realizează poziția de echilibru a pendulului elastic, se stabilește punînd condiția ca forța totală să fie nulă:

$$m\vec{g} - k\vec{s} = 0 \text{ sau } s = mg/k. \quad (3.49)$$

Dacă acționăm după verticală asupra bilei de masă  $m$ , pendulul elastic va începe să se miște în jos și în sus, de o parte și de alta a poziției de echilibru. Cînd bila se găsește la distanța  $y$  de punctul  $O$  de echilibru (poziția c), dacă se neglijează frecările, ea se va găsi sub acțiunea unei forțe

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{G} = -k(\vec{s} - \vec{y}) + m\vec{g}, \quad (3.50)$$

unde forța elastică  $\vec{F}_e$  este de sens contrar lui  $\vec{G}$ , fiind mai mare decît greutatea în punctele situate sub poziția de echilibru, dar mai mică decît aceasta în punctele situate deasupra poziției de echilibru.

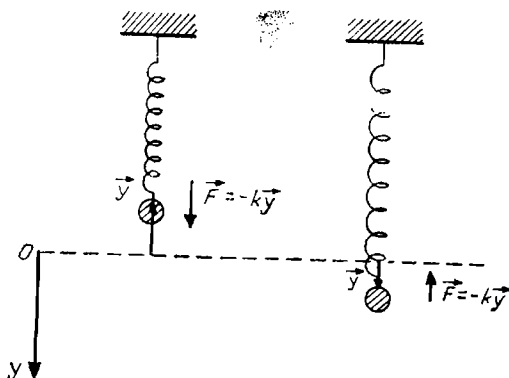


Fig. I.3.20

Din (3.49) și (3.50) rezultă

$$\vec{F} = k\vec{y}. \quad (3.51a)$$

Analog, putem arăta că într-un punct situat la distanța  $y$  sub punctul de echilibru, acționează o forță

$$\vec{F} = -k\vec{y}. \quad (3.51b)$$

În ambele situații  $\vec{F}$  tinde să aducă bila în punctul de echilibru. Trebuie remarcat că în relația (3.51a) prin  $\vec{y}$  înțelegem vectorul dirijat de la extremitatea resortului spre  $O$ , pe când în relația (3.51b) prin  $\vec{y}$  înțelegem vectorul îndreptat de la  $O$  spre extremitatea resortului. Dacă luăm originea în  $O$  și exprimăm forța într-un punct folosind vectorul de poziție al aceluși punct, adică un vector dirijat de la origine spre punctul respectiv, atunci forța ce acționează asupra bilei va fi

$$\vec{F} = -k\vec{y}, \quad (3.52)$$

indiferent dacă bila se va găsi mai sus sau mai jos de  $O$  (fig. I.3.20).

Legea a doua a lui Newton ne permite să scriem pentru orice punct relația

$$m\vec{a} = -k\vec{y}. \quad (3.52a)$$

Dacă alegem axa  $Oy$  după axa resortului, obținem  $ma = -ky$  deoarece toți vectorii din relația (3.52a) au direcția axei  $Oy$ . Deci

$$a = -\frac{k}{m}y. \quad (3.52b)$$

După cum s-a văzut la capitolul de cinematică, mișcarea în care accelerația este proporțională cu distanța pînă la poziția de echilibru (ec. 2.74) este o mișcare oscilatorie, periodică, unde dependența de timp a lui  $y$  este dată de relația (2.71):

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.53)$$

Comparînd ec. (3.52 b) cu ec. (2.74), rezultă  $\omega_0^2 = k/m$ , deci perioada mișcării este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.54)$$

Putem ajunge însă la aceleași concluzii folosind ecuația lui Newton (3.52 b). Această metodă este mult mai generală avînd avantajul că ne permite să descriem mișcarea punctului material și în cazul în care luăm în considerare rezistența mediului.

Expresia (3.52 b) mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0. \quad (3.55)$$

Relația (3.55) este o ecuație diferențială omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți constanți, a cărei soluție este dată de ec. (A.56), unde  $c = \omega_0^2 = k/m$  în cazul nostru, adică  $y$  este de forma (3.53). Mărimea  $\omega_0$  se numește pulsația proprie a pendulului elastic.

Facem convenția că începem să măsurăm timpul din momentul în care pendulul elastic trece prin poziția de echilibru, adică luăm originea timpului  $t = 0$  cînd  $y = 0$ . Considerînd ecuația (3.53) pentru aceste valori, obținem  $A \sin \varphi = 0$ , care implică  $\varphi = 0$  (dacă  $A = 0$ , atunci  $y = 0$ ). Soluția devine

$$y = A \sin \omega_0 t, \quad (3.56)$$

care este ecuația unei mișcări oscilatorii armonice. Deci sub acțiunea forței elastice pendulul elastic execută o mișcare oscilatorie armonică de elongație  $y$ , amplitudine  $A$  și perioadă  $T = 2\pi/\omega_0$ , deoarece perioada mișcării este dată de perioada lui  $\sin \omega_0 t$ , adică

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.57)$$

Vom considera acum cazul real cînd asupra pendulului elastic acționează, pe lîngă forța elastică ( $-ky$ ), o forță de frecare  $F_f$  proporțională cu viteza ( $F_f = -bv$ ),  $b$  fiind o constantă pozitivă deoarece forța de frecare are sensul opus vitezei.

Legea a doua a mecanicii capătă o formă deosebită de cea dată de (3.52 a):

$$m\vec{a} = -k\vec{y} - b\vec{v} \quad (3.58)$$

sau

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

deoarece am considerat axa  $Oy$  după axa resortului. Avînd în vedere că

$v = \frac{dy}{dt}$  și  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  rezultă ecuația

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (3.59)$$

care este de tipul (A.45) cu  $2b' = b/m$  și  $c = \omega_0^2$ . Dacă  $b'^2 > \omega_0^2$ , atunci soluția ecuației (3.59) este dată de relația (A.48), iar pentru  $b'^2 = \omega_0^2$  soluția este dată de ecuația (A.50):

$$y(t) = A_1 e^{-(b' + \sqrt{b'^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(b' - \sqrt{b'^2 - \omega_0^2})t}, \quad b'^2 > \omega_0^2 \quad (3.60)$$

$$y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-b't}, \quad b'^2 = \omega_0^2. \quad (3.61)$$

Se remarcă imediat că  $y$  scade rapid în timp. Se zice că o astfel de mișcare este puternic amortizată și aperiodică. După un interval de timp infinit ( $t = +\infty$ ), bila de masă  $m$  ajunge în poziția de echilibru, deci nu mai au loc oscilații de o parte și de alta a punctului de echilibru.

Trebuie reținut faptul că îndeplinirea condiției  $b'^2 \geq \omega_0^2$  care conduce la mișcarea puternic amortizată, impune existența unei forțe de rezistență extrem de mare.

O situație foarte des întâlnită în realitate este aceea pentru care  $b'^2 - \omega_0^2 < 0$ . Soluția ecuației (3.59) este (vezi ec. A.57)

$$y(t) = A e^{-b't} \sin(\omega' t + \varphi), \quad (3.62)$$

unde  $(-b')$  este partea reală iar  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b'^2}$  este partea imaginară a rădăcinilor ecuației caracteristice.

Dacă se ia condiția inițială  $y_0 = y(0) = 0$ , se obține  $\varphi = 0$ , astfel că

$$y(t) = A e^{-b't} \sin \omega' t. \quad (3.63)$$

Folosind notația  $y_{arm}(t) = A \sin \omega' t$ , care reprezintă elongația unei oscilații armonice de perioadă  $T = 2\pi/\omega'$ , relația (3.63) devine

$$y(t) = e^{-b't} y_{arm}(t). \quad (3.64)$$

Se poate ușor demonstra că valorile lui  $y(t)$  care se obțin din  $T$  în  $T$  secunde formează o progresie geometrică descrescătoare cu rația  $e^{-b'T}$ . Aceasta înseamnă că elongația mișcării scade exponențial în timp, adică mișcarea încetează cu timpul. Într-adevăr, la momentul de timp  $t + T$ , ecuația (3.64) ne furnizează valoarea

$$y(t + T) = e^{-(t+T)} y_{arm}(t + T)$$

sau

$$y(t + T) = e^{-b'T} \cdot e^{-b't} y_{arm}(t), \quad (3.65)$$

deoarece, din definiția lui  $T$ ,  $y_{arm}(t + T) = y_{arm}(t)$ . În sfârșit, din (3.65) și (3.64), rezultă

$$y(t + T) = e^{-b'T} y(t) = e^{-b' \frac{2\pi}{\omega'}} y(t),$$

egalitatea de mai sus fiind satisfăcută la orice moment de timp.

Să calculăm acum viteza punctului material. Pentru această vom deriva în raport cu timpul relația (3.63):

$$v = \frac{dy}{dt} = A e^{-b't} (-b' \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t).$$



Din această expresie se pot găsi momentele de timp la care  $y(t)$  își atinge maximele sau minimele relative, avînd în vedere că la aceste momente viteza se anulează. Această condiție conduce la relația

$$\operatorname{tg} \omega' t = \omega' / b',$$

de unde rezultă

$$\sin \omega' t = \frac{\omega'}{\sqrt{b'^2 + \omega'^2}} = \frac{\omega'}{\omega_0}. \quad (3.66)$$

Să presupunem că  $b'^2 \ll \omega_0^2$ , deci în expresia lui  $\omega'^2$  putem neglija pe  $b'$  față de  $\omega_0$ . Obținem atunci  $\omega' \simeq \omega_0$ , iar din (3.66),  $\sin \omega' t = 1$ , deci:

$$\omega' t_{\max} = 2k\pi + \pi/2, \quad t_{\max} = (4k + 1) \pi / 2\omega_0,$$

$$\omega' t_{\min} = 2k\pi + 3\pi/2, \quad t_{\min} = (4k + 3) \pi / 2\omega_0.$$

Maximele și minimele relative formează fiecare în parte cîte o progresie geo-

metrică descrescătoare cu rația e  $-\frac{2\pi}{\omega_0}$ . Maximele pot fi reprezentate pe curba exponențială  $y = Ae^{-b't}$  în punctele de abscise  $t = (4k + 1) \pi / 2\omega_0$ , iar minimele pe curba  $y = -Ae^{-b't}$  în punctele de abscise  $t = (4k + 3) \pi / 2\omega_0$ , (vezi fig. I.3.21). Se vede din figură că amplitudinile pendulului elastic scad exponențial în timp, schimbările de semn ale lui  $y$  arătînd că se execută o mișcare oscilatorie, de o parte și de alta a poziției de echilibru. O astfel de mișcare, care se stinge treptat în timp, se zice că este amortizată.

Un caz deosebit de interesant apare atunci cînd asupra pendulului elastic acționează o forță externă ce variază armonic în timp,

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t.$$

În locul ecuației (3.58) vom avea:

$$m\vec{a} = -k\vec{y} - b\vec{v} + \vec{F}_{\text{ext}}. \quad (3.67)$$

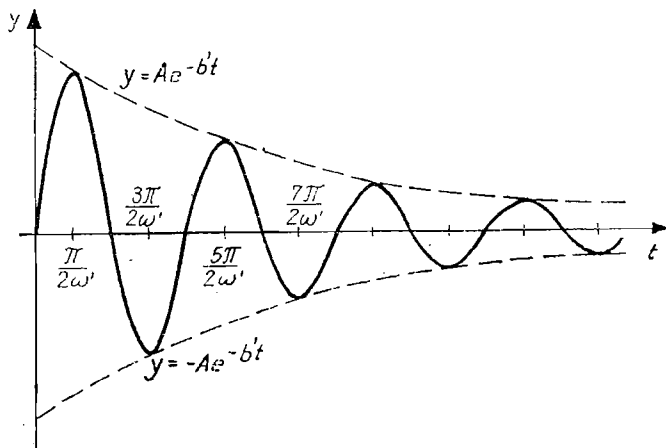


Fig. I.3.21

Dacă presupunem că forța exterioară este dirijată de-a lungul axei resortului, atunci toate forțele ce apar în ecuația (3.67) au aceeași direcție, deci

$$ma = -ky - bv + F_{ext}.$$

Folosind din nou notația  $\omega_0^2 = k/m$ , relația de mai sus devine

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (3.68)$$

Nu vom încerca să rezolvăm ecuația diferențială (3.68) deoarece acest lucru necesită un calcul ceva mai complicat. Vom discuta însă caracteristicile mișcării care rezultă în acest caz și care desigur nu va mai fi o mișcare amortizată. Datorită prezenței forței exterioare, punctul material execută o mișcare oscilatorie armonică forțată (întreținută), cu perioada

$$T = 2\pi/\omega \quad (3.69)$$

impusă de pulsația forței  $F_{ext}$ .

Prin urmare soluția trebuie să fie o funcție periodică de timp

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.70)$$

unde amplitudinea  $A$  depinde de  $\omega$ ,  $\omega_0$  și  $b$ . Se poate arăta că  $A$  are valoarea maximă atunci când  $\omega = \omega_0$ , adică atunci când pulsația forței externe este egală cu pulsația proprie a pendulului elastic. Fenomenul care constă din realizarea unei oscilații cu amplitudinea maximă, datorită acțiunii unei forțe exterioare de aceeași perioadă cu cea a oscilatorului, a fost numit *rezonanță*.

În cazul rezonanței se poate arăta cu ușurință că o soluție particulară  $y_{rez}(t)$  a ecuației (3.68) (cu  $\omega = \omega_0$ ) este

$$y_{rez}(t) = A_{rez} \sin \omega_0 t \quad (3.71)$$

unde  $A_{rez}$  este amplitudinea la rezonanță. Introducând relația (3.71) în ecuația (3.68) obținem

$$A_{rez} \left( -\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \frac{b}{m} \omega_0 \cos \omega_0 t + \omega_0^2 \sin \omega_0 t \right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t,$$

deci ecuația este satisfăcută la orice moment de timp pentru

$$A_{rez} = F_0/b\omega_0, \quad (3.72)$$

deci

$$y_{rez} = \frac{F_0}{b\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (3.73)$$

Deoarece oricare din soluțiile (3.61) — (3.63) ale ecuației omogene tinde la zero când  $t \rightarrow \infty$ , soluția generală a ecuației neomogene (3.68), de la un moment de timp, va coincide cu soluția particulară (3.73).

După cum se vede din formula (3.72), amplitudinea la rezonanță este invers proporțională cu  $b$ , deci este cu atât mai mare cu cât forța de rezistență este mai mică. În cazul în care  $\omega \neq \omega_0$ , amplitudinea de asemenea crește când  $b$  scade, dar dependența de  $b$  este mai complicată decât în cazul rezonanței.

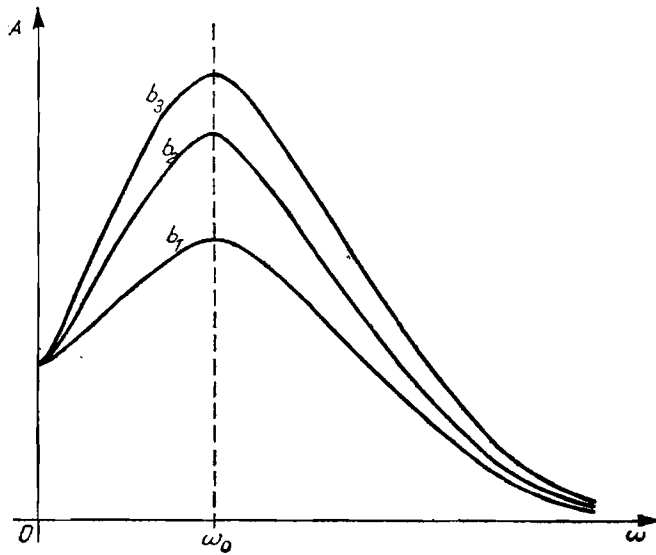


Fig. I.3.22

În fig. I.3.22 se dă comportarea lui  $A$  în funcție de  $\omega$  pentru valori diferite ale parametrului  $b$  ( $b_1 > b_2 > b_3$ ).

Reamintim în încheiere, că oscilațiile care au loc sub acțiunea unei forțe periodice exterioare se numesc *oscilații întreținute* sau *oscilații forțate*.

b) **Pendulul matematic.** Sistemul alcătuit dintr-un punct material de masă  $m$  suspendat de un fir inextensibil, fără greutate, de lungime  $l$ , se numește *pendul matematic* (fig. I.3.23).

Noțiunea de pendul matematic este evident o noțiune idealizată, un astfel de sistem nu se întâlnește în natură. Să considerăm sistemul real format dintr-o sferă omogenă de rază  $r$ , suspendată de un fir de lungime  $l$  și să vedem în ce condiții îl putem asimila cu un pendul matematic. Deoarece forța de greutate a sferei este aplicată în centrul sferei, distanța de la punctul de suspensie  $S$

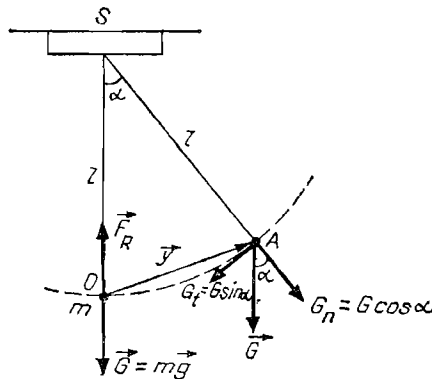


Fig. I.3.23

pină la punctul de aplicație al greutateii este de fapt  $(l + r)$  și nu  $l$ , cât ar fi fost în cazul punctului material. Se vede imediat că se pot neglija dimensiunile sferei dacă este îndeplinită condiția  $l \gg r$ . Pentru ca firul să poată fi considerat practic inextensibil, trebuie ca alungirea sa  $\Delta l$  să fie mică, așa încît  $\Delta l \ll l$ . În sfîrșit, dacă sfera este confecționată dintr-un material de densitate mare, așa încît masa sa să fie mult mai mare decît cea a firului, greutatea firului este neglijabilă în raport cu cea a sferei, iar sistemul nostru poate fi asimilat cu un pendul matematic.

Pendulul matematic este în echilibru atunci cînd direcția firului coincide cu verticala locului. În acest caz, greutatea  $\vec{G}$  a punctului material este compensată de forța de reacțiune  $\vec{F}_R$  care acționează întotdeauna în lungul firului, așa încît punctul material de masă  $m$  se găsește în repaus.

Să presupunem că am scos pendulul din poziția de echilibru, direcția firului făcînd unghiul  $\alpha$  cu verticala locului. Este evident că punctul material nu se poate mișca decît după arcele cercului de rază  $l$ , cu centrul în  $S$ .

Componenta  $G_n = G \cos \alpha$  a greutateii este compensată în continuare de reacțiunea firului, dar cealaltă componentă,  $G_t = G \sin \alpha$ , care are direcția tangentei la cerc (adică la traiectorie) și este orientată în permanență către poziția de echilibru, rămîne necompensată. Asupra punctului material va acționa deci forța tangențială  $G_t$  care îi va imprima o accelerație  $a$ . Pentru valori ale unghiului  $\alpha$  mai mici de  $4^\circ$  ( $\alpha < \pi/45$  radiani), se poate aproxima  $\sin \alpha$  prin valoarea arcului  $\alpha$ , exprimată în radiani:  $\sin \alpha \simeq \alpha$ . Atunci

$$G_t = G\alpha = mg\alpha. \quad (3.74)$$

Notînd cu  $s$  lungimea arcului  $OA$ , și ținînd seama că  $s = l\alpha$ ,  $G_t$  devine

$$G_t = mgs/l. \quad (3.75)$$

Pentru unghiuri la centru mici, lungimea arcului  $s$  poate fi aproximată prin lungimea coardei  $OA = y$ . Obținem atunci pentru modulul forței tangențiale valoarea

$$G_t = mgy/l. \quad (3.76)$$

Dacă vrem să scriem relația de mai sus sub formă vectorială și considerăm vectorul  $\vec{y}$  dirijat de la  $O$  la  $A$  ( $\vec{y} = \vec{OA}$ ), se observă imediat că vectorii  $\vec{G}$  și  $\vec{y}$  au sensuri diferite; avînd în vedere și relația (3.76), rezultă

$$\vec{G}_t = -mgy/l, \quad (3.77)$$

adică  $\vec{G}_t$  este o forță elastică de tipul (3.48), unde constanta  $k$  este în cazul nostru  $mg/l$ . Mișcarea va fi oscilatorie și periodică, cu  $y(t)$  obținut din relația (3.53), deci

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.78)$$

unde  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  deoarece, după cum am arătat mai sus, constanta  $k$  trebuie înlocuită prin constanta  $mg/l$ . Astfel, perioada este dată de

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (3.79)$$

Desigur că la aceleași rezultate am fi ajuns dacă am fi considerat ecuația lui Newton

$$\vec{ma} = \vec{G}_t \quad (3.80)$$

iar prin proiectarea pe direcția  $\vec{y}$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} y = 0. \quad (3.81)$$

Se vede că în acest caz  $\omega_0^2 = g/l$  (vezi 3.55).

După cum se observă din (3.79), perioada pendulului matematic nu depinde, pentru unghiuri mici, de valoarea amplitudinii. Această proprietate este cunoscută sub numele de legea izocronismului micilor oscilații, lege descoperită de Galilei.

Pendulul odată scos din poziția sa de echilibru, amplitudinea oscilațiilor sale scade treptat în timp datorită frecărilor și pînă la urmă se oprește. Această însă un rezultat din ecuația (3.78) care arată că amplitudinea  $A$  nu scade în timp, mișcarea oscilatorie efectuîndu-se la nesfîrșit, deoarece la stabilirea ei am neglijat forța de frecare ce apare, atît datorită mediului în care oscilează pendulul, cît și frecărilor la punctul de suspensie  $S$ . Considerînd o forță de frecare  $F_f$  proporțională cu viteza\* și dirijată în sens contrar acesteia,

$\vec{F}_f = - b \vec{v} = - b \frac{d\vec{y}}{dt}$ , se obține, în locul ecuației (3.80), relația:

$$\vec{ma} = \vec{G}_t + \vec{F}_f = - m \frac{g}{l} \vec{y} - b \frac{d\vec{y}}{dt}.$$

Proiectînd pe direcția lui  $\vec{y}$ , obținem

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + m \frac{g}{l} y &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{g}{l} y &= 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

cu  $\omega_0^2 = g/l$ , adică o ecuație de tipul (3.59). Soluția ei este dată de (3.63):

$$y(t) = A e^{-b't} \sin \omega' t \quad (3.83)$$

$$\text{cu } b' = b/2m \text{ și } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b'^2},$$

unde acum  $\omega_0^2 = g/l$ . Obținem deci o mișcare oscilatorie, de tipul celei reprezentate în fig. 1.3.21, care se amortizează exponențial în timp.

Să presupunem că asupra pendulului acționează o forță externă periodică  $F_{ext} = F_0 \cos \omega t$ . În acest caz vom avea oscilații armonice întreținute, pentru  $\omega = \omega_0$  avînd loc fenomenul de rezonanță cu amplitudinea dată de relația (3.72).

---

\* Această ipoteză este corectă deoarece viteza unui pendul nu este prea mare (vezi și § 3.6).

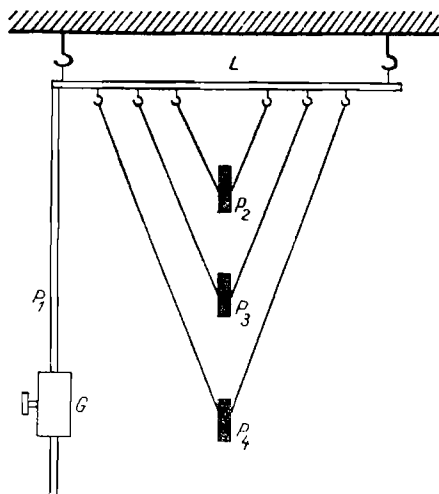


Fig. 1.3.24

Un dispozitiv simplu pentru punerea în evidență a rezonanței este cel din fig. 1.3.24. Greutatea  $G$  poate aluneca în lungul tije pendulului  $P_1$ , astfel încît lungimea acestuia, deci și perioada lui, pot fi modificate. Scoțînd din poziția de echilibru pendulul  $P_1$ , mișcarea oscilatorie de pulsație  $\omega$  a acestuia este transmisă, prin intermediul suportului comun  $L$ , tuturor celorlalte trei pendule care vor începe să oscileze cu diferite amplitudini deoarece, fiind de lungimi diferite, au pulsații proprii de oscilație diferite. Se constată că pendulul a cărei pulsație proprie  $\omega_0$  este egală cu  $\omega$ , are o amplitudine maximă. Fixînd greutatea  $G$  astfel încît lungimea lui  $P_1$  să fie egală cu lungimea pendulului  $P_4$ , vom constata că amplitudinea lui  $P_4$  este sensibil mai mare decît a celorlalte două pendule. Acest lucru se întîmplă deoarece pulsația proprie a lui  $P_4$  a devenit egală cu cea a forței exterioare produsă de oscilațiile lui  $P_1$ . Spunem că cele două pendule  $P_1$  și  $P_4$  sînt în rezonanță.

Efectuînd o experiență analogă cu cea descrisă anterior, însă cu pendule de lungime egală și mase diferite, ne putem convinge cu ușurință că amplitudinea oscilațiilor nu depinde de masa pendulelor.

c) **Aplicațiile pendulului.** Cunoașterea legilor de mișcare care descriu micile oscilații ale pendulului matematic a permis construirea unor dispozitive de măsurare precisă a timpului.

Din relația (3.79) se obține lungimea  $l$  a unui pendul care bate secunda într-un loc dat de pe Pămînt. Spunem că un pendul bate secunda dacă două treceri consecutive prin același punct (indiferent de sensul de mișcare) se efectuează din secundă în secundă. Aceasta înseamnă că perioada unui astfel de pendul este  $T = 2s$ , deci lungimea sa este  $l = g/\pi^2$ .

Un orologiu are ca parte principală un pendul care bate secunda oscilînd în jurul unei axe orizontale. Numărul de oscilații ale pendulului, care dă numărul de secunde scurse, se înregistrează pe un cadran prin rotirea unor ace indicatoare. Amplitudinea oscilațiilor pendulului scos din poziția sa de echilibru ar scădea treptat în timp datorită frecărilor. Mișcarea sa este întreținută de către un dispozitiv motor care mișcă totodată și acele indicatoare.

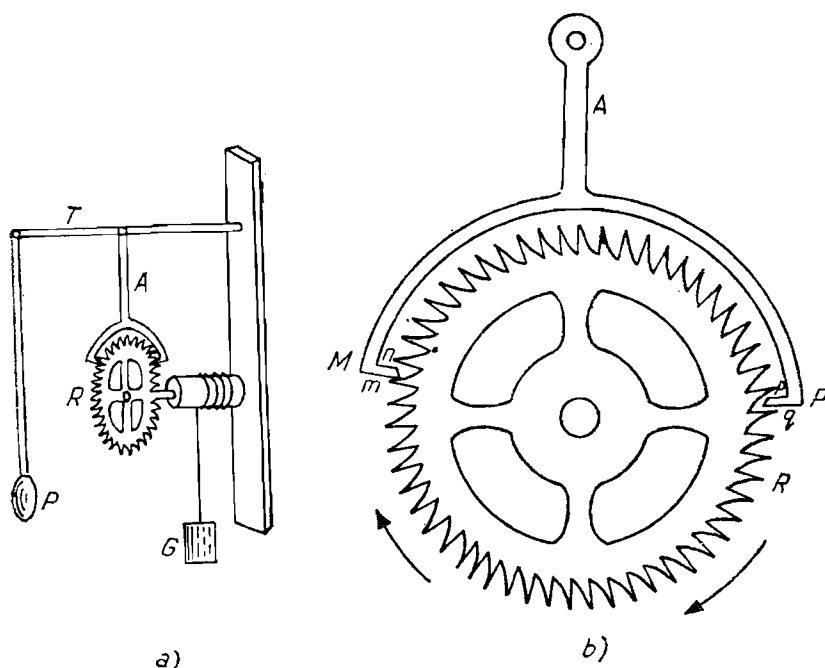


Fig. 1.3.25

La un orologiu dispozitivul motor este constituit dintr-o greutate suspendată printr-un fir care este înfășurat pe un cilindru orizontal când orologiu este „întors”. Cilindrul poartă mai multe roți dințate centrate pe axa sa. Fiecare dintre acestea are, la rîndul său, pe axă o roată mult mai mică care este antrenată de roata precedentă, mișcarea motorului fiind astfel transmisă din roată în roată, de la prima pînă la ultima.

O rotație lentă a primei determină o rotație rapidă a ultimei. Dacă ultima face o rotație completă într-un minut, roțile ale căror axe poartă acele ce indică minutele și orele fac respectiv o rotație într-o oră și o rotație în 12 ore.

Desigur că mișcarea unei greutăți în cădere este o mișcare accelerată care nu poate să dureze prea mult; or, este indispensabil ca mișcarea roților ce poartă acele indicatoare să fie o mișcare uniform circulară și care să dureze un timp mai lung, o zi spre exemplu. În acest scop mișcarea motorului este regularizată cu ajutorul unui dispozitiv numit regulator (fig. 1.3.25 a și 1.3.25 b). Când pendulul  $P$ , care bate secunda, oscilează de la stînga la dreapta, vîrfurile  $M$  și  $P$  al ancorei  $A$  se apropie de roata dințată și pătrund între doi dinți. Roata dințată este brusc imobilizată și o dată cu ea și mișcarea greutății  $G$ . Revenind de la dreapta la stînga o dată cu pendulul, vîrfurile  $M$  și  $P$  al ancorei deblochează roata  $R'$  și, sub acțiunea greutății  $G$ , aceasta se rotește ușor. Nu pentru mult timp însă, deoarece vîrfurile  $P$  se apropie de la rîndul său și, angajîndu-se între doi dinți, imobilizează din nou roata. După aceea vîrfurile  $P$  se depărtează ș.a.m.d.

Dacă presupunem că greutatea  $G$  rotește pe  $R$  după cum indică săgețile, de fiecare dată unul dintre dinții roții este eliberat; el acționează simultan asupra suprafeței  $m$  a vîrfurilor  $M$  și asupra suprafeței  $p$  a vîrfurilor  $P$ . În acest

mod. se transmit pendulului  $P$ , prin intermediul ancorei  $A$  și tije comune  $T$ , impulsuri care îi întrețin oscilația. În același timp sînt acționate și roțile care poartă acele indicatoare, mișcarea lor pentru intervalul de un minut fiind fracționată în 60 de mișcări succesive, sacadate, de durată scurtă, egală cu o secundă.

O altă aplicație importantă a pendulului este legată de determinarea precisă a accelerației gravitației. Într-un punct de pe Pămînt, de o anumită latitudine, măsurăm perioada  $T$  a unui pendul de lungime  $l$  și obținem pe  $g$  din relația  $g = 4\pi^2 l / T$ .

Determinarea experimentală a lui  $g$  cu ajutorul unui pendul, în diferite locuri de pe Pămînt, a arătat că acesta depinde de altitudine și în special de latitudinea geografică, fiind maximă la poli și minimă la ecuator (tabelul I.3).

TABELUL I.3.

$\theta$	$0^\circ$ (ecuator)	$45^\circ$	$90^\circ$ (pol)
$g$	9,7807	9,8061	9,8311

### 3.11. ATRACȚIA UNIVERSALĂ

În urma observațiilor astronomice, J. Kepler a stabilit în anul 1619 legile care descriu mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Acestea, numite și legile lui Kepler, sînt următoarele:

1. Planetele se mișcă pe elipse ce au Soarele situat într-unul din focare (fig. I.3.26 a);
2. Raza vectoare a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale (legea ariilor);
3. Pătratele perioadelor de revoluție sînt direct proporționale cu cuburile semiaxelor mari, adică

$$T^2 = CR^3 \quad (3.84)$$

unde prin perioada de revoluție  $T$  se înțelege timpul în care planeta descrie o elipsă completă.

Dacă raza vectoare a planetei descrie ariile  $SAA'$  și  $SBB'$  în intervale egale de timp, conform legii a doua a lui Kepler, aceste arii sînt egale (fig. I.3.26 a).

În cele ce urmează vom trata Soarele și planetele ca niște puncte materiale, avînd în vedere că dimensiunile lor sînt neglijabile în comparație cu distanțele ce le separă.

În anul 1687 I. Newton a reușit să explice legile mișcării planetelor presupunînd că Soarele exercită o forță de atracție asupra planetelor. Această forță de atracție se manifestă ca o forță centripetă ce obligă fiecare planetă în parte să se miște după o curbă închisă de forma unei elipse. Newton a demonstrat că dacă se admite că forța de atracție  $\vec{F}$  din partea Soarelui care acționează asupra planetei  $P$  este proporțională cu produsul maselor acestora și invers proporțională cu pătratul distanței  $r$  dintre ele, fiind îndreptată către Soare



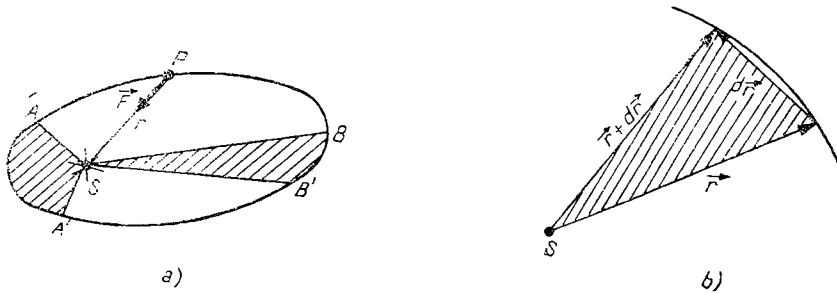


Fig. 1.3.26

după direcția  $PS$ , atunci pot fi explicate cele trei legi ale lui Kepler. S-a presupus deci că forța este dată de relația

$$F = K \frac{M_S m_P}{r^2}, \quad (3.85)$$

unde  $M_S$  este masa Soarelui,  $m_P$  masa planetei, iar  $K$  o constantă de proporționalitate.

Să căutăm să demonstrăm legile lui Kepler.

Pentru a scrie pe  $\vec{F}$  sub formă vectorială, să considerăm vectorul  $\vec{r}$  ca fiind îndreptat de la  $S$  la  $P$  și să avem în vedere că forța are direcția lui  $\vec{r}$  dar sensul contrar acestuia. Prin urmare

$$\vec{F} = -K \frac{M_S m_P}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -K \frac{M_S m_P}{r^3} \vec{r}. \quad (3.86)$$

Momentul acestei forțe față de punctul  $S$  este

$$\vec{\mathcal{M}}_F = \vec{r} \times \vec{F} = -K \frac{M_S m_P}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0.$$

Folosind ecuația (3.27) obținem

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad (3.87)$$

adică momentul cinetic  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  este constant în timp, păstrând aceleași mărime, direcție și sens în tot timpul mișcării.

Să considerăm acum o porțiune din traiectorie (fig. 1.3.26 b). Aria  $dS$  a triunghiului hașurat este dată de modulul vectorului

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$

unde  $\vec{dS}$  are direcția perpendiculară pe planul format de  $\vec{r}$  și  $\vec{dr}$  deci  $\vec{dS}$  este un vector perpendicular pe planul traiectoriei. Împărțind cu  $dt$ ,

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \times \vec{dr}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

sau

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2m_P} \vec{r} \times (m_P \vec{v}) = \frac{1}{2m_P} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m_P} \vec{L}, \quad (3.88)$$

de unde rezultă

$$d\vec{S} = \frac{1}{2m_P} \vec{L} dt. \quad (3.89)$$

Egalitatea (3.89) ne arată că direcția lui  $d\vec{S}$  coincide cu direcția lui  $\vec{L}$  despre care știm că este aceeași la orice moment de timp. Aceasta înseamnă că orientarea normalei la planul ce conține vectorii  $\vec{r}$ ,  $\vec{dr}$ , și  $\vec{r} + \vec{dr}$ , nu se modifică în cursul mișcării. Rezultă că orientarea planului care conține acești vectori este, de asemenea, mereu aceeași în tot cursul mișcării, traiectoria mișcării fiind deci o curbă ce se găsește întotdeauna în același plan, altfel spus este o curbă plană. Determinarea formei geometrice a acestei traiectorii plane necesită calcule mai complicate care arată că traiectoria este fie o elipsă, fie o parabolă, fie o hiperbolă, după cum viteza inițială a corpului aflat sub acțiunea forței (3.85) este mai mare sau mai mică (vezi și § 4.6). În cazul planetelor viteza inițială corespunde condițiilor de mișcare pe elipse.

În concluzie, forța de tipul (3.85) explică prima lege a lui Kepler.

Tot relația (3.89) ne arată că în timpul  $dt$  raza vectorie  $\vec{r}$  descrie o suprafață de mărime  $dS = \frac{L}{2m_P} dt$ . Integrând în raport cu timpul obținem mărimea suprafeței descrise în timpul  $t$ :

$$S = \frac{1}{2m_P} Lt. \quad (3.90)$$

Se vede imediat din ultima relație că în unitatea de timp, indiferent de poziția instantanee a planetei pe traiectorie, raza vectorie a acesteia descrie o suprafață de aceeași mărime  $S/t = L/2m_P$ .

Prin urmare, în intervale de timp egale raza vectorie a planetei descrie arii egale; am obținut deci și a doua lege a lui Kepler.

Deoarece demonstrarea legii a treia a lui Kepler este mai dificilă din punct de vedere matematic, vom simplifica lucrurile presupunând că traiectoria planetei este circulară (această situație corespunde sateliților artificiali care se mișcă pe orbite circulare). Egalând forța de atracție cu forța centripetă obținem

$$K \frac{m_P M_S}{R^2} = m_P \omega^2 R$$

unde am avut în vedere că distanța de la planetă la Soare este egală cu raza  $R$  a cercului. Rezultă de aici relațiile:

$$K M_S = \omega^2 R^3 = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3, \text{ deci } T^2 = \frac{4\pi^2}{K M_S} R^3.$$

Notînd constanta  $\frac{4\pi^2}{K M_S}$  cu  $C$ , obținem a treia lege a lui Kepler

$$T^2 = C R^3$$

deoarece, în mișcarea circulară, distanța de la un punct oarecare de pe circumferință pînă la centru este egală cu raza cercului și reprezintă totodată semi-axa mare a elipsei de excentricitate nulă.

Dacă ținem seama de dimensiunile Soarelui și planetelor, toată expunerea de mai sus rămîne valabilă, prin  $\vec{r}$  înțelegînd însă vectorul ce unește centrul Soarelui cu centrul planetei.

După cum se remarcă din relația (3.86), direcția forței de atracție trece întotdeauna prin centrul Soarelui. O astfel de forță, a cărei direcție trece printr-un punct fix, se numește *forță centrală*.

Pe lîngă atracția Soarelui planeta noastră este supusă și atracției din partea celorlalte planete din sistemul solar. Dintre toate acestea, cea mai importantă este însă forța de atracție  $F_L$  din partea Lunii, care este totuși de 127 de ori mai mică decît atracția solară (mai exact  $\frac{F_L}{F_S} = \frac{1}{127,415} = 0,0058$ ). Forțele de

atracție  $\vec{F}_S$  a Soarelui și  $\vec{F}_L$  a Lunii sînt dirijate respectiv după direcțiile ce unesc centrul Pămîntului cu centrele celor două corpuri cerești situate la distanțele  $D$  și respectiv  $d$  (fig. I.3.27).

Forța totală care acționează asupra Pămîntului este

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_L = K \frac{M_S m_P}{D^3} \vec{D} + K \frac{m_L m_P}{d^3} \vec{d},$$

deci, în mișcarea sa de revoluție, Pămîntul are accelerația

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_P} = K \frac{M_S}{D^3} \vec{D} + K \frac{m_L}{d^3} \vec{d}. \quad (3.91)$$

Conform principiului al treilea al mecanicii, Pămîntul acționează asupra Soarelui cu o forță  $(-\vec{F}_S)$  și asupra Lunii cu o forță  $(-\vec{F}_L)$ . Aceste forțe, care

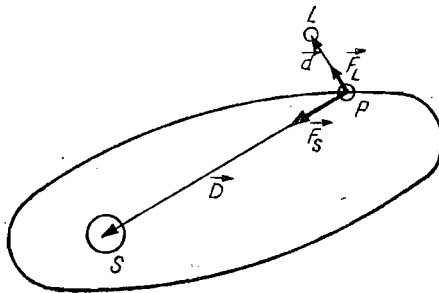


fig. 1.3.27

au punctele de aplicație în centrul Soarelui și respectiv în centrul Lunii, se comportă ca niște forțe centrifuge.

Newton a generalizat relațiile (3.85) și (3.86) considerînd că între orice pereche de corpuri din univers se manifestă o forță de atracție de forma

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (3.92)$$

unde  $m_1$  și  $m_2$  sînt masele celor două corpuri, iar  $r_{12}$  este distanța ce separă centrele lor. Constanta  $K$  se numește *constanta atracției universale*, fiind aceeași pentru toate perechile de corpuri ce se atrag.

Considerînd două corpuri de mase egale cu unitatea, situate la o distanță  $r_{12}$  egală tot cu unitatea, obținem:  $F = K$ . Constanta  $K$  este astfel numeric egală cu forța de atracție dintre două mase unitare ce se găsesc la o distanță egală cu unitatea una față de cealaltă. În sistemul SI valoarea sa măsurată este  $K = 6,66 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$ .

Datorită valorii mici a lui  $K$ , forța de atracție dintre două corpuri de pe suprafața Pămîntului este mică fiind dificilă determinarea ei experimentală. Atracția Pămîntului este însă importantă datorită masei mari a acestuia. Forța cu care Pămîntul atrage un corp reprezintă chiar greutatea acelui corp. Pentru un corp de masă  $m$  situat la suprafața Pămîntului se poate scrie egalitatea

$$mg_0 = K \frac{m m_P}{R^2}, \quad (3.93)$$

deci accelerația gravitației  $g_0$  la suprafața Pămîntului este

$$g_0 = K \frac{m_P}{R^2}. \quad (3.94)$$

Măsurînd pe  $g$  și știind că raza  $R$  a Pămîntului este cam de 6 400 km, putem obține masa  $m_P$  a planetei noastre:

$$m_P = \frac{g R^2}{K} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Cînd corpul de masă  $m$  se găsește la altitudinea (înălțimea)  $h$  de suprafața Pămîntului, distanța de la corp la centrul Pămîntului este  $R + h$ , relația (3.93) devine

$$mg_h = K \frac{mm_P}{(R + h)^2}, \quad (3.93 \text{ a})$$

unde  $g_h$  reprezintă accelerația gravitației la altitudinea  $h$ :

$$g_h = K \frac{m_P}{(R + h)^2} = \frac{K m_P}{R^2} \frac{R^2}{(R + h)^2} = g_0 \left( \frac{R}{R + h} \right)^2. \quad (3.94)$$

Relația (3.94) ne arată că accelerația gravitației scade cu altitudinea. Aceasta înseamnă că greutatea unui corp nu este de fapt constantă, așa cum eram obișnuți să o considerăm, ci variază cu altitudinea. Totuși, pentru corpuri care cad pe Pămînt de la o înălțime  $h$ , mult mai mică decît raza Pămîntului  $R$ , putem considera pe  $g$  ca fiind constant în tot timpul căderii. Într-adevăr, termenul  $\frac{1}{1 + h/R} \simeq 1 - \frac{h}{R}$  pentru  $\frac{h}{R} \ll 1$  (vezi Anexa, tabelul A.2), deci

$$\left( \frac{1}{1 + h/R} \right)^2 \simeq \left( 1 - \frac{h}{R} \right)^2 \simeq 1 - 2 \frac{h}{R},$$

unde am neglijat din nou termenul în  $h^2/R^2$ . Introducînd ultima relație în (3.94) obținem

$$g_h = g_0 (1 - 2h/R). \quad (3.94 \text{ a})$$

Folosind ultima formulă, să calculăm accelerația gravitației la înălțimea  $h = 1$  km avînd în vedere că  $R \simeq 6400$  km:

$$g_{h=1\text{km}} = g_0 (1 - 2/6400) = g_0 (1 - 1/3200).$$

Dacă neglijăm pe  $1/3200$  față de 1 nu facem o eroare prea mare, astfel că putem considera că  $g_{h=1\text{km}} \simeq g_0$  și deci accelerația gravitației, ca și greutatea, sînt practic constante în tot cursul căderii corpului de la altitudinea de 1 km. Dacă  $h < R$ , însă de același ordin de mărime, nu mai pot fi neglijate termenii conținînd puteri superioare ale lui  $h/R$ , iar dacă  $h > R$  nu mai este valabilă dezvoltarea (vezi discuția din A.3, *Anexă*).

Dacă în fiecare punct dintr-o anumită regiune a spațiului se exercită o forță, spunem că în acea regiune există un cîmp de forțe. Astfel, forța de atracție a Pămîntului se exercită în fiecare punct din jurul său. Spunem atunci că Pămîntul creează un cîmp de forțe gravitaționale, sau mai pe scurt un *cîmp gravitațional* sau *gravific*.

După cum am văzut, toate corpurile din univers exercită forțe de atracție asupra celorlalte corpuri. Din acest motiv trebuie să considerăm că fiecare corp dă naștere unui cîmp gravific într-o anumită regiune a spațiului. Putem spune că masa fiecărui corp exprimă nu numai proprietățile sale inerțiale, dar și proprietățile sale gravifice.

Asupra unui corp de masă  $m$  ce se găsește în punctul  $T$  (fig. I.3.28) acționează forța gravifică  $\vec{F} = -K \frac{m_P m}{r^3} \vec{r}$ . După cum se observă, din fig. I.3.28, vectorul  $\vec{r}$  este dirijat de la  $C$  la  $T$ . Mărimea acestei forțe nu depinde numai

de masă  $m_p$  a Pământului ce creează câmpul gravific, dar și de mărimea  $m$  a masei corpului ce se găsește în câmp. Vrem să introducem o mărime care să caracterizeze doar proprietățile câmpului gravific al Pământului, fără să depindă de caracteristicile corpurilor ce se află în acest câmp. O astfel de mărime ne-ar permite să comparăm între ele diferite câmpuri gravifice. Pentru aceasta considerăm acțiunea diverselor câmpuri asupra unei aceleiași mase luate drept masă etalon. Cu cât forța care acționează asupra masei etalon este mai mare, cu atât câmpul respectiv este mai intens. Convențional, s-a luat drept masă etalon unitatea de masă, adică  $m = 1 \text{ kg}$  în SI și  $m = 1 \text{ g}$  în CGS. Mărimea

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -K \frac{m_p}{r^2} \vec{r}, \quad (3.96)$$

se numește *intensitatea câmpului gravific* al masei  $m_p$ ; cu cât acest vector este mai mare, cu atât acțiunea câmpului asupra unei mase este mai puternică.

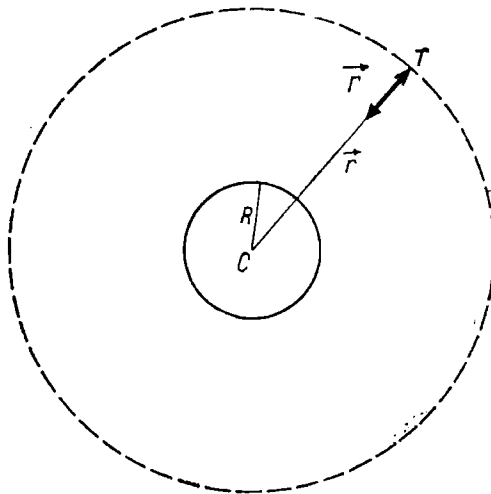


Fig. I.3.28

Din definiția dată se vede că  $\vec{\Gamma}$  are aceeași expresie ca și accelerația gravitației  $\vec{g}$ , semnificația sa fizică este însă alta: vectorul  $\vec{\Gamma}$  ne dă forța cu care câmpul acționează asupra unității de masă.

În fig. I.3.28 este reprezentată intensitatea câmpului gravitațional al Pământului, care are același modul în punctele egal depărtate de centrul Pământului, adică pe suprafața unei sfere cu centrul în  $C$ . Din acest motiv se spune că  $\vec{\Gamma}$  are simetrie sferică.

### 3.12. SISTEME NEINERTIALE. FORȚE DE INERTIE

După cum am arătat în paragraful 3.3, mișcarea rectilinie și uniformă a unui sistem de referință inerțial nu poate fi pusă în evidență prin nici o experiență mecanică, deoarece, în diferite sisteme inerțiale, fenomenele mecanice

se desfășoară analog. Altfel se prezintă însă lucrurile în cazul unui sistem care se mișcă accelerat, adică al unui sistem *neinerțial*.

În continuare, vom prezenta modul în care evoluează procesele mecanice în sisteme neinerțiale, punând în evidență felul în care accelerația sistemului influențează fenomenele mecanice care au loc în el.

Pentru aceasta să considerăm un corp  $A$  de masă  $m$  care într-un sistem inerțial  $S_i$  are accelerația  $\vec{a}_i$ . Prin urmare, în sistemul  $S_i$ , asupra corpului acționează o forță  $\vec{F}_i = m\vec{a}_i$ . Să vedem acum ce se întâmplă în sistemul propriu  $S_A$  al corpului  $A$ , adică în sistemul de referință față de care corpul  $A$  este în repaus și care este, evident, un sistem neinerțial care are accelerația  $\vec{a}_0 = \vec{a}_i$  față de  $S_i$ .

Accelerația  $\vec{a}$  a corpului măsurată în sistemul său propriu de către un observator din acest sistem este nulă. Dacă admitem că legea a doua a mecanicii este valabilă într-un sistem neinerțial, atunci în sistemul propriu suma forțelor care acționează asupra corpului este nulă, deoarece  $\vec{a} = 0$ . Rezultă că în sistemul  $S_A$ , pe lângă forța  $\vec{F}_i$ , apare o forță suplimentară  $\vec{F}_0$  astfel încît

$$\vec{F}_i + \vec{F}_0 = 0, \quad (3.97)$$

deci

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_i = -m\vec{a}_0. \quad (3.98)$$

Forța suplimentară  $\vec{F}_0$ , care trebuie introdusă în sistemul de referință neinerțial pentru ca și în acest sistem să fie îndeplinit principiul al doilea al mecanicii, se numește *forță de inerție* sau *forță inerțială*. În unele cărți această forță este numită *forță complementară*, termenul de forță de inerție fiind folosit pentru forța de reacțiune cu care acționează un corp aflat în repaus cînd asupra sa se exercită o forță care-l scoate din starea de repaus (de exemplu cînd vrem să împingem un corp greu, simțim forța de reacțiune a acestuia asupra brațelor). Această forță este numită de unii autori forță de inerție). Desigur că întrebuițarea aceleiași denumiri pentru forțe diferite stîrnește confuzii; în cele ce urmează vom utiliza în mod consecvent termenul de forță de inerție pentru forța suplimentară (3.98) care apare în sistemul accelerat.

Pînă acum am considerat cazul particular în care corpul  $A$  se află în repaus față de sistemul accelerat, din care cauză accelerația sistemului accelerat față de cel inerțial coincide cu accelerația  $\vec{a}_i$  pe care o are corpul  $A$  față de  $S_i$ . Vom considera, în continuare, un sistem neinerțial  $S_a$  față de care corpul  $A$  are o accelerație  $\vec{a}$  diferită de zero, iar  $S_a$  are față de  $S_i$  o mișcare rectilinie accelerată de accelerație  $\vec{a}_0$  diferită de accelerația  $\vec{a}_i$  pe care o are corpul față de  $S_i$ . După cum se vede din fig. 1.3.29, pentru un punct oarecare  $P$  se poate scrie  $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_a$ , deci

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{v}_a,$$

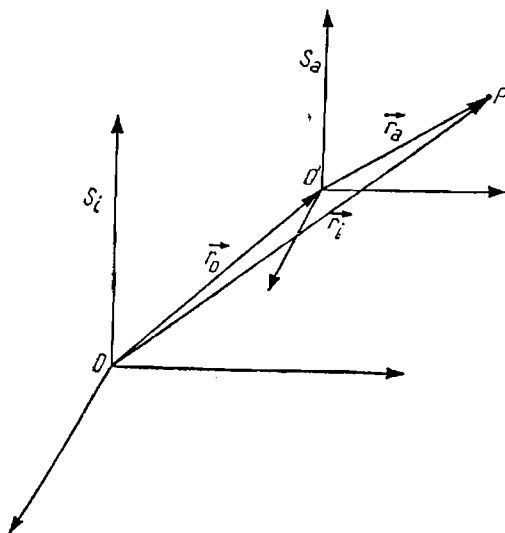


Fig. 1.3.29

iar accelerația va fi

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{a}. \quad (3.99)$$

Înmulțind cu  $m$  obținem

$$m\vec{a} = m(\vec{a}_i - \vec{a}_0).$$

Pentru a putea interpreta, conform principiului al doilea al mecanicii, termenul  $m\vec{a}$  ca forța  $\vec{F}_a$  care acționează în sistemul  $S_a$ , trebuie să aibă loc egalitatea:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_i + \vec{F}_0, \quad (3.100)$$

unde

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0 \quad (3.101)$$

este forța inerțială care trebuie introdusă în sistemul accelerat  $S_a$  pentru a avea îndeplinit principiul al doilea al mecanicii. Se observă că această forță este proporțională cu accelerația  $\vec{a}_0$ , a lui  $S_a$  față de  $S_i$ , care se mai numește și accelerație de transport. Dacă  $\vec{a}_0 = \vec{a}_i$  relația (3.101) coincide cu (3.98).

În cazul în care sistemul inerțial  $S_i$  nu acționează nici o forță, deci  $\vec{a}_i = 0$ , relația (3.101) devine

$$\vec{F}_a = \vec{F}_0 = -m\vec{a}_0 \quad (3.102)$$

adică în  $S_a$  asupra corpului acționează doar forța inerțială  $\vec{F}_0$ .

Să considerăm câteva cazuri simple pentru a exemplifica cele discutate mai sus.



Fie un vehicul  $V$  care se poate deplasa rectiliniu, fără trepidații, pe un plan orizontal și fie sfera  $S$  de masă  $m$  care se poate mișca fără frecare pe podeaua vehiculului (fig. I.3.30a). Să presupunem că vehiculul a căpătat o accelerație  $\vec{a}_0$  față de suprafața Pământului pe care îl considerăm ca un sistem inerțial  $S_i$ . Sfera, nefiind solidar legată de vagon, nu va căpăta accelerația  $\vec{a}_0$  a acestuia. Din acest motiv, dacă vagonul se găsea în repaus înainte de a fi accelerat, observatorul din  $S_i$  constată că după accelerarea vagonului sfera rămâne pe loc, vagonul mișcându-se cu accelerația  $\vec{a}_0$  față de sferă, din care cauză distanța dintre aceasta și peretele din stînga al vagonului scade în timp pînă cînd vor veni în contact. Din acel moment peretele vagonului va antrena sfera în mișcarea accelerată (fig. I.3.30b). Într-adevăr, peretele va acționa cu o forță  $\vec{F}$  asupra sferei imprimîndu-i accelerația  $\vec{a}_0$ , deci  $\vec{F} = m\vec{a}_0$ . La rîndul ei sfera acționează asupra peretelui, conform principiului al treilea al mecanicii, cu o forță egală ca mărime și de sens contrar ( $-\vec{F}) = -m\vec{a}_0 = \vec{F}_0$ . Asemănător se vor desfășura lucrurile dacă sfera și vagonul s-ar fi mișcat rectiliniu și uniform cu viteza  $\vec{v}_0$ , înainte de accelerarea vagonului.

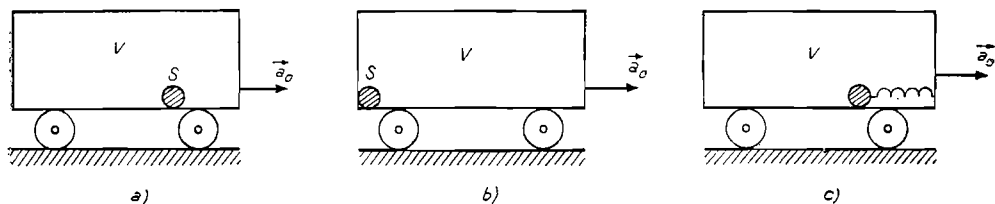


Fig. I.3.30

Observatorul din  $S_i$  ar fi constatat că sfera își păstrează viteza  $\vec{v}_0$ , rămînînd în urma vagonului a cărui viteză devine din ce în ce mai mare. Pînă la urmă sfera va veni în contact cu peretele din stînga, timpul necesar pentru aceasta va fi bineînțeles mai mare decît în exemplul precedent. În continuare, pentru observatorul fix de pe sol, sfera se mișcă cu accelerația  $\vec{a}_0$ . Pentru a înțelege mai bine experiența descrisă mai sus, propunem cititorului o experiență simplă pe care o poate efectua fără dificultate: pe o foaie de hîrtie (care joacă rolul podelei vagonului!) să așeze o gumă și apoi să tragă brusc de un capăt al hîrtiei. Va constata că obiectul așezat pe hîrtie va rămîne practic pe loc. Am folosit cuvîntul practic deoarece în realitate corpul așezat pe hîrtie va fi puțin antrenat de mișcarea hîrtiei. În cazul ideal în care nu ar apărea nici un fel de interacțiune la suprafața de contact dintre hîrtie și obiect, antrenarea obiectului ar fi nulă, acesta rămînînd în repaus.

Pînă acum am comentat „impresiile” observatorului ce se află în sistemul inerțial. Să analizăm însă concluziile pe care le-ar trage un observator ce se află în interiorul vagonului, în repaus față de pereții acestuia. Pentru acesta pereții vehiculului sînt în repaus din care cauză el consideră că mișcarea relativă dintre sferă și vagon are loc pentru că sfera se mișcă cu accelerația ( $-\vec{a}_0$ ) față de vagon. El nu-și poate explica acest lucru decît prin acțiunea unei forțe ce se aplică sferei, de valoare  $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ , care este tocmai forța

de inerție (vezi ecuația 3.102). După ce sfera atinge peretele ea rămîne în repaus pentru observatorul din  $S_a$ , deci în acest sistem accelerația sferei a devenit nulă. Observatorul din  $S_a$  atribuie acest lucru unei forțe  $\vec{F} = m\vec{a}_0$  ce se aplică sferei din partea peretelui și care compensează forța inerțială  $\vec{F}_0$ .

Comparînd concluziile celor doi observatori, din  $S_i$  și  $S_a$ , remarcăm că după ce sfera vine în contact cu peretele vagonului ambii observatori constată existența forței  $\vec{F} = m\vec{a}_0$  ce se aplică sferei. Dar, în timp ce observatorul din  $S_i$  consideră forța  $\vec{F}_0 = -\vec{F}$  ca fiind *aplicată peretelui* și constată că sfera se mișcă accelerat sub acțiunea forței  $\vec{F}$ , observatorul din  $S_a$  consideră forța  $\vec{F}_0 = -\vec{F}$  ca fiind *aplicată sferei*, ea compensînd forța  $\vec{F}$ , astfel că sfera rămîne în repaus.

Să presupunem acum că sfera este legată printr-un resort elastic de peretele vagonului (fig. I.3.30c). Observatorul din  $S_i$  constată din nou tendința sferei de a-și păstra starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă anterioară accelerării vagonului și care are drept consecință o rămînere în urmă a sferei față de vagon. Din această cauză se produce întinderea resortului care duce la apariția unei forțe elastice  $\vec{F}_e$ . Această forță este aplicată sferei comunicîndu-i o accelerație  $\vec{a}_0$  egală cu cea a vagonului ceea ce determină corpul să se miște solidar cu vehiculul. Dacă asupra sferei acționează forța elastică  $\vec{F}_e = m\vec{a}_0$ , conform principiului al treilea, corpul acționează la rîndul său asupra resortului cu o forță egală ca mărime și de sens contrar:  $\vec{F}_0 = -\vec{F}_e = -m\vec{a}_0$ .

Observatorul ce se află în vagon constată și el întinderea resortului deci conchide că asupra corpului acționează forța elastică  $\vec{F}_e = m\vec{a}_0$ . Deoarece pentru acest observator sfera este în repaus, el este obligat să considere că asupra sferei mai acționează o forță  $\vec{F}_0 = -\vec{F}_e = -m\vec{a}_0$  care este tocmai forța de inerție. Cunoscînd constanta elastică a resortului și măsurîndu-i alungirea, observatorul din  $S_a$  are posibilitatea să găsească valoarea forței elastice  $\vec{F}_e$ , determinînd astfel experimental forța de inerție  $\vec{F}_0 = -\vec{F}_e$ .

Să analizăm acum apariția forțelor de inerție într-un sistem accelerat ce se găsește în mișcare de rotație. Să considerăm în acest scop că vagonul din fig. I. 3.30a se mișcă după un arc de cerc cu o viteză unghiulară  $\omega$  constantă. Observatorul din  $S_i$  consideră că mișcarea pe arc de cerc se efectuează datorită forței centripete  $\vec{F}_{cp}$  cu care șina acționează asupra roților, care la rîndul lor acționează asupra șinei cu o forță  $\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cp}$  care este tocmai forța centrifugă. Asupra sferei nu acționează nici o forță, pereții vagonului execută față de sferă o mișcare cu accelerația  $\vec{a}_0$  egală cu accelerația centripetă  $\vec{a}_{cp}$  imprimată de  $\vec{F}_{cp}$ .

Pentru observatorul din vagon, ce consideră că toate corpurile solidar legate de vagon sînt în repaus, sfera se mișcă cu accelerația  $(-\vec{a}_0) = (-\vec{a}_{cp})$ .

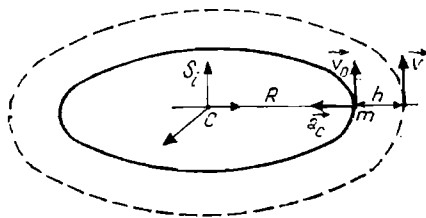


Fig. I.3.31

În sistemul accelerat asupra sferei acționează deci forța de inerție  $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_g = -m\vec{a}_{cp}$  care se mai numește și forță centrifugă de inerție. Atragem atenția că forța centrifugă de inerție nu are nimic comun cu forța centrifugă propriu-zisă: prima apare în sistemul accelerat  $S_a$  și se aplică sferei, cea de a doua apare în sistemul inerțial  $S_i$  și se aplică șinei.

Oricine a călătorit cu trenul a simțit că la o cotitură bruscă are tendința de a se deplasa într-o parte, spre exteriorul cotiturii. Acest lucru se întâmplă deoarece călătorul își menține viteza de dinaintea cotiturii, în timp ce vagonul capătă o accelerație. În raport cu sistemul de referință legat de tren, această deplasare relativă se explică prin acțiunea forței centrifuge de inerție.

Să presupunem că un corp de masă  $m$  se mișcă, față de un sistem inerțial cu originea în centrul  $C$  al Pământului, cu viteza liniară  $v_0$ . Vom considera traiectoria sa ca fiind circulară și situată imediat deasupra ecuatorului terestru, adică la distanța  $R$ , egală cu raza Pământului, de centrul  $C$  al acestuia (fig. I.3.31). Sistemul accelerat  $S_a$ , față de care corpul este în repaus, are o accelerație centripetă  $a_{cp} = v_0^2/R$ , dirijată după raza  $R$  către  $C$  (raportată la sistemul inerțial  $S_i$ ). În sistemul  $S_a$  punctul material este supus forței  $\vec{G} + (-m\vec{a}_{cp})$ , unde  $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_{cp}$  este forța centrifugă de inerție care are aceeași direcție însă sens opus lui  $\vec{G}$ , dirijată tot radial către  $C$ . Pentru ca să nu aibă loc căderea corpului pe Pământ trebuie îndeplinită condiția  $\vec{G} + (-m\vec{a}_{cp}) = 0$  sau  $\vec{G} = m\vec{a}_{cp}$  deci  $mg = mv_0^2/R$  și  $v_0 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s}$ . Viteza  $v_0 = 7,9 \text{ km/s}$ , necesară corpului pentru a nu cădea pe Pământ, adică pentru a deveni un satelit al Pământului, este numită prima viteză cosmică.

Dacă satelitul se mișcă deasupra Pământului la o altitudine  $h$ , pe o orbită circulară, viteza va trebui să fie  $v = \sqrt{g_h(R+h)}$ , unde  $g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$  este accelerația gravitației la înălțimea  $h$ . Se obține astfel

$$v = v_0 \sqrt{\frac{R}{R+h}}, \quad (3.103)$$

deci viteza care trebuie comunicată unui corp pentru ca acesta să devină satelit artificial este cu atît mai mică cu cît  $h$  este mai mare.

Dacă viteza satelitului este mai mare decît cea necesară menținerii lui pe o traiectorie circulară, satelitul se va mișca după o elipsă care este cu atît mai alungită cu cît viteza sa este mai mare.

Se demonstrează că pentru viteze mai mari de 11,2 km/s, forța centrifugă de inerție devine suficient de mare pentru a scoate satelitul din câmpul gravitațional al Pământului, transformându-l într-un satelit artificial al Soarelui, adică într-o planetă artificială. Viteza de 11,2 km/s este numită a doua viteză cosmică.

### 3.13. FORȚE DE INERȚIE LA SUPRAFAȚA PĂMÎNTULUI

După cum am văzut în § 3.11, Pământul execută o mișcare de revoluție în jurul Soarelui sub acțiunea forțelor de atracție gravitațională ale diverselor corpuri cerești din sistemul nostru solar. Un rol dominant revine, datorită masei sale mari, Soarelui. De asemenea, trebuie luată în considerație acțiunea Lunii avînd în vedere distanța relativ mică dintre Pământ și satelitul său natural. Am determinat totodată și valoarea accelerației  $\vec{a}$  pe care o are Pământul datorită mișcării de revoluție față de un sistem inerțial  $S_i$  legat de Soare:

$$\vec{a}_i = K \frac{M_S}{D^3} \vec{D} + K \frac{M_L}{d^3} \vec{d}. \quad (3.104)$$

Fie un punct material de masă  $m$  ce se găsește în repaus față de Pământ într-un punct  $A$  (fig. I.3.32a). În sistemul inerțial  $S_i$  al Soarelui, asupra punctului material acționează forțele gravitaționale ale Soarelui, Lunii și Pământului. Rezultanta acestor forțe, în sistemul inerțial, este

$$\vec{F}_i = K \frac{mM_S}{D'^3} \vec{D}' + K \frac{mM_L}{d'^3} \vec{d}' + \vec{G}.$$

Să stabilim acum ce forțe constată un observator aflat pe Pământ, adică în sistemul accelerat. Pentru aceasta trebuie să avem în vedere relația (3.100) care ne arată că în sistemul accelerat  $S_a$ , al Pământului în cazul nostru, pe lângă forța  $\vec{F}_i$  din  $S_i$  mai apare forța de inerție  $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ . Aici  $\vec{a}_0$  este accelerația luată față de  $S_i$  pentru sistemul accelerat în raport cu care punctul material este în repaus. Dacă nu ar exista mișcarea de rotație diurnă a Pământului în jurul axei polilor,  $\vec{a}_0$  ar fi dat chiar de relația (3.104). Datorită rotației diurne este evident că sistemul accelerat, față de care punctul material este în repaus, execută o mișcare de rotație în jurul axei polilor cu o accelerație pe care o notăm cu  $\vec{a}_c$ , la care se adaugă accelerația  $\vec{a}$  a mișcării de revoluție dată de (3.104). Din acest motiv, accelerația  $\vec{a}_0$  față de  $S_i$  este

$$\vec{a}_0 = \vec{a} + \vec{a}_c = K \frac{M_S}{D^3} \vec{D} + K \frac{M_L}{d^3} \vec{d} + \vec{a}_c. \quad (3.105)$$

Rezultanta forțelor care se aplică în  $S_a$  punctului material este

$$\vec{F}_a = \vec{F}_i - m\vec{a}_0, \quad (3.106)$$

$$\vec{F}_a = K \frac{mM_S}{D'^3} \vec{D}' + K \frac{mM_L}{d'^3} \vec{d}' + \vec{G} - K \frac{mM_S}{D^3} \vec{D} - K \frac{mM_L}{d^3} \vec{d} - m\vec{a}_c. \quad (3.107)$$

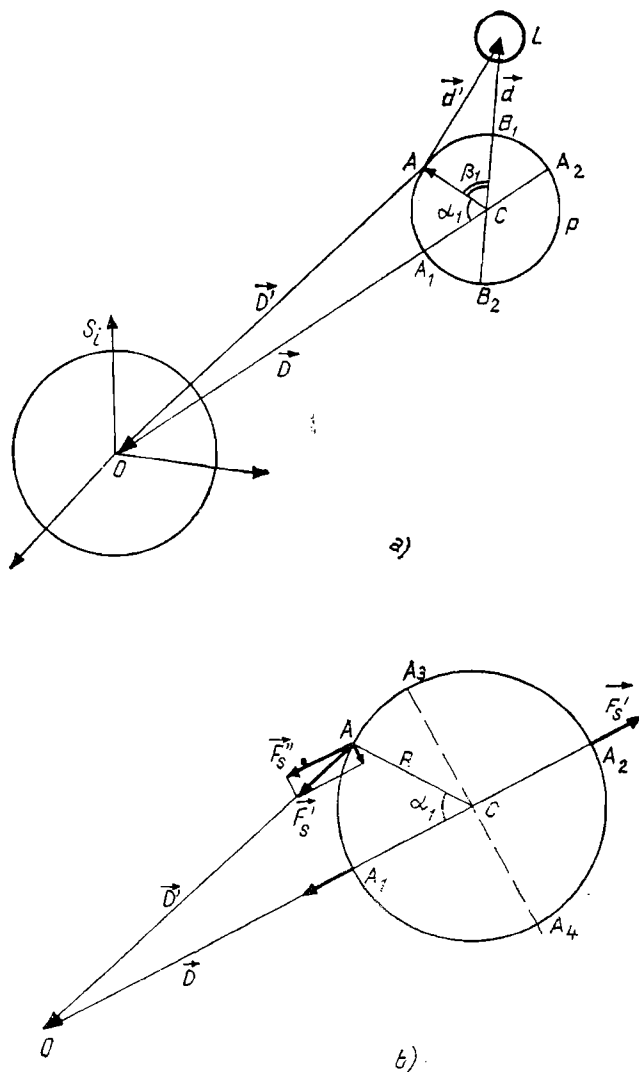


Fig. 1.3.32

Termenii care provin din  $(-ma_0)$  ne dau forțele de inerție ce acționează fa suprafața Pământului.

După cum se vede sînt destul de multe forțe care acționează asupra noastră. Vom grupa termenii într-un mod mai convenabil

$$\vec{F}_a = KmM_S \left( \frac{\vec{D}'}{D'^3} - \frac{\vec{D}}{D^3} \right) + KmM_L \left( \frac{\vec{d}'}{d'^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right) + \vec{G} - m\vec{a}_0. \quad (3.108)$$

Prima pereche de termeni exprimă interacția cu Soarele, a doua pereche interacția cu Luna,  $\vec{G}$  este greutatea corpului, iar ultimul termen exprimă influența mișcării diurne de rotație a Pământului.

Vom analiza separat prima paranteză, care descrie forța  $\vec{F}'_S$  cu care acționează Soarele asupra punctului material de la suprafața Pământului:

$$\vec{F}'_S = KmM_S \left( \frac{\vec{D}'}{D'^3} - \frac{\vec{D}}{D^3} \right). \quad (3.109)$$

Notăm cu  $\vec{F}''_S$  componenta lui  $\vec{F}'_S$  după direcția  $\vec{CO}$ . Pentru a evita calculele lungi, vom evalua componenta  $\vec{F}''_S$  ce acționează asupra unui punct material ce se găsește în  $A_1$ . Deoarece pentru punctul  $A_1$  vectorul  $\vec{D}'$  are direcția și sensul lui  $\vec{D}$ , rezultă că în acest punct forța  $\vec{F}'_S$  are direcția dreptei ce unește centrul Pământului  $C$  cu centrul Soarelui  $O$ , adică  $\vec{F}'_S = \vec{F}''_S$  în punctul  $A_1$ . Deoarece  $D' = D - R$ , obținem

$$(F'_S)_{A_1} = (F''_S)_{A_1} = KM_S m \left[ \frac{1}{(D - R)^2} - \frac{1}{D^2} \right],$$

sau

$$(F'_S)_{A_1} = (F''_S)_{A_1} = \frac{KM_S m}{D^2} \left[ \frac{1}{(1 - R/D)^2} - 1 \right]. \quad (3.110)$$

Avînd în vedere că  $R \simeq 6 \cdot 10^3$  km iar  $D \simeq 1,5 \cdot 10^8$  km, rezultă

$$\frac{R}{D} \simeq 4 \cdot 10^{-5} \ll 1.$$

Ținînd seama de valoarea mică a raportului  $R/D$ , avem  $(1 - R/D)^{-1} \simeq 1 + R/D$  (vezi tabelul A.2), deci

$$\frac{1}{(1 - R/D)^2} \simeq \left( 1 + \frac{R}{D} \right)^2 \simeq 1 + 2 \frac{R}{D}, \quad (3.111)$$

unde am neglijat din nou termenul în  $R^2/D^2$ . Introducînd în (3.110) rezultă

$$(F'_S)_{A_1} = (F''_S)_{A_1} = \frac{KM_S m}{D^2} 2 \frac{R}{D} = 2 \frac{KM_S m R}{D^3}. \quad (3.112)$$

Dacă presupunem acum că punctul material de masă  $m$  se găsește în  $A_2$ , vom avea  $D' = D + R$ , iar forța care acționează în acest punct este

$$(F'_S)_{A_2} = (F''_S)_{A_2} = KM_S m \left[ \frac{1}{(D + R)^2} - \frac{1}{D^2} \right] = \frac{KM_S m}{D^2} \left[ \frac{1}{(1 + R/D)^2} - 1 \right]. \quad (3.110 \text{ a})$$

Conform tabelului A.2 avem  $(1 + R/D)^{-1} \simeq 1 - R/D$ , deci

$$\frac{1}{(1 + R/D)^2} \simeq \left( 1 - \frac{R}{D} \right)^2 \simeq 1 - 2 \frac{R}{D}.$$

Folosind această expresie, obținem

$$(F_s^*)_{A_2} = (F_s^*)_{A_1} = -2 \frac{KM_S m R}{D^3}. \quad (3.112b)$$

Semnul minus din expresia de mai sus ne arată că în punctul  $A_2$  forța este dirijată spre partea opusă Soarelui (vezi fig. I.3.32 b).

Într-un punct  $A$  oarecare, a cărui rază vectoare face unghiul  $\alpha_1$ , cu dreapta  $OC$ , forța  $\vec{F}'_s$  are direcția și sensul dreptei  $AO$ . Descompunem această forță după direcția paralelă cu  $\vec{CO} = \vec{D}$  și direcția perpendiculară pe aceasta și notăm cu  $\vec{F}''_s$ , componenta sa după  $\vec{CO}$ . Calculul acestei componente se face în principiu la fel ca și pentru punctele  $A_1$  și  $A_2$ . Totuși, datorită faptului că direcția lui  $\vec{D}'$  nu mai coincide cu cea a lui  $\vec{D}$ , calculul este ceva mai lung, așa încît dăm direct rezultatul:

$$F_s'' = 2 \frac{KM_S}{D^3} R \cos \alpha_1. \quad (3.113)$$

Punctului  $A_1$  îi corespunde  $\alpha_1 = 0$ , iar lui  $A_2$  valoarea  $\alpha_1 = \pi$ , relația (3.113) trecînd în (3.112), respectiv (3.112 a) cu aceste valori ale unghiurilor.

Cînd componenta  $F_s''$  este pozitivă înseamnă că aceasta are același sens cu  $\vec{CO}$ , adică este îndreptată spre Soare, iar cînd  $F_s''$  este negativă, forța are sensul contrar lui  $\vec{CO}$ . Semnul componentei depinde însă doar de semnul lui  $\cos \alpha_1$ ; după cum arată relația (3.113). În consecință, forța  $F_s''$  este dirijată către Soare în toate punctele ce aparțin emisferei dinspre Soare, (fig. I.3.32a) care au unghiul  $\alpha_1$  cuprins între 0 și  $\frac{\pi}{2}$ , adică  $\cos \alpha_1 > 0$  pentru toate aceste puncte.

Punctele emisferei din dreapta au însă  $\alpha_1$  cuprins între  $\frac{\pi}{2}$  și  $\pi$  din care cauză  $\cos \alpha_1 < 0$ , adică în aceste puncte forța  $\vec{F}_s''$  este îndreptată în direcția opusă Soarelui.

Valoarea absolută maximă a lui  $F_s''$  se obține pentru  $\cos \alpha_1 = \pm 1$ , adică pentru  $\alpha_1 = 0$  respectiv  $\alpha_1 = \pi$ , deci în punctele  $A_1$ , respectiv  $A_2$ . În punctele  $A_3$  și  $A_4$  componenta  $\vec{F}_s''$ , paralelă cu  $\vec{CO}$ , se anulează.

Din discuția de mai sus rezultă că punctele materiale de pe emisfera  $A_3A_1A_4$  (mai apropiată de Soare) au tendința unei depărtări de suprafața Pămîntului, fiind atrase spre Soare din ce în ce mai puternic pe măsură ce ne apropiem de  $A_1$  iar punctele materiale de pe emisfera  $A_3A_2A_4$  au de asemenea tendința unei depărtări de suprafața Pămîntului, fiind respinse de Soare cu atît mai puternic cu cît ne apropiem mai mult de  $A_2$ .

Dacă în regiunea punctelor  $A_1$  și  $A_2$  există mase întinse de apă (mări sau oceane), atunci nivelul apei se înalță producînd fenomenul marelor sau cum se mai spune, fluxul și refluxul. Ridicarea maximă a nivelului apelor (fluxul) într-un punct dat de pe Pămînt are loc de două ori în decurs de 24 de ore: o dată cînd punctul vine în dreptul Soarelui în poziția  $A_1$  și a doua oară cînd el vine în partea opusă în  $A_2$ , iar scăderea nivelului (refluxul) are loc tot de 2 ori în 24 de ore, în pozițiile  $A_3$  și  $A_4$ .

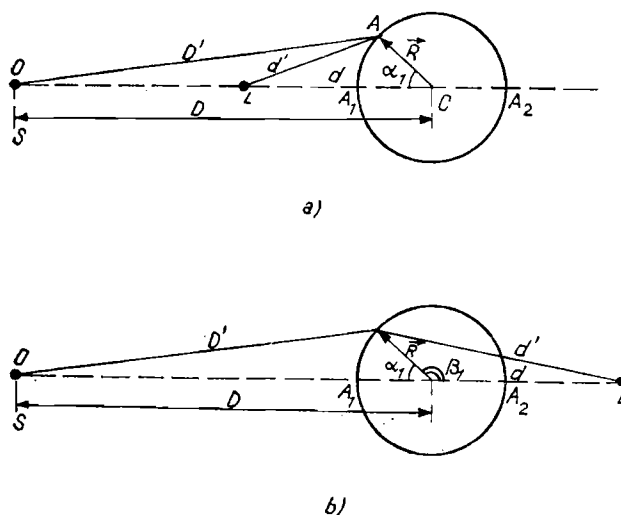


Fig. 1.3.33

Forța  $\vec{F}_L = KmM_L \left( \frac{\vec{d}'}{d'^3} - \frac{\vec{d}}{d^3} \right)$  datorită Lunii produce un fenomen analog. Într-adevăr, descompunând această forță după direcția  $\vec{CL}$  care unește centrul Pământului cu centrul Lunii și după direcția perpendiculară pe aceasta, obținem în același mod, pentru valoarea componentei paralele cu linia centrelor, expresia

$$F'_L = 2KmM_L \frac{R}{d^3} \cos \beta_1 \quad (3.113 a)$$

care este asemănătoare ecuației (3.113). În loc de unghiul  $\alpha_1$  dintre raza vectorială  $\vec{R}$  a punctului material și  $\vec{CO}$  intervine unghiul  $\beta_1$  dintre  $\vec{R}$  și  $\vec{CL}$  (vezi fig. 1.3.32 a).

Prin urmare mareele se datoresc atât Lunii cât și Soarelui. Se observă că acțiunea combinată a celor două corpuri cerești provoacă mareele cele mai puternice atunci când Soarele, Luna și Pământul se găsesc pe aceeași linie.

Când Luna se găsește între  $O$  și  $C$ , (fig. 1.3.33a), dreptele  $\vec{CO}$  și  $\vec{CL}$  au aceeași direcție și sens, iar  $\alpha_1 = \beta_1$  deci forța totală are componenta după axa centrelor egală cu suma celor două componente corespunzătoare, adică

$$F'_{total} = F'_S + F'_L = 2KmR \cos \alpha_1 \left( \frac{M_S}{D^3} + \frac{M_L}{d^3} \right). \quad (3.114)$$

Dacă  $C$  se găsește între Soare și Lună (fig. 1.3.33b), dreptele orientate  $\vec{CO}$  și  $\vec{CL}$  au aceeași direcție, dar sensurile lor sînt opuse. Să nu uităm că din ecuația (3.104) extragem componenta lui  $\vec{F}_S$  după  $\vec{CO}$ , iar din (3.113 a) componenta lui  $\vec{F}_L$  după  $\vec{CL}$ . Pentru a vedea care este acțiunea combinată a celor două



forțe, trebuie să considerăm proiecțiile lor pe același segment orientat. Pentru aceasta trebuie să proiectăm pe  $\vec{F}_L$  nu pe  $\vec{CL}$  ci pe  $\vec{LC}$  care are aceeași direcție și același sens cu  $\vec{CO}$ . Deoarece  $\vec{CL} = -\vec{LC}$ , proiecția lui  $\vec{F}_L$  pe  $\vec{CL}$  va fi diferită de cea pe  $\vec{LC}$  doar printr-un semn, deci în loc de (3.113 a) vom avea

$$F_L^* = 2KmM_L \frac{R}{d^3} \cos \beta_1. \quad (3.113 \text{ b})$$

Pe linia centrelor  $OCL$  va acționa deci forța

$$F_{total}^* = 2KmM_S \frac{R}{D^3} \cos \alpha_1 - 2KmM_L \frac{R}{d^3} \cos \beta_1.$$

Avînd în vedere că  $\beta_1 = \pi - \alpha_1$ , deci  $\cos \beta_1 = -\cos \alpha_1$ , vom obține

$$F_{total}^* = 2KmR \cos \alpha_1 \left( \frac{M_S}{D^3} + \frac{M_L}{d^3} \right),$$

adică aceeași valoare ca cea dată de ecuația (3.109). Cum Luna efectuează o rotație completă în jurul Pămîntului în 28 de zile, rezultă că în acest interval de timp au loc două marea maxime, corespunzător celor două situații descrise mai înainte.

Înlocuind pe  $M_S$ ,  $M_L$ ,  $D$  și  $d$  prin valorile lor, se poate constata că  $\frac{M_L}{d^3} = 2,32 \frac{M_S}{D^3}$ . Aceasta înseamnă că acțiunea Lunii este mai puternică decît

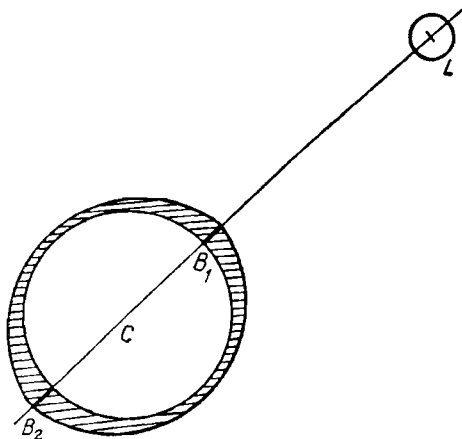


Fig. 1.3.34

cea a Soarelui, în ciuda faptului că masa sa este mult mai mică decît cea a Soarelui, deoarece este mult mai apropiată de Pămînt. Regiunea hașurată din fig. 1.3.34 reprezintă mările și oceanele terestre; partea mai bombată

indică ridicarea mai pronunțată a nivelului apei în vecinătatea punctelor  $B_1$  și  $B_2$  de pe dreapta  $CL$ .

A mai rămas să studiem ultimii doi termeni din relația (3.109) dintre care unul este greutatea  $\vec{G} = m\vec{g}$ , iar celălalt  $\vec{F} = -m\vec{a}$  este forța centrifugă de inerție care apare datorită mișcării de rotație a Pământului (fig. 1.3.35).

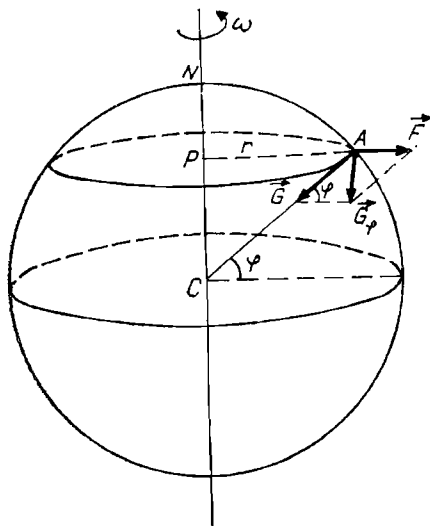


Fig. 1.3.35

Accelerația  $\vec{a}_c$ , care este chiar accelerația centripetă, este dirijată de-a lungul razei  $r$  a cercului de latitudine geografică  $\varphi^*$ , către centrul de rotație  $P$ .

Din acest motiv forța  $\vec{F}$  este îndreptată către exterior, fiind perpendiculară pe axa polilor și are expresia  $F = m\omega^2 r = m\omega^2 R \cos \varphi$ , unde  $\omega$  este viteza unghiulară a Pământului. Se poate arăta că  $F \ll G$ . Într-adevăr

$$\frac{F}{G} = \frac{m\omega^2 R \cos \varphi}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g} \cos \varphi$$

și deoarece  $\omega = 2\pi/T$  cu  $T = 24$  ore  $= 86400$  s,  $R = 6,36 \cdot 10^5$  m,  $g = 9,831 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , rezultă  $\frac{F}{G} = \frac{\cos \varphi}{289}$ , deci  $F \ll \frac{G}{289}$ .

Forța centrifugă de inerție se însumează vectorial cu greutatea  $\vec{G}$  a corpului care este îndreptată spre centrul Pământului. Din acest motiv, la latitudinea  $\varphi$  nu se măsoară de fapt greutatea  $\vec{G}$  ci o greutate „aparentă”  $\vec{G}_\varphi$ , unde indicele  $\varphi$  arată că această greutate aparentă depinde de latitudinea  $\varphi$ :

$$\vec{G}_\varphi = \vec{G} + \vec{F}. \quad (3.115)$$

\* Unghiul de latitudine  $\varphi$  este unghiul pe care-l face raza Pământului  $CA = R$  cu planul cercului ecuatorial.

Un observator care încearcă să măsoare experimental accelerația gravitației  $g = G/m$ , nu are posibilitatea să-l măsoare pe  $G$ , ci doar pe  $G_\varphi$ , așa încât el determină de fapt o accelerație

$$g_\varphi = G_\varphi/m. \quad (3.116)$$

Pentru a stabili o formulă pentru  $g_\varphi$  trebuie să determinăm modulul forței  $\vec{G}_\varphi$ , care se obține aplicând teorema lui Pitagora triunghiului format de vectorii  $\vec{G}$ ,  $\vec{F}$  și  $\vec{G}_\varphi$ :

$$G_\varphi^2 = G^2 + F^2 - 2FG \cos \varphi = G^2 \left( 1 - 2 \frac{F}{G} \cos \varphi + \frac{F^2}{G^2} \right).$$

Având în vedere că  $\frac{F}{G} = \frac{\cos \varphi}{289}$ ,  $\frac{F^2}{G^2} = \left( \frac{\cos \varphi}{289} \right)^2 \ll 1$  poate fi neglijat, deci

$$G_\varphi = G \left( 1 - 2 \frac{F}{G} \cos \varphi \right)^{1/2} \simeq G \left( 1 - \frac{F}{G} \cos \varphi \right), \text{ pentru că } \frac{F}{G} \cos \varphi < 1.$$

Înlocuind raportul  $F/G$  prin valoarea sa,  $\cos \varphi/289$ , obținem

$$g_\varphi = g \left( 1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi \right), \quad (3.117)$$

formulă care ne dă variația lui  $g_\varphi$  cu latitudinea geografică.

La poli ( $\varphi = \pi/2$ )  $g_\varphi$  coincide cu  $g$ , iar măsurătorile dau  $g_{pol} = g = 9,831 \text{ m/s}^2$ . La ecuator ( $\varphi = 0$ )  $g_\varphi$  are valoarea minimă  $g_{ec} = 9,831 (1 - 1/289) = 9,797 \text{ m/s}^2$ .

Variația cu latitudinea a accelerației gravitației constituie unul din fenomenele mecanice care pun în evidență rotația diurnă a Pământului în jurul axei polilor.

Datorită faptului că Pământul nu este o sferă perfectă, fiind turtit la poli, accelerația gravitației la ecuator are în realitate o valoare mai mică:  $g_{ec} = 9,780 \text{ m/s}^2$ .

Dacă se ține seama de turtirea la poli a Pământului, accelerația gravitației la latitudinea  $\varphi$  nu mai este dată de (3.117) ci de relația

$$g_\varphi = g \left( 1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi \right). \quad (3.117 \text{ a})$$

Reamintim că toate rezultatele de la acest paragraf au fost stabilite în ipoteza că punctul material se află în repaus față de suprafața Pământului. Dacă punctul material are o viteză relativă  $v_r$  față de suprafața Pământului, pe lângă forțele de inerție descrise, apare încă o forță de inerție, numită *forța Coriolis*, dată de relația  $\vec{F}_c = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}$ . Deoarece stabilirea expresiei de mai sus necesită calcule relativ lungi, nu vom intra în amănunte. Datorită valorii mici a lui  $\omega$ , această forță nu dă efecte importante decât pentru valori mari ale lui  $v_r$ . Aceste efecte pot fi însă măsurate, ele constituind noi dovezi ale mișcării de rotație a Pământului.

### 3.14. DINAMICA PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

În paragrafele anterioare am studiat problema mișcării unor corpuri a căror masă rămâne constantă în tot timpul mișcării. În natură întâlnim însă de multe ori corpuri de masă variabilă. De exemplu, toate vehiculele cu combustibil (tren, avion, automobil) au o masă care se micșorează pe măsură ce se consumă combustibilul. Chiar și masa Pământului este variabilă, ea crescând mereu din cauza prafului cosmic și a meteoriților care cad pe el. În aceste cazuri, și în multe altele, variația masei este foarte mică în raport cu masa totală a corpului și ea poate fi neglijată, astfel că aplicarea ecuațiilor discutate în paragrafele anterioare duce la rezultate corecte. Cu totul alta este situația mișcării vehiculelor cu reacție. Astfel de aparate consumă o cantitate mare de combustibil într-un timp scurt, ceea ce duce la o importantă variație a masei, de care va trebui să ținem seama în studiul mișcării.

În continuare, ne vom ocupa de studiul mișcării unui punct de masă variabilă în timp.

Fie punctul material  $M$  de masă  $m$ ; variația masei sale se poate face fie prin alipirea fie prin desprinderea unor particule de punctul  $M$ . Să considerăm pe rând cele două cazuri.

a) **Cazul alipirii.** Să presupunem că în timpul  $\Delta t$  se alipește de punctul  $M$ , care se mișcă cu viteza  $\vec{v}$ , particula  $P$ , de masă foarte mică  $\Delta m$ , având inițial viteza absolută  $\vec{u}^*$ . Înainte de alipire sistemul punct material  $M$  + particula  $P$  avea impulsul  $\vec{p}_0 = m\vec{v} + \Delta m\vec{u}$ . După alipire, masa punctului  $M$  a devenit  $m + \Delta m$ , iar viteza sa  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ , astfel că impulsul va fi  $\vec{p}_1 = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v})$ . Neglijând termenul  $\Delta m \cdot \Delta\vec{v}$ , mic în raport cu ceilalți, variația impulsului în timpul  $\Delta t$  va fi

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = m\Delta\vec{v} + (\vec{v} - \vec{u})\Delta m. \quad (3.118)$$

Împărțind această relație cu  $\Delta t$  și făcând  $\Delta t$  să tindă la zero obținem

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt}. \quad (3.119)$$

Conform legii a doua a mecanicii, derivata impulsului în raport cu timpul,  $\frac{d\vec{p}}{dt}$ , este egală cu rezultanta forțelor exterioare (§ 3.2) care acționează asupra sistemului. Dacă notăm cu  $\vec{v}_R = \vec{u} - \vec{v}$  viteza relativă a particulei  $P$  față de punctul  $M$  înainte de alipire, relația (3.118) devine

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_t + \vec{v}_R \frac{dm}{dt}, \quad (3.120)$$

unde  $\vec{F}_t$  reprezintă suma forțelor exterioare care acționează asupra punctului  $M$  de masă variabilă.

---

\* Considerăm vitezele luate în raport cu un reper oarecare fix.

b) **Cazul desprinderii.** Considerăm că în timpul  $\Delta t$  masa punctului  $M$  scade de la  $m$  la  $m + \Delta m$  ( $\Delta m$  fiind deci negativ), viteza sa modificându-se de la  $\vec{v}$  la  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ . Impulsul înainte de desprindere este  $\vec{p}_0 = m\vec{v}$ , iar după desprindere  $\vec{p}_1 = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + (-\Delta m)\vec{u}$  deoarece particula desprinsă are masa  $-\Delta m$  ( $\Delta m < 0$ ) și viteza  $\vec{u}$ . Obținem de aici, neglijând din nou termenul  $\Delta m \cdot \Delta \vec{v}$ , variația impulsului:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = m\Delta \vec{v} + \Delta m(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F}_t \Delta t.$$

Prin împărțirea cu  $\Delta t$ , la limita  $\Delta t \rightarrow 0$  reobținem ecuația (3.120). Această ecuație se numește ecuația fundamentală a mișcării punctului de masă variabilă și a fost obținută pentru prima oară de I. V. Mescerski.

Din ecuația (3.120) se vede că am putea considera valabilă ecuația (3.9) și pentru mișcarea punctului de masă variabilă dacă, la rezultanta forțelor exterioare, am adăuga o forță suplimentară, numită *forță de reacție* și definită prin

$$\vec{F}_R = \frac{dm}{dt} \vec{v}_R. \quad (3.121)$$

Este posibil acum să discutăm unele probleme legate de *mișcarea rachetei*. În interiorul rachetei se găsește o cameră de ardere ( $A$ ) în care, prin arderea combustibilului, se formează un jet de gaze care este expulzat printr-un orificiu (ajutaj)  $B$  (fig. I.3.36).

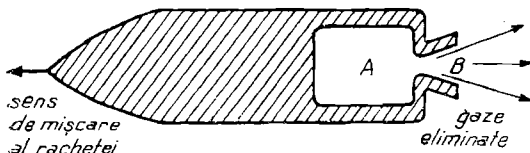


Fig. I.3.36

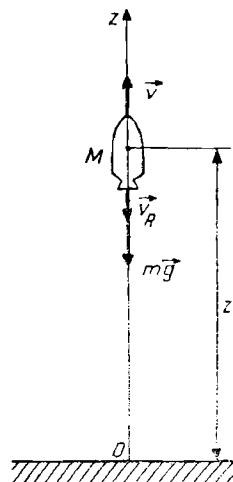


Fig. I.3.37

Să considerăm acum cazul particular în care o rachetă este aruncată vertical din punctul  $O$  de la suprafața Pământului, cu viteza inițială  $v_0$  (fig. I.3.37). La un moment  $t$  ea se va afla la distanța  $z$  și va avea viteza  $v$  și masa  $m$  ( $m$  mai mic decât masa inițială  $m_0$ , deoarece prin expulzarea jetului de gaze masa rachetei scade).

Ecuatia de mişcare a rachetei noastre va fi ecuaţia (3.120) proiectată pe axa  $Oz$ :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_R \frac{dm}{dt}, \quad (3.122)$$

unde  $v_R$  este viteza cu care este expulzat jetul de gaze (viteza relativă a particulelor desprinse), pe care o presupunem constantă. În ecuaţia (3.122) am pus semnul minus în membrul drept deoarece proiecţiile pe  $Oz$  a greutăţii rachetei şi a vitezei relative sînt negative. Împărţind (3.122) cu  $m$  şi ţinînd seama că  $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln m)$ , putem scrie

$$\frac{dv}{dt} = -g - v_R \frac{d}{dt} (\ln m),$$

sau, ţinînd seama că  $v_R$  este constantă şi deci poate fi introdusă sub semnul de derivare, obţinem ecuaţia diferenţială

$$\frac{d}{dt} (v + v_R \ln m) = -g.$$

Integrînd ultima ecuaţie obţinem

$$v + v_R \ln m = -gt + C.$$

Constanta de integrare  $C$  este determinată din condiţiile iniţiale (la  $t = 0$  avem  $v = v_0$  şi  $m = m_0$ ):

$$C = v_0 + v_R \ln m_0,$$

astfel că expresia finală a vitezei este

$$v = v_0 - gt + v_R \ln \frac{m_0}{m}. \quad (3.123)$$

Să observăm că în deducerea ecuaţiei (3.123) am neglijat acţiunea forţelor de frecare etc., considerînd că  $F_t$  este egal cu greutatea rachetei. De asemenea am presupus  $g$  constant deşi, în realitate, acesta variază cu altitudinea, variaţie care pentru o rachetă ce pleacă de la suprafaţa Pămîntului şi se depărtează rapid la distanţe considerabile (mai mari de 1 000 km) poate fi apreciabilă.

Spaţiul parcurs în timpul  $t$  se obţine integrînd din nou ecuaţia (3.123):

$$z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + v_R \int_0^t \ln \frac{m_0}{m} dt. \quad (3.124)$$

Pentru a găsi contribuția ultimului termen din (3.124) trebuie să cunoaștem modul în care variază masa în timp. De exemplu, pentru o variație exponențială a masei,  $m = m_0 e^{-\alpha t}$  cu  $\alpha = \text{const.}$ , relațiile (3.123) și (3.124) devin:

$$v = v_0 - gt + \alpha v_R t$$

$$z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} \alpha v_R t^2.$$

Înălțimea maximă se află punînd condiția de anulare a vitezei

$$v_0 - (g - \alpha v_R) t_m = 0$$

și introducînd pe  $t_m$  în expresia lui  $z$  obținem

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g - \alpha v_R}.$$

Forța reactivă (conform ecuației 3.121) este dată de

$$F_R = - \frac{dm}{dt} v_R = m_0 \alpha v_R e^{-\alpha t} = m \alpha v_R.$$

Fiind pozitivă,  $F_R$  este deci o forță de propulsie. Această forță este variabilă în timp însă produce o accelerație constantă, deoarece

$$a = \frac{F}{m} = \alpha v_R = \text{constantă}.$$

În cazul în care neglijăm și forța de gravitație\* obținem relația

$$v = v_0 + v_R \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.125)$$

cunoscută sub numele de formula lui Tsiolkovski sau ecuația rachetei.

Folosind această formulă se poate evalua viteza pe care o capătă racheta după ce întreg combustibilul a fost consumat. Notînd cu  $m'$  masa rachetei la sfîrșitul procesului de ardere, cu  $m_c$  masa combustibilului consumat, masa inițială este evident

$$m_0 = m' + m_c. \quad (3.126)$$

Din (3.125) se vede că viteza rachetei atinge valoarea maximă cînd  $m$  are valoarea cea mai mică ( $m = m'$ ) și notînd această viteză cu  $v'$  obținem

$$v' = v_0 + v_R \ln \frac{m_0}{m'} = v_0 + v_R \ln N, \quad (3.127)$$

---

\* Practic forța de gravitație este neglijabilă pentru poziții mult depărtate de orice planetă, sau, de exemplu, pentru poziția dintre Pămînt și Lună în care atracția Pămîntului este compensată de atracția Lunii.

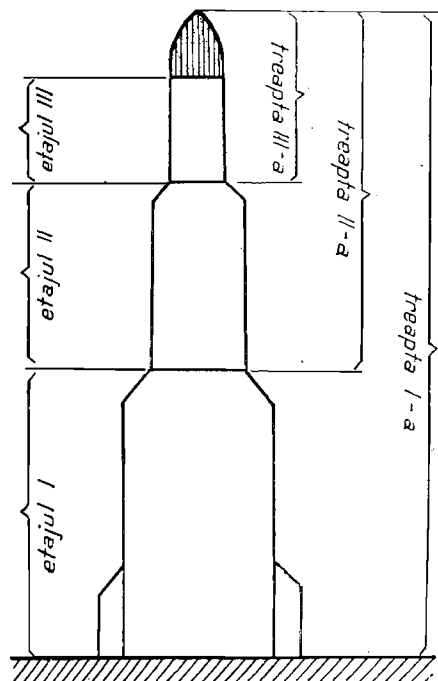


Fig. 1.3.38

unde  $N$  se numește raport de masă. Este evident că, în realitate, viteza rachetei la sfârșitul arderii (perioada activă) este mai mică decât valoarea dată de (3.127) datorită acțiunii forțelor de greutate, rezistenței aerului etc. Totuși valoarea  $v'$  dată de (3.127) reprezintă un important indice de performanță al rachetei și se numește viteză caracteristică. Din (3.127) rezultă că viteza caracteristică este proporțională cu viteza de expulzare a gazelor și este independentă de modul în care variază masa cu timpul, fiind funcție doar de masa inițială și respectiv finală a rachetei.

Cititorul a auzit în nenumărate rînduri că pentru lansarea unui satelit sau a expedițiilor pe Lună sînt folosite rachete cu mai multe trepte. Cu ajutorul formulei (3.127) se poate lămuri și această problemă.

Să considerăm lansarea unui satelit de masă  $m_s$ . În afara masei utile  $m_s$ , în general, mai este necesară o masă de circa 2,5 ori mai mare reprezentînd corpul rachetei, motoare, aparate de dirijat, rezervoare goale etc., astfel că  $m' = m_s + 2,5 m_s = 3,5 m_s$ . Pentru a transporta masa  $m'$  este necesară o cantitate de combustibil cu o masă de circa 3 ori mai mare ( $m_c = 3 m'$ ), adică  $m_0 = 4 m'$  și deci  $N = 4$ . Ținînd seama că pentru combustibilii chimici viteza de expulzare a gazelor este cuprinsă între 2 000 și 3 000 m/s, vom considera  $v_R = 2,5$  km/s și, dacă  $v_0 = 0$ , din (3.127) obținem

$$v' = 2,5 \ln 4 \simeq 3,55 \text{ km/s.}$$

Știm însă (vezi § 3.12) că pentru a lansa un satelit este necesară o viteză egală cu prima viteză cosmică  $v = 7,9$  km/s. Pe de altă parte, trebuie să ținem seama că datorită forței de gravitație și frecării cu aerul avem pierderi de



viteză pe traiectorie, care sînt evaluate la aproximativ 2,6 km/s. Rezultă deci că pentru a lansa un satelit, viteza caracteristică a rachetei ar trebui să fie  $v' \simeq 10,5$  km/s, adică de circa trei ori mai mare ca cea indicată mai sus.

Să vedem acum ce se întîmplă în cazul rachetei în trepte. O astfel de rachetă este compusă din mai multe rachete legate între ele, numite etaje propulsoare sau, simplu, etaje (fig. I.3.38). Fiecare etaj conține motoare, instalații, rezervoare etc. și combustibil. Racheta funcționează în felul următor: la început arde combustibilul din etajul I, imprimînd întregului ansamblu o viteză  $v_1$  după care etajul I se desprinde de rachetă. În acest moment se aprinde combustibilul din etajul II, aducînd complexul la viteza  $v_2$  după care se desprinde și acest etaj. Lucrurile se repetă la fel pentru fiecare etaj. Vom considera că pentru fiecare treaptă raportul dintre masa utilă și masa elementelor de construcție este 2,5 ( $m' = m_u + 2,5 m_u$ ), iar pentru transportarea masei  $m'$  este necesară o cantitate de combustibil de trei ori mai mare ( $m_0 = m' + 3m' = 4m'$ ) deci  $N = 4$ . În tabelul I.4 sînt date aceste mase pentru o rachetă cu trei trepte:

TABELUL I.4

	Treapta a III-a	Treapta a II-a	Treapta I	Racheta totală
masa utilă	1 $m_s$	14 $m_s$	196 $m_s$	1 $m_s$
masa elementelor de construcție a rachetei } $m'$	2,5 $m_s$	35 $m_s$	490 $m_s$	527,5 $m_s$
masa combustibilului ( $m_i$ )	10,5 $m_s$	147 $m_s$	2 058 $m_s$	2 215,5 $m_s$
masa totală ( $m_0$ )	14 $m_s$	196 $m_s$	2 744 $m_s$	2 744 $m_s$
$N$	4	4	4	

Aplicînd succesiv formula lui Țiolkovski (3.127) pentru fiecare treaptă, presupunînd că viteza de expulzare a gazelor  $v_R$  este aceeași pentru toate etajele propulsoare, obținem:

$$v_1 = 2,5 \ln 4 \simeq 3,55 \text{ km/s,}$$

$$v_2 = v_1 + 2,5 \ln 4 \simeq 7,15 \text{ km/s,}$$

$$v_3 = v_2 + 2,5 \ln 4 \simeq 10,70 \text{ km/s.}$$

Deci, după ce a acționat și etajul III, obținem o viteză caracteristică finală suficient de mare pentru a plasa satelitul pe orbită. Să observăm că dacă am considera că nu avem o rachetă în trepte, ci o rachetă simplă, cu rapoartele de masă corespunzătoare rachetei totale, atunci  $N = 2744/528,5 = 5,19$  și deci

$$v' \simeq 2,5 \ln 5,19 \simeq 4,12 \text{ km/s.}$$

Astfel, deși am construi o rachetă cu o masă de 2744 ori mai mare ca cea a satelitelui pe care vrem să-l lansăm, viteza caracteristică obținută ar fi mai mică decît jumătate din cea necesară.

Să observăm că pentru o rachetă cu  $n$  trepte viteza caracteristică finală se obține ca și mai înainte,

$$\begin{aligned}v_1 &= v_R \ln N, \\v_2 &= v_1 + v_R \ln N = 2v_R \ln N, \\&\vdots \\&\vdots \\v_n &= nv_R \ln N,\end{aligned}$$

considerînd din nou aceeași viteză de expulzare  $v_R$  și același raport de masă  $N$  pentru fiecare treaptă. Ultima relație ne arată că, prin mărirea lui  $v_R$  și a numărului de trepte, pot fi realizate rachete cu un raport mai convenabil între masa utilă și masa totală a rachetei.

## 4. Lucrul mecanic și energia

### 4.1. DEFINIREA LUCRULUI MECANIC

Să presupunem că asupra unui corp  $C$  acționează, într-un interval de timp  $\Delta t$ , o forță constantă  $\vec{F}$  (fig. I.4.1). Datorită acestei forțe corpul va parcurge în timpul  $\Delta t$  o distanță  $s$  între punctele  $A$  și  $B$ . Deoarece forța  $\vec{F}$  este aplicată corpului tot timpul, se poate spune că punctul de aplicație al forței s-a deplasat în același interval de timp tot pe distanța  $s$ . În general, direcția de deplasare nu coincide cu direcția forței care întreține mișcarea. De exemplu, un vagonet nu se poate mișca decât în lungul șinelor când este tras, cu ajutorul unui lanț, de un om care nu stă între șine ci în exteriorul lor. Forța de tracțiune a omului nu va avea aceeași direcție cu direcția deplasării. Din acest motiv vom considera deplasarea ca fiind caracterizată și prin direcție și sens, adică o vom descrie printr-un vector  $\vec{s}$ .

Din aceste exemple se vede că o aceeași forță poate produce efecte mecanice diferite. Apare astfel necesitatea de a introduce, pe lângă forță și deplasare (efectul ei), o mărime care să caracterizeze acțiunea forțelor. Această mărime este *lucrul mecanic*  $\mathcal{L}$  definit prin relația

$$\mathcal{L} = F_s s, \quad (4.1)$$

adică lucrul mecanic  $\mathcal{L}$  efectuat în timpul  $\Delta t$  este egal cu produsul dintre distanța  $s$ , pe care se deplasează punctul de aplicație al forței în acest timp, și componenta  $F_s$  a forței pe direcția deplasării.

Avînd în vedere că  $F_s = F \cos \alpha$ , relația (4.1) poate fi exprimată prin produsul scalar al vectorilor  $\vec{F}$  și  $\vec{s}$ :

$$\mathcal{L} = F s \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (4.2)$$

Din relația (4.2) se vede imediat că lucrul mecanic este maxim atunci cînd  $\alpha = 0$ , adică în cazul în care deplasarea se face după direcția forței  $\vec{F}$ .

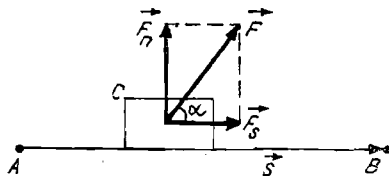


Fig. I.4.1

Pentru  $\alpha = \pi/2$  rezultă  $\mathcal{L} = 0$ , deci forța  $\vec{F}$  nu efectuează lucru mecanic dacă direcția sa este perpendiculară pe direcția după care se poate mișca corpul asupra căruia acționează. De exemplu, dacă împingem un vagonet dintr-o parte, perpendicular pe direcția șinelor, nu vom reuși să-l punem în mișcare, ci eventual îl vom răsturna.

Dacă  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ ,  $\cos \alpha < 0$  deci  $\mathcal{L} < 0$ . În această situație, componenta  $F_s$  este orientată în sens opus deplasării, cum se întâmplă, de exemplu, în cazul forței de frecare  $\vec{F}_f$ . Într-adevăr,  $\vec{F}_f$  avînd întotdeauna un sens opus mișcării, proiecția sa  $(F_f)_s$  pe direcția mișcării este  $(F_f)_s = F_f \cos \pi = -F_f$ , deci lucrul mecanic  $\mathcal{L}_f$  al forței de frecare este

$$\mathcal{L}_f = -F_f s. \quad (4.3)$$

Presupunînd că mișcarea corpului este efectul acțiunii forței  $\vec{F}$ , lucrul mecanic total  $\mathcal{L}_{corp}$ , efectuat de forțele ce acționează asupra corpului și care reprezintă lucrul mecanic primit de corp, este dat de suma dintre lucrul mecanic efectuat de  $\vec{F}$  și cel efectuat de forța de frecare  $\vec{F}_f$ :

$$\mathcal{L}_{corp} = F s \cos \alpha - F_f s \quad (4.4)$$

sau

$$\mathcal{L}_{corp} + F_f s = F s \cos \alpha. \quad (4.4 a)$$

Ultima egalitate ne arată că de fapt nu întregul lucru mecanic ( $F s \cos \alpha$ ) efectuat de forța  $F$  este transmis corpului, deoarece o parte ( $F_f s$ ) servește pentru compensarea lucrului mecanic negativ al forței de frecare. Aceasta înseamnă că de fapt forța de frecare nu efectuează un lucru mecanic pentru deplasarea corpului ci, dimpotrivă, o parte din lucrul mecanic al forței  $\vec{F}$ , numită și forță activă, este folosit pentru deplasarea, atît a corpului cît și a punctului de aplicație al forței de frecare, pe direcția și în sensul mișcării. Afirmatia aceasta se înțelege și mai bine dacă în relația (4.4) considerăm  $\alpha = 0$ , adică deplasarea are loc după direcția lui  $F$ :

$$\mathcal{L}_{corp} = (F - F_f) s. \quad (4.4 b)$$

Se observă că, în prezența forței de frecare  $\vec{F}_f$ , totul se petrece ca și cum forța activă care deplasează corpul este dată de diferența  $(F - F_f)$ , din care cauză, evident, lucrul mecanic transmis corpului este mai mic decît în condițiile absenței forței de frecare. Pentru a putea deplasa corpul este necesar deci ca  $F \geq F_f$ , adică  $\mathcal{L}_{corp} \geq 0$ .

Forța  $\vec{F}_f$  ca și alte forțe care se opun deplasării sînt numite forțe rezistente sau pasive.

În general, cînd lucrul mecanic al unei forțe este negativ, înseamnă că forța respectivă se opune mișcării corpului, fiind necesară prezența a încă unei forțe care să efectueze un lucru mecanic pozitiv, cel puțin egal în mărime cu cel al forței rezistente.

Lucrul mecanic primit de corp,  $\mathcal{L}_{corp}$ , este numit *lucru mecanic util*, iar cel efectuat de forța activă — *lucru mecanic consumat*. Prin definiție, raportul

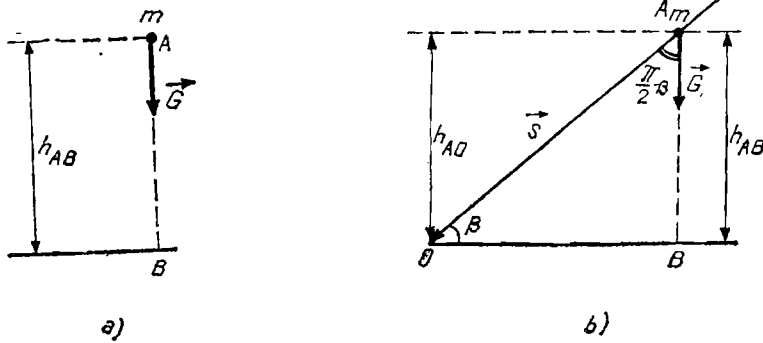


Fig. 1.4.2

dintre lucrul mecanic util și cel consumat, notat nu  $\eta$ , se numește *randament*. Avînd în vedere relația (4.4a),

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{corp}}{Fs \cos \alpha} = \frac{F \cos \alpha - F_f}{F \cos \alpha}. \quad (4.5)$$

Dacă  $\alpha = 0$ ,

$$\eta = \frac{F - F_f}{F}. \quad (4.5a)$$

Să considerăm un corp de masă  $m$  care cade liber între două puncte  $A$  și  $B$ , între care este o diferență de înălțime  $h_{AB} = h_A - h_B$ , presupusă mică, pentru a putea considera forța de greutate  $\vec{G}$  constantă (fig. 1.4.2a). Deoarece  $\vec{G}$  are direcția deplasării  $s = h_{AB}$ , lucrul mecanic efectuat de forța de greutate  $G$  pe parcursul  $AB$ , este

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = Gh_{AB} = mg(h_A - h_B) > 0. \quad (4.6)$$

Cînd corpul se deplasează pe un plan înclinat ce face unghiul  $\beta$  cu orizontala, plecînd de la aceeași înălțime  $h$ ,  $\vec{G}$  face un unghi  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$  cu vectorul deplasare  $\vec{s}$  (fig. 1.4.2b). Dacă neglijăm frecarea, lucrul mecanic de la  $A$  la  $O$  va fi

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow O} = Gs \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = Gs \sin \beta.$$

Dar  $s \sin \beta = h_{AB} = h_{AO}$ , deci

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow O} = Gh_{AO} = mgh_{AB} = mg(h_A - h_B) = \mathcal{E}_{A \rightarrow B} > 0.$$

Avînd în vedere că  $\vec{G} \perp \vec{OB}$ , lucrul mecanic al forței  $\vec{G}$ , cînd corpul se deplasează de la  $O$  la  $B$ , este nul:  $\mathcal{E}_{O \rightarrow B} = 0$ , deci

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = \mathcal{E}_{A \rightarrow O} + \mathcal{E}_{O \rightarrow B}, \quad (4.7)$$

adică lucrul mecanic al forței de greutate nu depinde de forma drumului pe care ajunge punctul material din  $A$  în  $B$ , ci doar de diferența de nivel dintre capetele  $A$  și  $B$  ale acestui drum.

Dacă ridicăm corpul la înălțimea  $h_{AB}$ , atunci lucrul mecanic al forței de greutate  $G$ , pe drumul  $BA$ , este

$$\mathcal{L}_{B \rightarrow A} = Gh \cos \pi = -mgh_{AB} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} < 0, \quad (4.8)$$

adică greutatea se manifestă ca o forță de rezistență, din care cauză corpul nu poate fi ridicat, decât dacă asupra lui acționează o forță  $F$ , astfel încât lucrul mecanic al acesteia să compenseze pe  $\mathcal{L}_G$ . Presupunind că  $F$  acționează chiar după verticală, lucrul mecanic primit de corp va fi

$$\mathcal{L}_{corp} = Fh - mgh = Fh - Gh.$$

Valoarea minimă a lui  $F$ , capabilă să ridice corpul, corespunde lui  $\mathcal{L}_{corp} = 0$ , adică  $F = G$  și lucrul mecanic minim al acestei forțe este  $mgh$ .

Din relația (4.8) rezultă

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} + \mathcal{L}_{B \rightarrow A} = 0. \quad (4.9)$$

Ținând seama și de (4.7), obținem

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow O} + \mathcal{L}_{O \rightarrow B} + \mathcal{L}_{B \rightarrow A} = 0, \quad (4.10)$$

adică lucrul mecanic al forței de greutate pe conturul închis  $AO + OB + BA = AOB A$  este nul. Evident, concluzia aceasta rămâne valabilă pentru orice fel de forțe care rămân constante în tot cursul mișcării.

Forțele al căror lucru mecanic pe un contur închis este nul se numesc *forțe conservative*.

Să considerăm acum cazul când forța  $\vec{F}$  nu este constantă, mișcarea efectuându-se însă după o dreaptă, între două puncte  $A$  și  $B$  (fig. I.4.3). Fie un interval  $\Delta y$  ce aparține lui  $AB$ , de-a lungul căruia componenta  $F_y$ , după direcția de deplasare a forței, poate fi presupusă constantă, deci lucrul mecanic  $\Delta \mathcal{L}$ , efectuat pe acest drum, va fi

$$\Delta \mathcal{L} = F_y \Delta y. \quad (4.11)$$

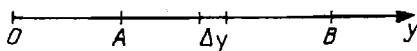


Fig. I.4.3

Lucrul mecanic total efectuat de  $\vec{F}$  pe drumul  $AB$  se va obține împărțind drumul  $AB$  în elemente  $\Delta y$  suficient de mici, pentru care știm să calculăm lucrul mecanic elementar  $\Delta \mathcal{L}$  și adunând apoi contribuțiile tuturor porțiunilor:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \sum \Delta \mathcal{L} = \sum F_y \Delta y. \quad (4.12)$$

La limită, când numărul intervalelor  $\Delta y$ , în care am împărțit pe  $AB$ , tinde la infinit, lungimea  $\Delta y \rightarrow 0$ , iar în membrul drept al ecuației (4.12) obținem chiar suma Darboux care definește integrala după  $y$ , de la  $y_A$  la  $y_B$ , din  $F_y$ :

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \int_{y_A}^{y_B} F_y dy. \quad (4.13)$$

Ca o aplicație, să calculăm lucrul mecanic al unor forțe mai des întâlnite. Astfel, în cazul forței elastice  $\vec{F}_e = -k\vec{y}$  care apare la întinderea unui resort, componenta  $F_y$  este dată de relația  $F_y = -ky$ , deci lucrul mecanic efectuat de această forță va fi

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = -k \int_{y_A}^{y_B} y dy = -\frac{k}{2} y^2 \Big|_{y_A}^{y_B} = -\frac{k}{2} (y_B^2 - y_A^2) < 0, \quad (4.14)$$

deoarece  $y_B > y_A$ . Se vede că lucrul mecanic al forței elastice este întotdeauna negativ, deoarece forța elastică se opune depărtării de punctul de echilibru  $O$ .

Pentru  $A = O$ ,  $y_A = y_O = 0$  și obținem lucrul mecanic al forței elastice la deplasarea din originea  $O$  pînă în  $B$ :

$$\mathcal{L}_{O \rightarrow B} = -\frac{k}{2} y_B^2. \quad (4.14 \text{ a})$$

Se vede imediat că  $\mathcal{L}_{B \rightarrow O} = -\mathcal{L}_{O \rightarrow B} = \frac{k}{2} y_B^2$ , adică  $\mathcal{L}_{O \rightarrow B} + \mathcal{L}_{B \rightarrow O} = 0$ .

Analog se calculează lucrul mecanic efectuat de forța atracției universale  $\vec{F} = -K \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$ . În fig. I.4.4 am considerat în centrul  $O$  masa  $M$  care atrage

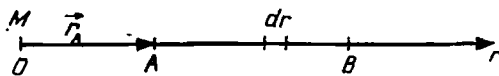


Fig. I.4.4

o masă  $m$ , situată într-un punct de pe axa  $Or$ , cu o forță dirijată în lungul acestei direcții către  $O$ . Vom folosi din nou relația (4.13), observînd că rolul variabilei  $y$  este jucat de variabila  $r$ . Prin urmare

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} F_r dr. \quad (4.13 \text{ a})$$

Dar  $F_r = -K \frac{Mm}{r^2}$ , astfel că  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  are expresia

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = -KMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = KMm \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = KMm \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) < 0, \quad (4.13)$$

deoarece  $r_B > r_A$ . Rezultatul obținut este în concordanță cu faptul că forța de atracție se opune depărtării de  $O$ . Din nou  $\mathcal{L}_{B \rightarrow A} = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} > 0$ .

Dacă  $r_B \rightarrow \infty$ , obținem lucrul mecanic al forței de atracție când masa  $m$  se deplasează din punctul  $A$  pînă la infinit:

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow \infty} = -KMm \frac{1}{r_A} < 0. \quad (4.16)$$

Lucrul mecanic pe care-l face forța de atracție pentru a aduce masa  $m$  de la infinit pînă în  $A$  va fi

$$\mathcal{E}_{\infty \rightarrow A} = -\mathcal{E}_{A \rightarrow \infty} = KMm \frac{1}{r_A} > 0. \quad (4.16 a)$$

În cazul cel mai general, cînd forța nu este constantă, iar mișcarea are loc pe un drum curbiliniu  $AB$  (fig. I.4.5), vom considera un arc mic  $\widehat{A'B'} = \Delta s$  a cărui lungime poate fi aproximată prin lungimea coardei  $\overline{A'B'} \simeq \Delta s$ .

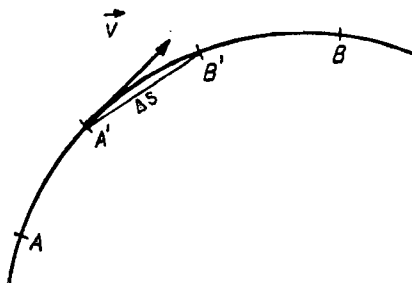


Fig. I.4.5

Dacă  $F_s$  este componenta forței  $F$  în lungul tangentei la arcul  $\Delta s$ , valoarea lui  $F_s$  de-a lungul drumului  $\Delta s$  poate fi considerată constantă. Lucrul mecanic  $\Delta \mathcal{E}$  efectuat pe acest drum este

$$\Delta \mathcal{E} = F_s \Delta s.$$

Împărțind pe  $AB$  în arce  $\Delta s$  suficient de mici, obținem lucrul mecanic efectuat între  $A$  și  $B$  prin adunarea tuturor mărimilor  $\Delta \mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}_{\widehat{AB}} = \sum F_s \Delta s. \quad (4.17)$$

Să considerăm acum mișcarea uniform circulară a unui corp de masă  $m$  sub acțiunea unei forțe centripete  $F_{cp} = -m\omega^2 R$  dirijată după rază, către centrul cercului. Componenta forței după direcția tangentei este însă nulă;  $(F_{cp})_s = 0$ , adică toate mărimile  $\Delta \mathcal{E}$  sînt nule. Din această cauză  $\mathcal{E}_{\widehat{AB}} = 0$ , pentru orice pereche de puncte  $A$  și  $B$  de pe cercul de rază  $R$ .

Conform relației (4.1), unitatea de lucru mecanic în SI, numită joule (J), corespunde lucrului mecanic efectuat de o forță de 1 N al cărei punct de aplicație se deplasează cu 1 m în lungul direcției forței:  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

În sistemul CGS unitatea de lucru mecanic este ergul,  $1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot 1 \text{ cm}$ . Relația dintre cele două unități de măsură este  $1 \text{ J} = 10^7 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg}$ .

În sistemul tehnic unitatea de lucru mecanic se numește kilogram-forță-metru (kgf·m):  $1 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 1 \text{ kgf} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ N} \cdot \text{m/s}^2 = 9,8 \text{ J}$ .



## 4.2. PUTEREA

Desigur că mărimea lucrului mecanic efectuat de o forță depinde de timpul cât acționează forța, deoarece deplasarea  $s$  crește cu timpul. Pentru a putea compara acțiunile mecanice ale diferitelor forțe va trebui să ne referim în toate cazurile la lucrul mecanic efectuat în același interval de timp.

Prin definiție, *puterea  $P$  este egală cu lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp*:

$$P = \frac{\mathcal{E}}{t}. \quad (4.18)$$

Deoarece, în general, în intervale de timp egale se efectuează lucruri mecanice diferite, trebuie să considerăm un interval de timp  $\Delta t$  suficient de mic, în care se efectuează lucrul mecanic  $\Delta \mathcal{E}$ . Puterea instantanee va fi

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F_s \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_s \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Rezultă deci că

$$P = F_s v = \vec{F} \vec{v}, \quad (4.19)$$

adică puterea la fiecare moment de timp este egală cu produsul dintre proiecția forței pe direcția mișcării și viteza la momentul respectiv.

Unitatea de putere în SI se numește watt (W) și corespunde unui lucru mecanic de 1 J efectuat în timp de o secundă:  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ . În sistemul CGS unitatea de putere nu are o denumire anumită, fiind dată de raportul  $1 \text{ erg/s}$ . În practică se mai utilizează kilowattul (kW):  $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$ .

O unitate de măsură, pentru energie, tolerată, este kilowattul-oră (1 kWh) care reprezintă energia obținută într-o oră la o putere constantă de 1 kW:  $1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

În sistemul tehnic, unitatea de putere nu are o denumire specială, fiind dată de raportul  $1 \text{ kgf} \cdot \text{m/s} = 9,8 \text{ J/s} = 9,8 \text{ W}$ . O altă unitate folosită în tehnică este calul-putere (CP):  $1 \text{ CP} = 75 \text{ kgf} \cdot \text{m/s} = 736 \text{ W}$ .

## 4.3. ENERGIA CINETICĂ

Să presupunem că asupra unui corp, considerat ca punct material, acționează o forță constantă  $\vec{F}$  care modifică viteza corpului conform legilor mișcării uniform variate. Vom arăta că variația vitezei corpului și lucrul mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  sînt corelate.

Ne alegem acele condiții inițiale în care forța  $\vec{F}$  începe să acționeze la momentul  $t_0$  cînd viteza punctului material este  $\vec{v}_0$ , cei doi vectori fiind paraleli. La un moment ulterior ( $t_1$ ) viteza va fi  $\vec{v}_1$  și va avea aceeași direcție cu  $\vec{v}_0$ , dar altă valoare.

Lucrul mecanic efectuat în intervalul  $(t_1 - t_0)$  este

$$\mathcal{L} = Fs = mas, \quad (4.20)$$

unde  $s$  este spațiul străbătut în  $(t_1 - t_0)$  secunde. Conform ecuațiilor (2.36) și (2.38)

$$s = v_0(t_1 - t_0) + \frac{a}{2} (t_1 - t_0)^2, \quad v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0),$$

deci

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}. \quad (4.21)$$

Calculînd produsul  $as$  obținem

$$as = \frac{(v_1 + v_0)(v_1 - v_0)}{2} = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2).$$

Avînd în vedere relația (4.20), rezultă

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (4.22)$$

Ecuația (4.22) ne arată că unui lucru mecanic  $\mathcal{L} \neq 0$  îi corespunde o variație a mărimii  $W_c = \frac{mv^2}{2}$  care se numește *energie cinetică*. Prin urmare

$$\mathcal{L} = W_{c1} - W_{c0} = \Delta W_c. \quad (4.23)$$

unde  $W_{c0}$  înseamnă energia cinetică la momentul  $t_0$  (cînd viteza era  $v_0$ ), iar  $W_{c1}$  la momentul  $t_1$  (viteza fiind  $v_1$ ). Lui  $\mathcal{L} > 0$ , adică unei mișcări uniform accelerate, îi corespunde o creștere a energiei cinetice.

Dacă  $F = 0$ , deci  $\mathcal{L} = 0$ , energia cinetică nu se modifică:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Pentru  $\mathcal{L} < 0$ , cînd asupra corpului acționează o forță ce se opune mișcării, energia cinetică a corpului poate scădea pînă la zero, ceea ce corespunde opririi corpului. Să presupunem de exemplu că asupra unui corp, cu viteza  $v_0$  la momentul  $t_0$ , acționează o forță de frecare  $\vec{F}_f$  care duce la o mișcare uniform-încetinită a corpului care avea viteza inițială  $v_0$ . Cu ajutorul relației (4.22) obținem lucrul mecanic al forței de frecare

$$\mathcal{L} = -F_f s = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (4.24)$$

Se poate calcula distanța  $s$  parcursă pînă la oprire, punînd condiția  $v_1 = 0$ :

$$F_f s = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (4.25)$$

adică valoarea absolută a lucrului mecanic negativ necesar opririi corpului este egală cu energia cinetică a acestuia. Din ultima relație rezultă

$$s = \frac{mv_0^2}{2F_f} = \frac{v_0^2}{2a_f}. \quad (4.25 \text{ a})$$

unde  $a_f$  este accelerația constantă imprimată de  $F_f$ . Relația (4.25) se poate obține și direct din legile mișcării accelerate, cititorul putîndu-se convinge ușor de aceasta.

Relația (4.22) a fost obținută presupunînd că asupra corpului acționează o forță constantă  $\vec{F}$ . Se poate demonstra că această relație rămîne valabilă și cînd forța nu este constantă, iar traiectoria corpului nu este rectilinie. În acest caz lucrul mecanic  $\mathcal{L}$  nu va mai fi exprimat însă prin ecuația (4.20) ci prin ecuația (4.17).

#### 4.4. ENERGIA POTENȚIALĂ

După cum am arătat în paragraful 4.1, lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională, presupusă constantă, pentru deplasări între puncte a căror înălțimi nu diferă mult între ele, nu depinde de forma și lungimea drumului ci doar de diferența dintre altitudinile punctului final, și a celui inițial. Demonstrația făcută nu corespunde cazului celui mai general cînd corpul se mișcă între cele două puncte după o curbă. Se poate însă arăta că și în acest caz lucrul mecanic efectuat depinde doar de extremitățile drumului pe care s-a deplasat corpul. Mai mult decît atît, concluzia de mai sus rămîne valabilă și în cazul în care ținem seama de variația forței gravitaționale cu altitudinea, rezultatul putînd fi deci extins și pentru deplasări între puncte cu altitudini oricît de diferite. În această situație, lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională la deplasarea unui corp între punctele  $A$  și  $B$  (fig. 1.4.6) este dat de relația (4.15) cu  $r_A = R$  și  $r_B = R + h$ , indiferent de drumul pe care se mișcă corpul între cele două puncte. Astfel, lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pentru a deplasa corpul de la  $B$  la  $A$  este același atît pe drumul (1) în lungul razei Pămîntului cît și pe drumul (2):

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = KMm \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) = -KMm \frac{h}{R(R+h)} < 0.$$

Deoarece  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{L}_{B \rightarrow A}$ ,  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} + \mathcal{L}_{B \rightarrow A} = 0$ , deci lucrul mecanic efectuat de forța de gravitație pe curba închisă formată din drumurile (1) și (2) este nul. Lucrul mecanic efectuat de o forță exterioară pentru a urca un corp la o înălțime  $h$  este egal cu lucrul mecanic al forței gravitaționale la coborîrea aceluiasi corp.

În natură există și alte forțe, nu numai cele de greutate, care au proprietatea de a fi conservative, adică lucrul mecanic al acestor forțe depinde numai

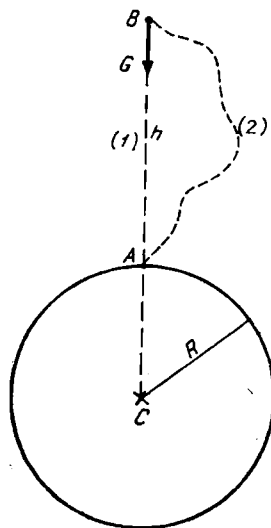


Fig. I.4.6

de pozițiile punctului inițial și final și nu și de forma traiectoriei. Astfel de forțe sînt cele elastice, așa încît formulele (4.14) și (4.14 a) rămîn valabile chiar dacă mișcarea între punctele inițial și final se face după o curbă.

Din cele discutate mai sus rezultă că lucrul mecanic  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  efectuat de o forță conservativă, la deplasarea unui corp din punctul  $A$  în punctul  $B$ , poate fi caracterizat prin introducerea unei mărimi  $W_p$ , numită *energie potențială*, a cărei variație între punctele  $A$  și  $B$  să fie egală chiar cu lucrul mecanic efectuat:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = W_p(A) - W_p(B) \quad (4.26)$$

unde  $W_p(A)$  și  $W_p(B)$  reprezintă valorile energiei potențiale în punctele  $A$ , respectiv  $B$ . Din punct de vedere matematic relația (4.26) evidențiază faptul că  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  depinde doar de punctele inițial și final. De altfel, acesta este și motivul pentru care se introduce noțiunea de energie potențială, care nu poate fi definită decît pentru cîmpurile de forțe conservative.

Din relația (4.26) rezultă că pentru  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} > 0$  avem  $W_p(A) > W_p(B)$ , adică energia potențială în punctul final  $B$  este mai mică decît în punctul inițial  $A$ . Spunem că energia potențială a scăzut. Dacă  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B} < 0$ , rezultă  $W_p(A) < W_p(B)$  deci, în acest caz, energia potențială crește.

Se observă că relația (4.26) ne permite să determinăm numai diferența dintre energiile potențiale în punctele  $A$  și  $B$ . Valoarea propriu-zisă a energiei potențiale într-un punct din spațiu poate fi determinată doar dacă alegem în mod convențional, ca fiind zero, valoarea energiei potențiale într-un anumit punct din spațiu.

De exemplu, lucrul mecanic  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  efectuat de forța de greutate între punctele  $A$  și  $B$  este dat de relația (4.6):

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = mgh_A - mgh_B. \quad (4.27)$$

Comparînd cu ecuația (4.26) se vede că putem considera

$$W_p(A) = mgh_A + C, \quad W_p(B) = mgh_B + C \quad (4.28)$$

unde  $C$  este o constantă aditivă arbitrară. Prin urmare, energia potențială este definită pînă la o constantă aditivă arbitrară. Acest lucru ilustrează faptul că au semnificație fizică doar diferențele de energie potențială.

Punînd  $h_B = 0$ , adică considerînd punctul  $B$  pe suprafața Pămîntului, constatăm că  $C$  reprezintă energia potențială într-un punct situat pe sol. Luînd în mod convențional zero energia potențială pe suprafața Pămîntului, obținem  $C = 0$ , deci energia potențială într-un punct oarecare situat la înălțimea  $h$  deasupra Pămîntului este

$$W_p = mgh. \quad (4.29)$$

Dacă ținem seama de variația greutății cu altitudinea avem:

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = W_p(A) - W_p(B) = -KMm \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

unde am avut în vedere relația (4.15).

Din ultima relație rezultă

$$W_p(A) = -\frac{KMm}{r_A} + C \text{ și } W_p(B) = -\frac{KMm}{r_B} + C.$$

Semnificația constantei aditive  $C$  rezultă imediat dacă considerăm unul din puncte, de exemplu  $B$ , la infinit ( $r_B = \infty$ ):

$$W_p(\infty) = C,$$

adică  $C$  reprezintă valoarea energiei potențiale la infinit. Alegînd în mod convențional  $W_p(\infty) = 0$ , rezultă  $C = 0$ , deci energia potențială într-un punct situat la distanța  $r$  de centrul Pămîntului va fi

$$W_p(r) = -\frac{KMm}{r}. \quad (4.30)$$

Cu această alegere a originii energiei potențiale, într-un punct de pe suprafața Pămîntului vom avea o valoare diferită de zero

$$W_p(R) = -\frac{KMm}{R}.$$

În fine, din relațiile (4.14) și (4.26) obținem pentru energia potențială corespunzătoare forței elastice, valoarea

$$W_p(A) = \frac{k}{2} y_A^2 + C.$$

Considerînd energia potențială zero cînd  $y_A = 0$ , adică în punctul în care se anulează și forța elastică, obținem  $C = 0$  și

$$W_p(A) = \frac{k}{2} y_A^2, \quad (4.31)$$

unde  $y_A$  este distanța pînă la punctul de anulare al forței.

## 4.5. LEGEA CONSERVĂRII ENERGIEI MECANICE

Să presupunem că, sub acțiunea unor forțe conservative, un punct material de masă  $m$ , care avea la momentul  $t_0$  viteza  $v_A$  și se găsea în punctul  $A$ , ajunge la momentul  $t_1$  în punctul  $B$  avînd viteza  $v_B$ .

Folosind relațiile (4.23) și (4.26), obținem

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = W_c(B) - W_c(A) = W_p(A) - W_p(B), \quad (4.32)$$

unde  $W_c(B) = mv_B^2/2$  este energia cinetică în punctul  $B$ . În mod analog energia cinetică în punctul  $A$  este  $W_c(A) = mv_A^2/2$ . Rezultă imediat relația

$$W_c(B) + W_p(B) = W_c(A) + W_p(A). \quad (4.33)$$

Suma dintre energia cinetică și energia potențială se numește energie mecanică totală a punctului material, pe care o vom nota cu  $W$ :

$$W = W_c + W_p. \quad (4.34)$$

Introducînd în ecuația (4.34) obținem

$$W(B) = W(A). \quad (4.35)$$

Deoarece egalitatea de mai sus are loc pentru orice pereche de puncte  $A$  și  $B$ , putem afirma că *energia mecanică totală a punctului material, asupra căruia acționează numai forțe conservative, rămîne constantă în tot timpul mișcării*. Cu alte cuvinte, energia mecanică totală a punctului material se conservă în timp, iar relația (4.33) reprezintă formularea matematică a legii conservării energiei.

Legea conservării energiei mecanice este o lege generală care este valabilă nu numai pentru un punct material dar și pentru sisteme de puncte materiale sau pentru corpuri materiale asupra cărora acționează doar forțe conservative.

Legea conservării energiei ne arată că o scădere a energiei cinetice duce la o creștere a energiei potențiale și invers; în acest sens se poate vorbi despre transformarea reciprocă a energiei cinetice în energie potențială.

Valoarea maximă a energiei potențiale este  $W_{p \max} = W$  care se realizează în punctul în care  $W_c = 0$ . Analog,  $W_{c \max} = W$  cînd  $W_p = 0$ . Relațiile acestea ne arată că în orice punct de pe traiectoria mișcării sînt îndeplinite condițiile  $W_c \leq W$  și  $W_p \leq W$ .

Să vedem ce se întîmplă dacă asupra unui corp acționează și forțe neconservative, cum sînt de exemplu forțele de frecare. Lucrul mecanic total  $\mathcal{E}$  va fi dat de suma dintre lucrul mecanic  $\mathcal{E}^{cons}$  al forțelor conservative și lucrul mecanic,  $\mathcal{E}^{frecare}$  al forțelor de frecare:

$$\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = \mathcal{E}_{A \rightarrow B}^{cons} + \mathcal{E}_{A \rightarrow B}^{frecare}.$$

Pe de altă parte,  $\mathcal{E}_{A \rightarrow B} = \Delta W_c = W_c(B) - W_c(A)$ , deci  $W_c(B) - W_c(A) = \mathcal{E}_{A \rightarrow B}^{cons} + \mathcal{E}_{A \rightarrow B}^{frecare}$ .

În membrul drept doar lucrul mecanic al forțelor conservative poate fi scris ca variația energiei potențiale. Forța de frecare nu este o forță conser-

vativă deoarece lucrul mecanic al acestora pe o curbă închisă, evident, nu este zero, ceea ce înseamnă că depinde de forma drumului. Prin urmare  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{cons} = W_p(A) - W_p(B)$ , deci

$$W_c(B) - W_c(A) = W_p(A) - W_p(B) + \mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{frecare}.$$

Cum suma  $W_c + W_p$  reprezintă energia mecanică totală  $W$  a sistemului, obținem

$$W(B) - W(A) = \mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{frecare} \quad (4.36)$$

adică, în acest caz, energia mecanică totală nu se conservă, iar variația sa este egală cu lucrul mecanic al forței de frecare.

Deoarece  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{frecare} < 0$ , rezultă

$$W(B) < W(A),$$

deci forța de frecare provoacă întotdeauna o mișcare a energiei mecanice totale a sistemului. Faptul că energia mecanică totală nu se conservă întotdeauna, nu încalcă legea generală a conservării și transformării energiei. Într-adevăr, știm că suprafețele în ale căror puncte acționează forțele de frecare, se încălzesc. Dar creșterea temperaturii corpului corespunde unor mișcări de oscilație mai ample a atomilor și moleculelor din care este format corpul, astfel încât energia cinetică a acestora a crescut. Prin urmare, cantitatea cu care a scăzut energia mecanică totală a corpului nu se pierde ci se transformă în energie cinetică a mișcării interne a constituenților corpului, adică în căldură. Întîlnim deci un proces de transformare a energiei mecanice în căldură, adică în energie termică, iar cantitatea de energie transformată este egală cu lucrul mecanic al forțelor de frecare. Dacă prin energie totală vom înțelege acum suma dintre energia mecanică totală și energia termică, această mărime desigur se conservă.

Cu aceste considerații ieșim însă din cadrul mecanicii. Pentru a evita acest lucru, în mecanică nu ne va preocupa niciodată procesul de ridicare a temperaturii corpului sau degajarea de căldură; vom spune pur și simplu că datorită forțelor de frecare o parte a energiei mecanice totale este disipată sub formă de căldură, iar cantitatea disipată este dată de lucrul mecanic al forțelor de frecare.

#### 4.6. APLICAȚII ALE LEGII CONSERVĂRII ENERGIEI

Să considerăm un corp aruncat, după verticala locului, cu viteza inițială  $v_0$ . Considerînd în mod convențional energia potențială zero la suprafața Pămîntului, rezultă că energia mecanică totală  $W$  în momentul lansării este egală chiar cu energia cinetică  $mv_0^2/2$ . Conform legii conservării energiei rezultă

$$W = W_c + W_p = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \quad (4.37)$$

unde  $v$  este viteza corpului la înălțimea  $h$ . Pentru  $v = 0$  se obține  $h_{max} = v_0^2/2g$  corespunzător lui  $W_{p\ max} = W = mv_0^2/2$ .

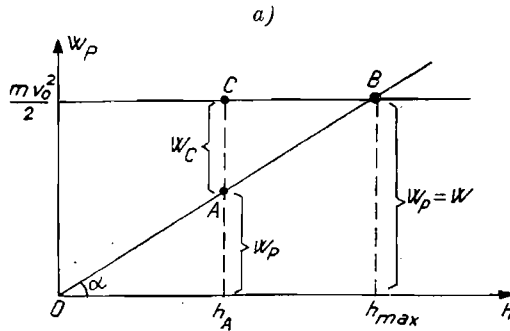


Fig. I.4.7

Dacă reprezentăm grafic energia potențială  $W_p = mgh$  ca funcție de  $h$ , obținem o dreaptă  $OB$ , de pantă  $\operatorname{tg} \alpha = mg$  (fig. I.4.7). Ordonata lui  $A$  este egală cu energia potențială a corpului aflat la înălțimea  $h_A$ , iar segmentul  $\overline{CA} = W - W_p$  reprezintă energia cinetică la înălțimea  $h_A$ . În orice punct de pe traiectorie este îndeplinită condiția  $W_p \leq W$ , adică  $mgh \leq mv_0^2/2$  sau  $h \leq v_0^2/2g = h_{\max}$ . Rezultă că toate punctele de pe traiectorie au o valoare a lui  $h$  mai mică, cel mult egală cu cea corespunzătoare punctului  $B$  în care se intersectează dreapta  $W_p = mgh$  cu dreapta  $W_p = W = mv_0^2/2 = \text{constant}$ .

Într-un mod asemănător putem obține depărtarea maximă  $s_{\max}$  față de poziția de echilibru la care poate ajunge un pendul matematic în cazul micilor oscilații (fig. I.4.8). După cum am arătat, componenta tangențială a greutateii este  $G_t = -mgs/l$ , care se comportă întocmai ca o forță elastică, de forma  $G_t = -ks$  cu  $k = mg/l$ . Energia potențială a pendulului aflat la distanța  $s$  de  $O$  va fi

$$W_p = \frac{1}{2} ks^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} s^2. \quad (4.38)$$

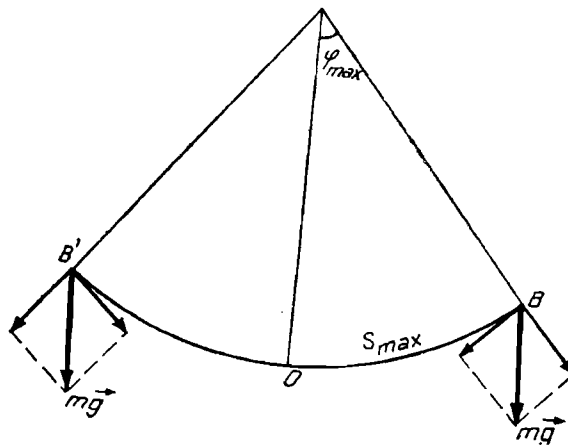


Fig. I.4.8



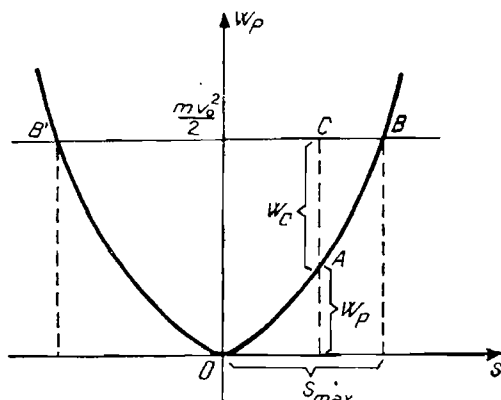


Fig. 1.4.9

Prin convenție, în punctul  $O$  avem  $W_p = 0$ , deci în acest punct  $W = W_{cmax} = mv_0^2/2$ . Dacă viteza pendulului în  $O$  este  $v_0$ , avem

$$W = W_c + W_p = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} s^2, \quad (4.39)$$

unde  $v$  este viteza la distanța  $s$  de  $O$ . Când  $v = 0$  se obține  $s_{max}^2 = v_0^2 l/g$  corespunzător lui  $W_{pmax} = W = mv_0^2/2$ .

Reprezentarea grafică a energiei potențiale, dată de relația (4.38), ne conduce la o parabolă cu vârful în origine (fig. I.4.9). Punctele  $B$  și  $B'$ , în care  $W_p$  este maxim, se găsesc la distanța maximă  $s_{max}$  la care poate ajunge corpul față de punctul de echilibru  $O$ . Ducînd din nou dreapta  $W_p = mv_0^2/2$  care este paralelă cu axa absciselor și care reprezintă energia potențială maximă, observăm că aceasta intersectează parabola chiar în punctele  $B$  și  $B'$ , adică există două puncte ale traiectoriei în care energia potențială este maximă.

Un caz deosebit de interesant este acela al mișcării unui corp de masă  $m$  într-un câmp de forțe gravitaționale. Am stabilit (ec. 4.30), că energia potențială într-un punct, situat la distanța  $r$  de masa  $M$  care creează câmpul gravitațional, este  $W_p = -Kmm/R < 0$ . Graficul ei este o hiperbolă echilaterală situată sub axa absciselor datorită semnului minus din relația de mai sus. Folosind legea conservării energiei, rezultă

$$W = W_c + W_p = W_c - |W_p| = \frac{mv^2}{2} - K \frac{mM}{r}.$$

Dacă presupunem  $W_c < |W_p|$  rezultă  $W < 0$ , deci dreapta  $W_p = W$ , a cărei intersecție cu hiperbola ne dă punctul  $B$  unde energia potențială este maximă, se află sub axa absciselor (fig. I.4.10). Segmentul  $\overline{CA}$  reprezintă energia cinetică în punctul  $A$ , iar ordonata lui  $A$  energia potențială care este negativă. Cum în orice punct de pe traiectorie  $W_p \leq W$ , înseamnă că distanța  $r$  de la corp pînă la centru de forțe  $O$  nu poate depăși valoarea  $r_{max}$  ce corespunde punctului  $B$  în care  $W = W_{pmax} = -Kmm/r_{max}$ .

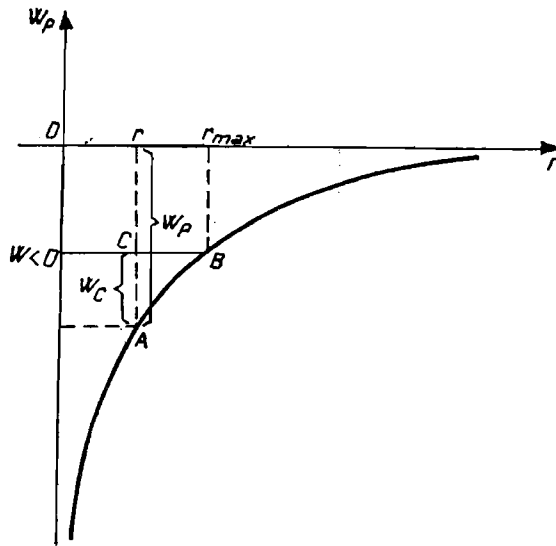


Fig. 1.4.10

Prin urmare traiectoria corpului se găsește într-o regiune finită a spațiului în vecinătatea centrului de forțe  $O$ . Se poate demonstra că această traiectorie este o elipsă. În particular, deoarece energia mecanică totală a planetelor este negativă, acestea se mișcă în jurul Soarelui după elipse.

Dacă  $W_c \geq |W_p|$  rezultă  $W \geq 0$ , din care cauză condiția  $W_p \leq W$  este îndeplinită pentru orice valoare a lui  $r$ , inclusiv  $r = \infty$ . Într-adevăr, valoarea maximă  $W_{p \max} = 0$  ce corespunde lui  $r = \infty$  verifică condiția  $W_{p \max} \leq W$  egalitatea avînd loc pentru  $W = 0$  cînd  $W_c = |W_p|$ . Din moment ce  $r$  poate lua valori oricît de mari, înseamnă că traiectoria nu este conținută într-o regiune finită a spațiului. Se demonstrează că pentru  $W = 0$  ( $W_c = |W_p|$ ) traiectoria este o parabolă, iar pentru  $W > 0$  ( $W_c > |W_p|$ ) este o hiperbolă. Ambele curbe au ramurile la infinit.

Vom studia ca exemplu cazul unui satelit artificial. Am stabilit în paragraful 3.13 condiția ca un corp de masă  $m$  să devină satelit artificial al planetei noastre, pe o orbită circulară în imediata apropiere a Pămîntului: el trebuie să fie lansat cu o viteză  $v_0 = \sqrt{g_0 R} \simeq 7,9$  km/s pe care am numit-o *prima viteză cosmică*.

Energia totală a acestui satelit va fi

$$W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{KMP}{R},$$

unde ultimul termen este energia potențială la distanța  $R$  de centrul Pămîntului, care reprezintă centrul de forțe. Înlocuind în expresia lui  $W$  pe  $v_0$  prin valoarea lui și avînd în vedere că  $g_0 = \frac{KMP}{R^2}$ , obținem

$$W = \frac{m}{2} g_0 R - mg_0 R = -\frac{mg_0 R}{2} < 0.$$

Valoarea negativă a energiei mecanice totale este în concordanță cu faptul că traiectoria satelitului este finită, fiind un cerc, adică un caz particular de elipsă.

Cînd corpul este lansat cu o viteză  $v_0 > \sqrt{g_0 R}$  astfel încît energia lui totală să rămînă tot negativă, traiectoria devine o elipsă din ce în ce mai alungită, pe măsură ce  $v_0$  crește.

Condiția  $W < 0$  implică  $W_c < |W_p|$ , adică

$$\frac{mv_0^2}{2} < \frac{K m M_P}{R} = m g_0 R,$$

sau

$$v_0 < \sqrt{2g_0 R}. \quad (4.40)$$

Prin urmare, pentru  $\sqrt{g_0 R} \leq v_0 < \sqrt{2g_0 R}$  traiectoria este o elipsă care pentru  $v_0 = \sqrt{g_0 R}$  trece într-un cerc de rază  $R$ .

Dacă viteza de lansare este suficient de mare pentru ca  $W_c = |W_p|$  și  $W = 0$ , traiectoria devine o curbă infinită (o parabolă) și corpul s-ar îndepărta definitiv de Pămînt, pînă la infinit, dacă nu ar exista și Soarele. În realitate corpul devine un satelit al Soarelui, adică o planetă artificială. Viteza  $v_0$  pentru care are loc această situație, se obține din egalitatea  $W_c = W_p$ , adică  $\frac{mv_0^2}{2} = m g_0 R$ , de unde

$$v_0 = \sqrt{2g_0 R} = \sqrt{2 \frac{K M_P}{R}}. \quad (4.41)$$

Luînd  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$  și  $R = 6400 \text{ km}$ , găsim pentru  $v_0$  valoarea  $v_0 \simeq 11,2 \text{ km/s}$  care se numește *a doua viteză cosmică*.

Cînd o navă cosmică revine pe Pămînt din Lună, ea are o viteză ce depășește a doua viteză cosmică. Din acest motiv trebuie neapărat ca traiectoria sa să treacă prin imediata apropiere a globului terestru astfel încît rezistența aerului să-i micșoreze viteza sub a doua viteză cosmică, forța de atracție a Pămîntului permițînd navei să ajungă pe Pămînt. În caz contrar, gravitația terestră nu este capabilă de a mai readuce nava pe Pămînt și aceasta s-ar pierde în spațiul cosmic devenind pentru totdeauna un satelit artificial al Soarelui.

#### 4.7. CIOCNIRI ELASTICE ȘI INELASTICE

Fie două sfere de mase  $m_1$  și  $m_2$  care înainte de a se ciocni au vitezele  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ , iar după ciocnire au vitezele  $\vec{v}_1'$  și  $\vec{v}_2'$ .

Conform legii conservării impulsului vom avea relația

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (4.42)$$

unde membrul stîng reprezintă impulsul total al sistemului alcătuit din cele două bile, înainte de ciocnire, iar membrul drept impulsul total după ciocnire.

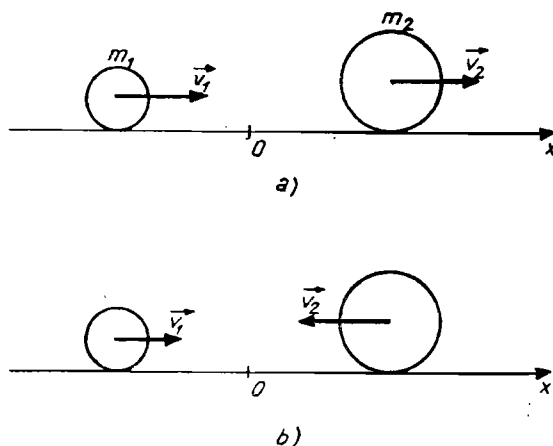


Fig. I.4.11

Vom presupune, în cele ce urmează, că vitezele  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}'_1$  și  $\vec{v}'_2$  sînt orientate în lungul aceleiași drepte, adică au aceeași direcție. Cînd se realizează acest lucru spunem că ciocnirile bilor sînt centrale.

Dacă presupunem că bilele se mișcă în același sens înainte de ciocnire (fig. I.4.11a), proiecțiile vitezelor pe direcția comună de mișcare  $Ox$  vor fi ambele pozitive, adică  $v_1$  și  $v_2$ . Dacă cele două bile vin una în întîmpinarea celeilalte (fig. I.4.11b), proiecțiile vitezelor pe direcția comună de mișcare  $Ox$  vor fi de semne contrare:  $v_1$  și respectiv  $(-v_2)$ .

Să presupunem că bilele se mișcă în același sens.

Relația (4.42) se poate scrie atunci sub forma scalară

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2. \quad (4.43)$$

Presupunem că sferele nu interacționează între ele decît în momentul ciocnirii, deci  $W_p = 0$  și  $W = W_c$ .

Vom numi ciocniri elastice acele ciocniri în care energia cinetică se conservă, adică energia cinetică totală după ciocnire este egală cu energia cinetică totală înainte de ciocnire:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}. \quad (4.44)$$

Ecuatiile (4.43) și (4.44) reprezintă un sistem de ecuații cu două necunoscute,  $v'_1$ , și  $v'_2$  din care extragem valorile vitezelor finale ce se obțin în urma unei ciocniri elastice centrale:

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.45)$$

Dacă, în urma procesului de ciocnire, vitezele finale  $v'_1$  și  $v'_2$  din ecuația (4.43) sînt egale, adică ambele sfere se rostogolesc cu aceeași viteză, ciocnirea se nu-

mește inelastică și centrală. În această situație legea conservării impulsului se scrie

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \quad (4.46)$$

de unde rezultă pentru viteza finală expresia

$$v' = v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.47)$$

Se poate arăta ușor că energia cinetică totală variază la o ciocnire inelastică.

Într-adevăr, înainte de ciocnire aveam  $W_{c\,initial} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$  iar după ciocnire  $W_{c\,final} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} v'^2$ .

Variația energiei cinetice este

$$\Delta W_c = W_{c\,final} - W_{c\,initial} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Înlocuind pe  $v'$  cu ajutorul ecuației (4.47), obținem

$$\Delta W_c = - \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} < 0. \quad (4.48)$$

După cum se vede, la o ciocnire inelastică a sferelor, are loc o scădere a energiei cinetice. Această micșorare a lui  $W_c$  se produce deoarece au loc deformări inelastice ale sferelor pentru care trebuie efectuat un lucru mecanic care finalmente se consumă pentru încălzirea sferelor. Mai corect spus, o parte a energiei mecanice se transformă în căldură, astfel încât energia mecanică totală a sistemului format din cele două sfere, care coincide cu energia cinetică totală, scade în urma procesului de ciocnire.

## 5. Mișcarea corpului rigid

### 5.1. CINEMATICA CORPULUI RIGID

Definim corpul rigid sau solid ca un sistem de puncte materiale pentru care distanța dintre orice pereche de puncte rămâne întotdeauna aceeași. Aceasta înseamnă că nu pot avea loc deplasări relative între diferitele părți ce alcătuiesc rigidul, ci doar mișcări ale întregului ansamblu care nu modifică distanța dintre punctele sale materiale. Desigur, din punct de vedere fizic, noțiunea de rigid constituie o idealizare care oferă însă, în multe cazuri, o bună aproximație a realității.

Cea mai simplă mișcare pe care o poate avea solidul este mișcarea de translație în care toate punctele au aceeași viteză  $\vec{v}_{tr}$ . Din acest motiv, mișcarea de translație lasă neschimbat orice vector  $\vec{AB}$  determinat de două puncte  $A$  și  $B$  ale rigidului (fig. I.5.1).

O altă mișcare posibilă a rigidului este mișcarea de rotație în cadrul căreia toate punctele solidului descriu cercuri concentrice ale căror centre se găsesc pe o dreaptă perpendiculară pe traiectoriile descrise, numită *axă de rotație* (fig. I.5.2).

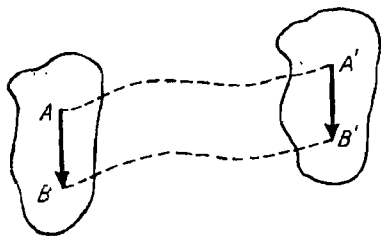


Fig. I.5.1.

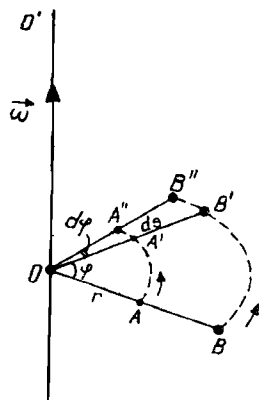


Fig. I.5.2

Notînd cu  $d\varphi$  unghiul descris de raza vectorie în timpul  $dt$ , viteza unghiulară este

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.1)$$

fiind deci aceeași pentru toate punctele rigidului. Viteza unui punct de pe circumferința de rază  $r$ , este

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt} = \omega r. \quad (5.2)$$

Viteza unghiulară, ca vector, are direcția axei de rotație  $OO'$  și sensul dat de regula burghiului așa cum a fost enunțat la mișcarea uniform circulară.

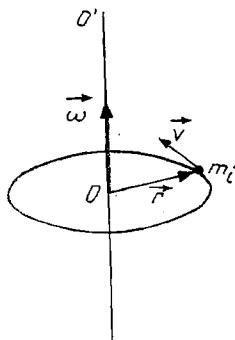


Fig. I.5.3

Sensul vectorilor  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}$  și  $\vec{v}$  fiind cel indicat în fig. I.5.3, se observă imediat că relația (5.2) permite scrierea vectorială a lui  $\vec{v}$  sub forma

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (5.3)$$

Cea mai simplă mișcare de rotație este aceea pentru care  $\vec{\omega}$  este constant în timp. Dacă viteza unghiulară are o direcție fixă, dar modulul său variază în timp, se definește accelerația unghiulară

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (5.4)$$

Situația este mai complicată în cazul cînd direcția vectorului  $\vec{\omega}$  variază, adică atunci cînd axa de rotație își schimbă direcția în timp. În acest caz, la fiecare moment de timp, se vorbește despre rotația în jurul unei axe instantanee de rotație și ne reprezentăm mișcarea rigidului ca fiind compusă dintr-o succesiune de rotații de unghiuri foarte mici în jurul unor axe de rotație a căror direcție se modifică necontenit în timp.

În cazul cel mai general, mișcarea rigidului este compusă dintr-o mișcare de translație de viteză  $\vec{v}_t$  și una de rotație de viteză unghiulară  $\vec{\omega}$ .

## 5.2. CENTRUL DE MASĂ

În absența unor forțe externe asupra unui punct material de masă  $m$ , ce aparține rigidului acționează doar forțele interne  $\vec{F}_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$  cu  $j \neq i$ ) din partea celorlalte puncte materiale ale solidului (fig. 1.5.4). Rezultanta forțelor interne ce acționează asupra punctului „ $i$ ” este  $\vec{F}_i^{int} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}$

avînd în vedere că  $\vec{F}_{ii} = 0$ . Cum numărul  $N$  de puncte materiale, deși finit, este imens, forța  $\vec{F}_i^{int}$  este rezultanta unui număr uriaș de forțe.

Suma tuturor forțelor interioare ce acționează asupra tuturor punctelor solidului este egală cu  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}$ .

Avînd în vedere relația evidentă  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$ , obținem

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}).$$

Deoarece conform principiului acțiunii și reacțiunii  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  pentru orice pereche de indici „ $i$ ” și „ $j$ ”,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} = 0, \quad (5.5)$$

adică rezultanta tuturor forțelor interne este nulă. Acest rezultat constituie o simplificare deosebit de importantă deoarece ne arată că mișcarea rigidului este determinată doar de forțele exterioare aplicate lui.

Să ne ocupăm mai întâi de cazul mai simplu al mișcării de translație considerînd că asupra fiecărui punct material  $m_i$ , acționează o forță externă  $\vec{F}_i^{ext}$ .

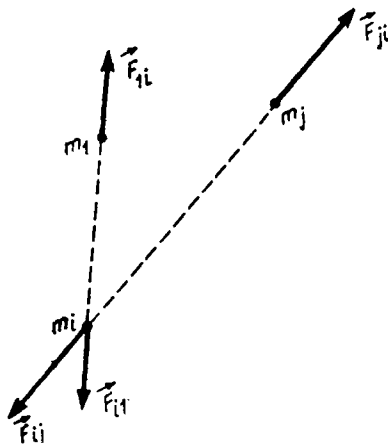


Fig. 1.5.



Deoarece toate punctele materiale au aceeași viteză  $\vec{v}$  și accelerație  $\vec{a}$ , acestor două mărimi nu le atașăm indici.

Legea a doua a lui Newton pentru fiecare punct material are forma

$$m_i \vec{a} = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}. \quad (5.6)$$

Sumînd după toate valorile posibile ale lui „ $i$ ” și ținînd seama de (5.5), rezultă

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

sau

$$\vec{a} \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}. \quad (5.7)$$

Notînd  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$  suma tuturor forțelor externe asupra tuturor particulelor constituente ale corpului și avînd în vedere că  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ , reprezintă masa totală a rigidului, obținem relația

$$M \vec{a} = \vec{F}, \quad (5.8)$$

care ne permite să găsim accelerația mișcării de translație a solidului, dată fiind masa sa totală  $M$  și forța externă  $\vec{F}$ . Mai mult decît atît, relația (5.8) ne arată că mișcarea de translație a solidului poate fi privită ca o mișcare de translație a unui punct material în care este concentrată întreaga masă  $M$  a corpului și care se află sub acțiunea unei forțe egală cu suma vectorială a tuturor forțelor exterioare.

Să presupunem acum că mișcarea corpului nu mai este de translație, așa încît diferitele sale puncte au viteze  $\vec{v}_i$  și accelerații  $\vec{a}_i$  diferite.

Din acest motiv relația (5.6) devine

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}, \quad (5.6a)$$

deci în loc de (5.7), vom avea

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}. \quad (5.7a)$$

Avînd în vedere că  $\vec{a}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ , avem

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}. \quad (5.9)$$

Considerînd că masele  $m_i$  sînt constante în timp, forța devine

$$\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right). \quad (5.10)$$

Dacă definim un vector

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (5.11)$$

relația (5.10) devine

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (5.12)$$

Punctul al cărui vector de poziție este  $\vec{R}$  se numește *centru de masă* sau *centru de inerție* și coincide cu punctul de aplicație al rezultantei forțelor de gravitație. În cazul particular în care alegem originea sistemului de coordonate chiar în centrul de masă al corpului, vectorul  $\vec{R}$  este nul, de unde rezultă

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0. \quad (5.13)$$

Din relația (5.12) rezultă că centrul de masă al rigidului are aceeași accelerație  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$  ca cea a unui punct material de masă egală cu masa totală a corpului

ce se află sub acțiunea unei forțe egale cu suma forțelor externe.

Cum în cazul translației toate punctele materiale au aceeași accelerație, rezultă că putem descrie mișcarea întregului rigid considerînd doar mișcarea centrului său de masă. Aceasta revine de fapt la asimilarea rigidului, în translație, cu un punct material de masă egală cu întreaga masă a corpului și care este plasat în centrul de inerție. De acest lucru ne-am folosit în mod tacit în capitolul de dinamică atunci cînd am tratat mișcarea de translație a corpurilor sub influența diferitelor forțe (greutate, forță elastică etc.) ca și cum am fi avut de-a face cu puncte materiale.

### 5.3. MOMENTUL CINETIC ȘI MOMENTUL DE INERȚIE. LEGEA CONSERVĂRII MOMENTULUI CINETIC

Să considerăm un corp rigid care se rotește uniform în jurul unei axe  $OO'$  a cărei direcție nu variază în timp. Orice punct material de masă  $m_i$ , situat la distanța  $r_i$  de axa de rotație, se mișcă după un cerc de rază  $r_i$ , situat într-un plan perpendicular pe axa de rotație, avînd o viteză  $v_i$  după direcția tangentei la cerc (fig. I.5.5.).

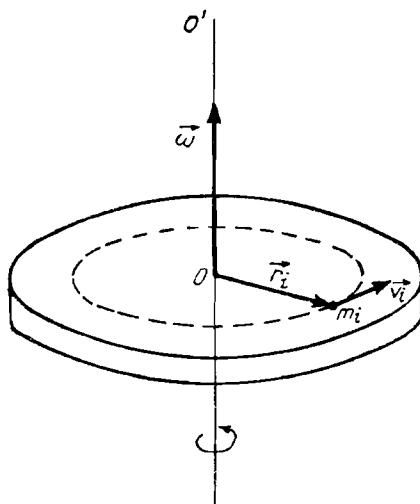


Fig. 1.5.5

Momentul cinetic  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$  al punctului material de masă  $m_i$ , fiind un vector perpendicular pe planul format de  $\vec{r}_i$  și  $\vec{v}_i$ , are direcția lui  $\vec{\omega}$ , iar regula burghiului ne arată că are și sensul lui  $\vec{\omega}$ . Momentul cinetic total al rigidului este, evident,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i). \quad (5.14)$$

Deoarece toate punctele materiale se mișcă după cercuri conținute fie în același plan, fie în plane paralele, toate momentele cinetice  $\vec{L}_i$  au aceeași direcție, deci modulul momentului cinetic total este pur și simplu suma algebrică a modulelor momentelor cinetice individuale.

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i v_i, \quad (5.15)$$

unde am avut în vedere că  $L_i = m_i r_i v_i$ , vectorii  $\vec{r}_i$  și  $\vec{v}_i$  fiind perpendiculari între ei.

Ținând seama că viteza unghiulară este aceeași pentru toate punctele, aceasta poate fi scoasă în afara semnelui de sumare. Înlocuind  $v_i = \omega r_i$  obținem

$$L = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (5.16)$$

Mărimea

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (5.17)$$

care reprezintă suma produselor dintre masa fiecărui punct material al solidului și pătratul distanței sale pînă la axa de rotație se numește *moment de inerție* față de axa de rotație. Se poate stabili acum relația între  $L$  și  $\mathcal{J}$ :

$$L = \mathcal{J} \omega \text{ sau } \vec{L} = \mathcal{J} \vec{\omega}. \quad (5.18)$$

După cum am demonstrat anterior (§ 3.7), derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total este egală cu momentul resultant al forțelor externe.

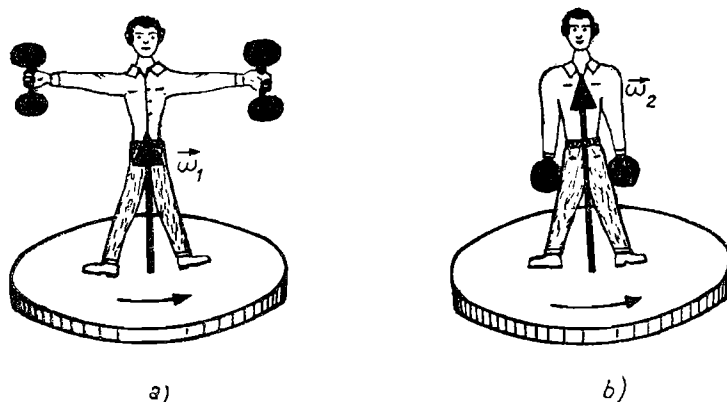


Fig. 1.5.6

Deoarece în mișcarea uniform circulară momentul forței externe este nul, rezultă că în momentul cinetic total se conservă în timp. Din acest motiv, modificarea momentului de inerție provoacă a modificare a vitezei unghiulare, așa încît produsul lor rămîne constant. Dacă o persoană stă cu brațele întinse ținînd în mîini două greutăți de masă  $M$ , iar suprafața pe care se sprijină se rotește fără frecare cu viteza unghiulară  $\vec{\omega}_1$  (fig. 1.5.6a), persoana va avea un moment  $L = \mathcal{J}_1 \omega_1$ .

Valoarea momentului de inerție  $\mathcal{J}_1$  depinde nu numai de masa omului și a greutăților dar și de distanțele de la masele  $M$  pînă la axa de rotație. Prin aducerea brațelor alături de corp în timpul rotației (fig. 1.5.6b), se modifică momentul de inerție deoarece se schimbă distribuția maselor față de axa de rotație. Pentru că distanța față de axa de rotație s-a micșorat, noul moment de inerție  $\mathcal{J}_2$  va fi mai mic decît  $\mathcal{J}_1$  din care cauză omul se va roti mai repede cu o viteză unghiulară  $\omega_2$  dată de relația  $\mathcal{J}_2 \omega_2 = \mathcal{J}_1 \omega_1$ , relație impusă de conservarea momentului cinetic (fig. 1.5.6b).

După cum este ușor de observat, din relația de definiție (5.17), momentul de inerție depinde și de poziția axei de rotație și de forma geometrică a corpului. Nu vom arăta în cele ce urmează modul de calcul al acestor mărimi deosebit de importante, ci vom da direct valorile lui  $\mathcal{J}$  pentru cîteva corpuri de formă geometrică des întîlnită, rezultatele fiind valabile doar dacă corpurile au masa  $M$  uniform distribuită (densitatea constantă). În figurile 1.5.7 și 1.5.8 sînt indicate și axele de rotație față de care sînt calculate momentele de inerție respective.

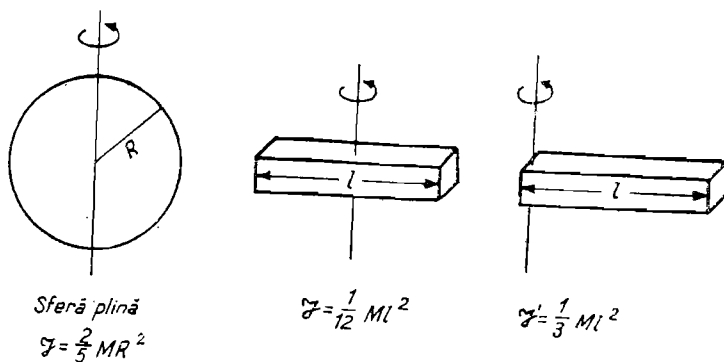


Fig. 1.5.7

Cunoscînd valoarea lui  $\mathcal{J}$  față de o axă de rotație care trece prin centrul de masă al corpului, se poate calcula momentul de inerție  $\mathcal{J}'$  față de orice axă de rotație paralelă cu prima. Pentru a demonstra aceasta să considerăm axa  $x_1x$  care trece prin centrul de masă  $O$  în care alegem originea și axa  $x'_1x'$  paralelă cu  $Ox$  și situată la distanța  $a$  de ea. După cum se vede din fig. 1.5.9,  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}$  deci  $r_i^2 = r_i'^2 = (\vec{r}_i - \vec{a})^2 = r_i^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{r}_i$ , prin urmare

$$\mathcal{J}' = \sum_{i=1}^N m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{r}_i)$$

sau

$$\mathcal{J}' = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^N m_i - 2\vec{a} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i. \quad (5.19)$$

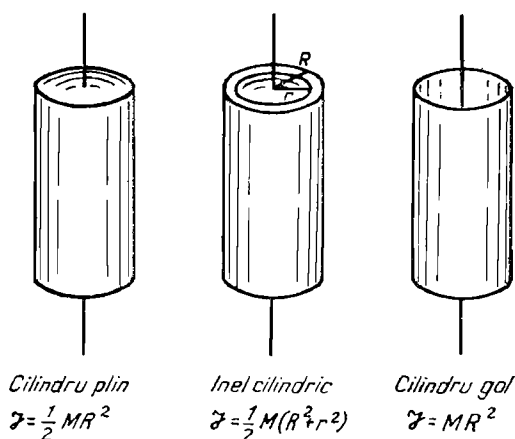


Fig. 1.5.8

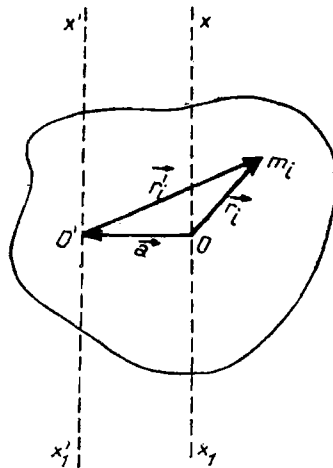


Fig. 1.5.9

Ținînd seama de relația (5.13) și de faptul că  $\sum_{i=1}^N m_i = M$ ,  $\mathcal{J}'$  devine

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} + Ma^2. \quad (5.20)$$

Ultima relație ne arată că  $\mathcal{J}'$  se obține imediat dacă se cunoaște  $\mathcal{J}$ . De asemenea  $\mathcal{J}' > \mathcal{J}$ , ceea ce arată că rigidul manifestă o inerție minimă față de axa de rotație care trece prin centrul său de masă. Se observă că cele două valori ale momentului de inerție corespunzătoare celor două poziții ale axei de rotație din fig. 1.5.7, cu  $a = l/2$ , verifică ecuația (5.20).

#### 5.4. LEGEA A DOUA A DINAMICII PENTRU MIȘCAREA DE ROTAȚIE

Să considerăm din nou mișcarea de rotație a unui rigid în jurul unei axe  $OO'$  de direcție fixă în timp. De data aceasta vom presupune că modulul vitezei unghiulare  $\vec{\omega}$ , deci și cel al vitezei tangențiale  $\vec{v}_i$ , a punctelor materiale  $m_i$  variază în timp. Pe lângă accelerația centripetă, mai apare în aceste condiții o accelerație tangențială  $\vec{a}_i$  pe care o vom presupune constantă în timp adică

$$a_i = \frac{v_i}{t} = \frac{\omega r_i}{t} = \varepsilon r_i, \quad (5.21)$$

unde  $\varepsilon = \omega/t$  este accelerația unghiulară, constantă în timp.

Asupra punctului material de masă  $m_i$  acționează deci o forță tangențială  $F_i = m_i a_i = m_i \varepsilon r_i$  care este cauza mișcării uniform accelerate a punctului material.

Această forță tangențială are față de punctul O momentul

$$\mathcal{M}_i = F_i r_i = \varepsilon m_i r_i^2. \quad (5.22)$$

Modulul momentului total față de  $O$  este

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^N \mathfrak{M}_i = \varepsilon \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

deci

$$\mathfrak{M} = \mathcal{J} \varepsilon. \quad (5.23)$$

Din compararea relației de mai sus cu egalitatea  $F_i = m_i a_i$  rezultă că accelerația unghiulară  $\varepsilon$  este exprimată în funcție de momentul  $\mathfrak{M}$  al forței și de momentul de inerție  $\mathcal{J}$ , în același mod în care accelerația este legată de forța  $F_i$  și masa  $m_i$  a punctului material. Prin urmare, dacă descrierea mișcării de rotație se face cu ajutorul accelerației unghiulare  $\varepsilon$ , care este aceeași pentru toate punctele solidului și nu prin accelerația tangențială  $a_i$  care diferă de la punct la punct, atunci în locul forței intervine momentul forței  $\mathfrak{M}$ , iar în locul masei  $m$  apare momentul de inerție  $\mathcal{J}$ . Din acest motiv, relația (5.23) poate fi considerată drept expresia celui de-al doilea principiu al mecanicii pentru mișcarea de rotație a solidului.

Pentru că unui moment  $\mathfrak{M}$ , bine precizat, îi corespunde o accelerație unghiulară  $\varepsilon$  invers proporțională cu  $\mathcal{J}$ , se poate considera că momentul de inerție este o măsură a inerției corpurilor care execută mișcări de rotație.

Deoarece momentul de inerție depinde de distanța dintre punctele materiale și axa de rotație, rezultă că la două axe de rotație diferite corespund în general valori diferite ale lui  $\mathcal{J}$ . Cu alte cuvinte, rigidul manifestă proprietăți de inerție diferite la rotațiile în jurul unor axe diferite.

În cazul particular în care  $\mathfrak{M} = 0$ , se obține  $\varepsilon = 0$ , adică viteza unghiulară  $\omega$  este constantă. Rigidul se va găsi fie în repaus fie în mișcare de rotație unghiulară. O roată mobilă în jurul unei axe ce trece prin centrul său de greutate, s-ar roti uniform la nesfârșit fără intervenția unei forțe dinafară dacă nu ar exista frecările.

## 5.5. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE

Un punct material de masă  $m_i$  al solidului aflat în mișcare de rotație cu viteză unghiulară  $\omega$  (fig. I.5.9) are energia cinetică  $W_{ci} = \frac{m_i v_i^2}{2}$  unde  $v_i = \omega r_i$ , deci

$$W_{ci} = \frac{\omega^2}{2} m_i r_i^2. \quad (5.24)$$

Energia cinetică de rotație  $W_c$  a întregului corp este dată de suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor materiale ce alcătuiesc rigidul.

$$W_c = \sum_{i=1}^N W_{ci} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \quad (5.25)$$

unde  $\mathcal{J}$  este momentul de inerție față de axa de rotație respectivă. Chiar dacă rotația nu se efectuează în jurul unei axe ce trece prin centrul de masă, folosind relația (5.20) avem posibilitatea să exprimăm energia cinetică cu ajutorul

momentului de inerție față de o axă paralelă cu axa de rotație ce trece prin centrul de masă. Rezultă

$$W_c = \frac{1}{2} (\mathcal{J}_c + Ma^2) \omega^2 = \frac{1}{2} Ma^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2. \quad (5.26)$$

$\mathcal{J}_c$  fiind momentul de inerție față de axa ce trece prin centrul de masă. În acest fel este posibil să exprimăm energia cinetică a corpului cu ajutorul lui  $\mathcal{J}_c$ , indiferent de poziția axei de rotație.

Mișcarea de rostogolire, fără frecare, a unui cilindru pe un plan orizontal poate fi imaginată ca o succesiune de rotații instantanee în jurul fiecărei generatoare de contact dintre cilindru și plan, care joacă rolul axelor instantanee de rotație. Direcția axelor instantanee de rotație nu se modifică în timp, acestea deplasându-se doar în lungul suprafeței pe care are loc rostogolirea (fig. I.5.10).

Axa instantanee de rotație este perpendiculară pe planul figurii și trece prin  $O'$  la momentul  $t$  și prin  $O'_1$  la  $t + \Delta t$ .

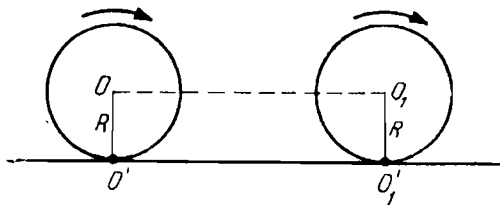


Fig. I.5.10

Deoarece distanța dintre axa instantanee de rotație și axa paralelă cu ea ce trece prin centrul de masă  $O$ , ce coincide cu centrul de simetrie pentru un cilindru omogen, este  $a = R$ , relația (5.26) devine

$$W_c = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_c \omega^2 \quad (5.27)$$

unde  $\mathcal{J}_c = \frac{MR^2}{2}$  pentru cilindrul plin și omogen. Rezultă

$$W_c = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{4} MR^2 \omega^2 = \frac{3}{4} MR^2 \omega^2. \quad (5.28)$$

În mod asemănător se obține energia cinetică a unei sfere ce se rostogolește:

$$W_c = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \omega^2 = \frac{7}{10} MR^2 \omega^2. \quad (5.29)$$

## 5.6. EFECTUL GIROSCOPIC

Vom numi giroscop un disc de moment de inerție mare, ce se rotește rapid în jurul axei sale de simetrie. În fig. I.5.11 este reprezentat un giroscop ce se rotește cu viteza unghiulară constantă  $\vec{\omega}_0$  în jurul axei orizontale  $Oy$ . Acestei rotații îi corespunde un moment cinetic  $\vec{L}_0$  dirijat tot după  $Oy$ .



Să presupunem acum că dorim să rotim giroscopul în jurul axei  $Ox$  cu o viteză unghiulară  $\bar{\Omega}$  constantă, mult mai mică decât cea precedentă ( $\Omega \ll \omega_0$ ). Să stabilim ce forțe sînt necesare pentru a realiza această situație. Să ne imaginăm în acest scop că am rotit giroscopul în jurul axei  $Ox$ , deci și axa  $Oy$  cu un unghi  $\Delta\theta$  într-un timp  $\Delta t$ . Din acest motiv direcția vitezei unghiulare și a

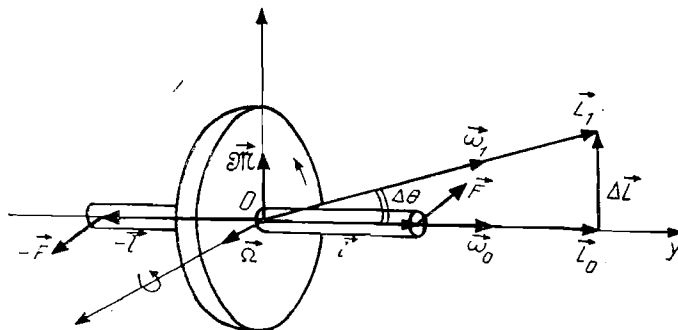


Fig. 1.5.11

momentului cinetic variază, acestea devenind  $\vec{\omega}_1$  și respectiv  $\vec{L}_1$ . Modulele acestor vectori nu s-au modificat însă, deoarece nu are loc decît o modificare a direcției axei de rotație care nu conduce la o modificare a turației. Variația momentului cinetic  $\Delta\vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_0$  este un vector orientat după axa  $Oz$  (fig. 1.5.11). Acestei variații îi corespunde un moment al forței  $\vec{\mathcal{M}} = \Delta\vec{L}/\Delta t$  care are aceeași direcție ca și  $\Delta\vec{L}$ , adică direcția axei  $Oz$ . Mărimea momentului forței este

$$\mathcal{M} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_0 \Delta\theta}{\Delta t} = L_0 \Omega, \quad (5.30)$$

unde în triunghiul isoscel construit cu  $\vec{L}_0$  și  $\vec{L}_1$  am aproximat lungimea coardei  $\Delta\vec{L}$  prin cea a arcului  $L_0 \Delta\theta$ . Prin urmare pentru a roti giroscopul în jurul axei  $Ox$ , trebuie să existe un moment  $\mathcal{M}$  perpendicular pe planul  $xOy$ . Acest moment poate fi produs de forțele paralele și de sens contrar,  $\vec{F}$  și  $(-\vec{F})$ , din fig. 1.5.11:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{l} \times \vec{F} + (-\vec{l}) \times (-\vec{F}) = 2\vec{l} \times \vec{F}. \quad (5.31)$$

Avînd în vedere că  $\vec{F}$  este perpendiculară pe  $\vec{l}$ , se obține

$$\mathcal{M} = 2Fl \quad (5.32)$$

de unde rezultă modulul  $F$  al forțelor ce trebuie aplicate pentru a obține rotirea giroscopului în jurul axei  $Ox$ :

$$F = \frac{L_0 \Omega}{2l}. \quad (5.33)$$

Dacă ținem seama și de relația (5.18) obținem

$$F = \frac{J\omega_0\Omega}{2l}. \quad (5.34)$$

Deosebit de interesant este însă faptul că direcțiile forțelor  $\vec{F}$  și  $(-\vec{F})$  sînt paralele cu axa de rotație  $Ox$ , deci, în absența rotației inițiale, forțele ar fi rotit corpul în jurul axei  $Oz$ . Dacă există însă o mișcare de rotație în jurul lui  $Oy$  și îi aplicăm giroscopului un cuplu de forțe care tinde săl rotească în jurul unei axe perpendiculare pe axa de rotație, acesta va căpăta o mișcare de rotație suplimentară în jurul unei a treia axe, perpendiculară pe primele două (axa  $Ox$  în cazul discutat mai sus). Dacă forțele aplicate ar fi fost paralele cu axa  $Oz$ , adică ar fi existat tendința rotirii corpului în jurul axei  $Ox$ , giroscopul s-ar fi rotit în jurul celei de-a treia axe  $Oz$  care este perpendiculară pe primele două ( $Ox$  și  $Oy$ ). Acest fenomen a fost numit *efect giroscopic*.

Experiențe simple ne permit să punem în evidență efectul giroscopic. Pe un disc ce se poate roti se află un om în repaus ținînd în mîini o roată ce se rotește în jurul axei orizontale  $Oy$  (fig. I.5. 12a). Printr-o rotație de  $90^\circ$  axul roții este adus pe verticală ca în figura I.5. 12b. Vom constata că omul și discul turnant se vor roti în sens invers sensului de rotire al roții. Conform celor discutate, știm acum că pentru a aduce roata din poziția (a) în poziția (b) trebuie aplicat cuplul de forțe indicat în fig. I.5.11. Acest lucru este realizat de către mîinile omului. Dar legea a treia a lui Newton cere ca asupra omului să acționeze forțe egale și de sens contrar, a căror direcție va fi deci paralelă cu axa  $Ox$ . Cum omul nu se rotea la momentul inițial, momentul forțelor de reacțiune, dirijat după  $Oz$  în jos, provoacă rotirea în sens opus în jurul verticalei  $Oz$ .

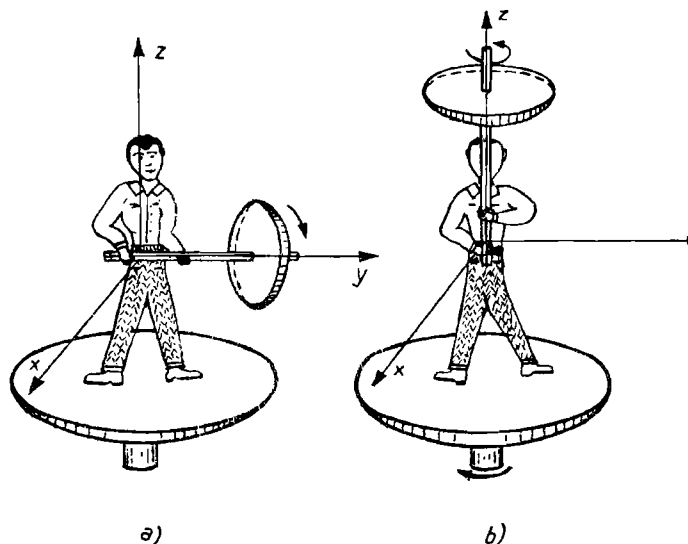


Fig. I.5.12

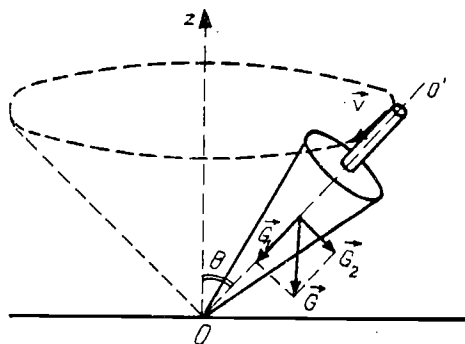


Fig. I.5.13

Calitativ, experiența de mai sus poate fi explicată și mai ușor prin legea conservării momentului cinetic. În poziția (a) sistemul roată + om + disc are un moment cinetic dat doar de mișcarea roții în jurul lui  $Oy$ . Direcția momentului cinetic total al sistemului va coincide cu axa  $Oy$  din care cauză componenta sa  $Oz$  este nulă. În poziția (b) momentul cinetic al roții este dirijat după  $Oz$ ; pentru ca să rămână nulă componenta pe această axă a momentului cinetic total trebuie ca omul și roata să înceapă să se rotească în sens contrar.

Efectul giroscopic explică și mișcarea unui titirez de forma unui con a cărui axă de rotație  $OO'$  face unghiul  $\theta$  cu verticala  $Oz$  a locului (fig. I.5.13).

Componenta  $\vec{G}_2$  a greutateii care tinde să încline mai mult axa titirezului, datorită efectului giroscopic, produce de fapt o rotire a axei  $OO'$  în jurul unei axe paralele cu  $\vec{G}_2$ . Din acest motiv fiecare punct al axei  $OO'$  capătă o viteză liniară  $\vec{v}$  ce este perpendiculară pe planul format de direcția axei suplimentare de rotație și de  $OO'$ . În mișcarea sa, numită mișcare de precesie, axa  $OO'$  descrie o suprafață conică a cărei axă de simetrie coincide cu  $Oz$ . Datorită mișcării de precesie în jurul axei  $Oz$  după care acționează forța de greutate, titirezul nu se răstoarnă.

Efectul giroscopic are numeroase aplicații în tehnică. Dintre acestea menționăm ghintuirea armelor de foc care au drept scop imprimarea unei rotații rapide proiectilului în jurul axei sale, transformându-l astfel într-un giroscop de moment cinetic propriu mare. Din această cauză, momentul forțelor care apar datorită rezistenței aerului nu produce răsturnarea proiectilului ci doar o precesie a acestuia în jurul direcției tangentei la traiectorie (după care acționează forțele de rezistență).

Efectul giroscopic poate avea o influență dăunătoare asupra motoarelor care au piese masive, de moment de inerție mare, ce se rotesc rapid. De exemplu, la un viraj scurt în jurul axului vertical al unui vapor, asupra axului turbinei acționează un cuplu de forțe ce are drept efect o puternică solicitare a lagărelor. Relația (5.34) ne dă mărimea forțelor ce apar în acest caz, unde  $\omega_0$  este viteza unghiulară a turbinei, iar  $\Omega$  e viteza unghiulară a virajului.

## 6. Statica

### 6.1. ECHILIBRUL FORTELOR

În capitolul consacrat dinamicii s-a arătat că dacă asupra unui punct material acționează o forță îi imprimă acestuia o accelerație proporțională cu forța. De asemenea s-a arătat că în cazul cînd acționează mai multe forțe, accelerația este proporțională cu suma (rezultanta) tuturor forțelor (Principiul suprapunerii efectelor. § 3.2). Dacă această rezultantă este zero atunci și accelerația este nulă și punctul material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă. Cînd este vorba de un corp de dimensiuni finite problema devine ceva mai complicată. Se poate întîmpla ca și în acest caz, sub acțiunea simultană a mai multor forțe corpul să nu își modifice starea de mișcare sau repaus relativ (accelerațiile tuturor punctelor sale să fie nule). Vom spune că avem de-a face cu un *echilibru al forțelor*.

Un exemplu simplu de echilibru al forțelor ni-l oferă parașuta. Sub acțiunea greutății proprii sistemul om—parașută cade spre pămînt într-o mișcare care la începutul căderii este uniform accelerată. Datorită rezistenței aerului apare însă o forță depinzînd de viteză care se opune mișcării. În acest fel, la un moment dat această forță compensează complet greutatea și parașutistul se va mișca uniform spre pămînt, cu o viteză egală cu cea obținută pînă în momentul în care s-a realizat echilibrul forțelor\*. În exemplul de față avem de-a face cu un *echilibru dinamic*.

Dacă așezăm un corp pe un plan înclinat (fig. I.3.16) asupra lui acționează componenta greutății în lungul planului  $F_1 = G \sin \alpha$  și forța de frecare  $F_f = \mu_f F_n = \mu_f G \cos \alpha$ , adică  $F = F_1 - F_f = G (\sin \alpha - \mu_f \cos \alpha)$ . Pentru o anumită înclinare a planului dată de  $\tan \alpha = \mu_f$  forța rezultantă este nulă ( $F = 0$ ), astfel că avem din nou un echilibru al forțelor. Spre deosebire de primul exemplu în care aveam un echilibru esențialmente dinamic, în cel de-al doilea, corpul se va mișca uniform sau va fi în repaus după cum, atunci cînd îl așezăm pe plan, îi imprimăm sau nu o anumită viteză inițială.

În sfîrșit, dacă așezăm, de exemplu, o carte pe o masă aceasta rămîne în repaus deoarece forța de greutate ( $\vec{G}$ ) este echilibrată (conform legii a III-a a mecanicii, § 3.4) de forța de reacțiune a mesei ( $\vec{F}_R = -\vec{G}$ ) care acționează asupra cărții. În acest caz avem de-a face cu un *echilibru static*. Construirea clădirilor de exemplu se bazează tocmai pe realizarea echilibrului static dintre

\* Dacă nu ar exista forța de rezistență atunci un parașutist care a sărit din avion de la 2000 m înălțime s-ar ciocni de pămînt cu o viteză de cca 720 km/oră.

greutatea fiecărui element de construcție și reacțiunea suportului pe care acesta este așezat.

Statica este acea parte a mecanicii care studiază echilibrul static creat de forțele exterioare care acționează asupra corpurilor. Ea se ocupă cu transformarea sistemelor de forțe, aplicate corpului considerat rigid, în sisteme echivalente și de stabilirea condițiilor de echilibru ale acestor sisteme. În capitolul 5 am definit corpul rigid ca un corp care nu se poate deforma sub acțiunea forțelor exterioare. Este evident că în natură nu există asemenea corpuri, dar putem considera că dacă forțele care acționează asupra lor nu sînt prea mari, corpul real se comportă ca un corp rigid.

## 6.2. SISTEME DE FORȚE CONCURENTE. COMPUNEREA FORȚELOR. MOMENTUL FORȚEI

În capitolul consacrat mișcării corpului rigid am văzut că dacă asupra acestuia acționează două forțe egale și direct opuse\* (fig. I.6.1) în două puncte diferite, starea sa de mișcare sau repaus nu este modificată. Astfel de forțe nu au nici un efect asupra solidului și deci dacă avem un sistem de forțe care acționează asupra unui corp rigid putem oricînd introduce sau suprima două forțe egale și direct opuse fără ca prin aceasta efectul sistemului de forțe asupra rigidului să se schimbe.

Aceasta ne permite să arătăm că forțele care acționează asupra rigidului sînt *forțe alunecătoare*, deoarece putem deplasa *punctul de aplicație al forței pe suportul său fără ca efectul pe care-l produce asupra rigidului să se modifice*. (Forțele care acționează asupra rigidului pot fi reprezentate deci prin vectori alunecători.) Pentru aceasta să considerăm că asupra unui rigid acționează

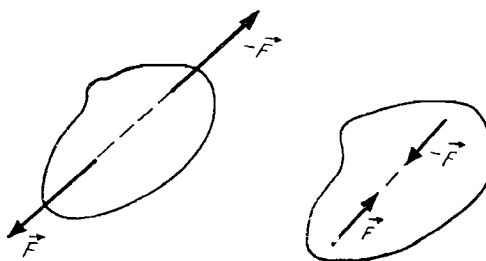


Fig. I.6.1

în punctul  $A$  o forță  $\vec{F}$  (fig. I.6.2a). Să introducem acum în punctul  $B$  de pe suportul lui  $\vec{F}$  două forțe egale și opuse  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$  (fig. I.6.2b) care evident nu modifică efectul forței aplicate  $\vec{F}$ . Conform propoziției enunțate mai înainte putem acum suprima forțele  $\vec{F}$  din punctul  $A$  și  $-\vec{F}$  din punctul  $B$  (fig. I.6.2c) fără ca prin aceasta să modificăm efectul. Ori situația din fig. I.6.2 c diferă din cea din fig. I.6.2a prin faptul că am deplasat punctul de aplicație al forței, ceea ce justifică afirmația făcută.

\* Prin direct opuse înțelegem că acționează în lungul aceleiași drepte și sînt de sens contrar.

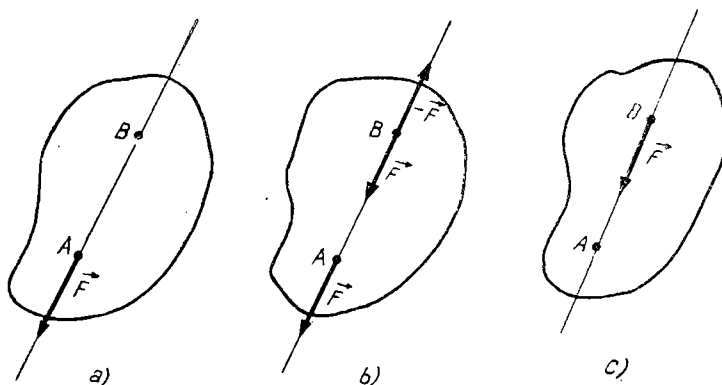


Fig. 1.5.2

Numim *forțe concurente* un sistem de forțe care acționează asupra rigidului și au același punct de aplicare. Din proprietatea enunțată mai înainte rezultă însă că pot fi considerate *forțe concurente* și *forțe* ale căror suporturi se intersectează.

Conform principiului suprapunerii efectelor, dacă asupra unui rigid acționează mai multe forțe concurente efectul lor este același cu cel al rezultantei lor. Deoarece forțele sînt mărimi vectoriale, rezultanta se găsește după regula adunării vectorilor:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (6.1)$$

unde  $\vec{F}_i$  sînt cele  $n$  forțe concurente care acționează asupra rigidului. Reamintim că dacă forțele acționează pe același suport, rezultanta va avea aceeași direcție, mărimea ei fiind obținută prin sumarea algebrică a mărimilor forțelor

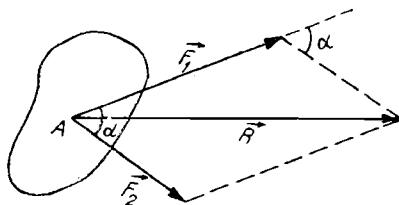


Fig. 1.6.3

respective. În cazul în care suporturile sînt diferite, forțele se compun două cîte două după regula paralelogramului, astfel că (fig. 1.6.3) avem

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha, \quad (6.2)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre cele două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ . În cazul a patru forțe, de exemplu, găsim pentru început rezultanta  $\vec{R}_1$  a forțelor  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  (fig. 1.6.4), apoi rezultanta  $\vec{R}_2$  prin compunerea lui  $\vec{R}_1$  cu  $\vec{F}_3$  și în final rezultanta gene-

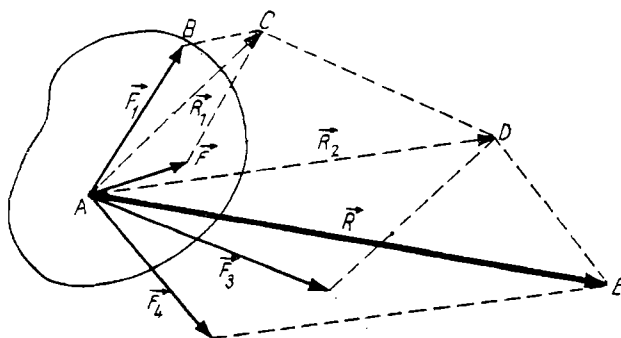


Fig. I.6.4

rală  $\vec{R}$  prin compunerea lui  $\vec{R}_2$  cu  $\vec{F}_4$ . Această operație este echivalentă cu construirea directă a conturului poligonal  $ABCDEA$  în care latura  $\overline{AB}$  este luată în lungul lui  $\vec{F}_1$  și de lungime egală cu mărimea lui  $\vec{F}_1$  (în unitățile alese), latura  $\overline{BC}$  este paralelă cu  $\vec{F}_2$  și de lungime egală cu  $\vec{F}_2$  ș.a.m.d. La sfârșit, latura  $\overline{AE}$  care închide conturul poligonal va avea direcția rezultantei  $\vec{R}$  și o lungime egală cu aceasta.

De multe ori ne interesează să rezolvăm problema inversă și anume, descompunerea unei forțe  $\vec{F}$  după două direcții date. Se aplică și în acest caz tot regula paralelogramului.

O altă mărime importantă este *momentul forței*  $\vec{F}$  în raport cu un punct  $O$ , pe care l-am definit în § 3.7 ca

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (6.3)$$

unde  $\vec{r}$  este vectorul de poziție față de  $O$  al punctului de aplicație al forței  $\vec{F}$  (vezi fig. I.3.8a). Pentru un sistem de  $n$  forțe momentul resultant în raport cu punctul  $O$  este

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (6.4)$$

Deoarece relația (6.3) definește o mărime vectorială, suma din ecuația (6.4) se va face tot după regula adunării vectorilor.

Să observăm că în timp ce  $\vec{R}$  rămâne nemodificat oricare ar fi punctul  $O$ ,  $\vec{M}_O$  se modifică. Într-adevăr, dacă efectuăm calculul în raport cu punctul  $O'$  momentul resultant are expresia

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i.$$

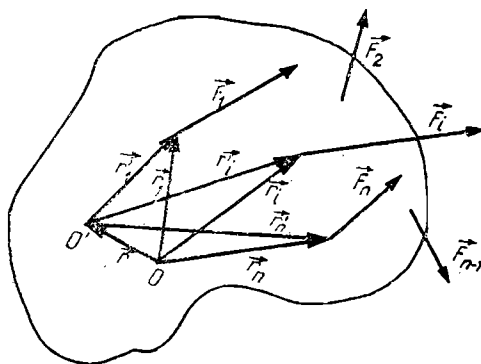


Fig. 1.6.5

Cum  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}$  (vezi fig. 1.6.5), obținem:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}) \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r} \times \sum \vec{F}_i$$

deci:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O - \vec{r} \times \vec{R}. \quad (6.5)$$

Această relație ne arată că atât mărimea cât și direcția momentului rezultat se modifică dacă schimbăm punctul față de care efectuăm calculul.

Să considerăm cazul particular reprezentat în figura 1.6.5 în care există o axă de rotație care trece prin punctul  $O$ , perpendiculară pe planul hîrtiei (planul în care se găsesc forțele). În acest caz, deoarece toate forțele  $\vec{F}_i$  și vectorii  $\vec{r}_i$  sînt în planul perpendicular pe axă, momentul tuturor forțelor și deci și momentul rezultat sînt orientați în lungul axei. Relația (6.4) devine

$$\mathcal{M}_O = \sum \varepsilon_i d_i F_i, \quad (6.6)$$

unde  $d_i$  reprezintă distanța de la punctul  $O$  la suportul forței  $F_i$  (brațul forței), iar  $\varepsilon_i$  este  $+1$  sau  $-1$  după cum forța  $F_i$  tinde să rotească corpul în sens direct trigonometric sau în sens contrar.

Dacă am socoti că momentul  $\mathcal{M}_O$  este produs de o singură forță ( $F_e$ ) aceasta ar putea să înlocuiască echivalent toate forțele  $F_i$ , care sînt aplicate simultan corpului. Există însă o infinitate de forțe situate în planul perpendicular pe axa de rotație care să dea același moment  $\mathcal{M}_O$  deoarece putem alege brațul forței ( $d_e$ ) corespunzător mărimei forței astfel ca  $d_e F_e = \mathcal{M}_O$ . Pe de altă parte, rezultanta forțelor aplicate este o forță care trebuie să producă același efect ca și forțele date. Aceasta înseamnă că brațul ei ( $d_R$ ) trebuie să aibă o astfel de lungime încît  $\mathcal{M}_O = d_R \cdot R$ , de unde rezultă expresia

$$\mathcal{M}_O = \sum \varepsilon_i d_i F_i = d_R \cdot R. \quad (6.7)$$

Deci, momentul rezultat al forțelor  $F_i$  este egal cu momentul rezultantei acestor forțe. Afirmația aceasta constituie *teorema lui Varignon*. Menționăm



că de fapt, teorema se demonstrează într-un cadru mai larg decît cel al discuției noastre, ea fiind valabilă indiferent de faptul că forțele sînt sau nu concurente.

Dacă forța nu este în planul perpendicular pe axa de rotație, momentul său nu mai este în lungul axei. Descompunem vectorul moment în două componente, una în lungul axei\* și cealaltă în planul perpendicular pe ea. În timp ce prima componentă duce la rotația corpului în jurul axei, cea de-a doua tinde să deplaseze această axă.

### 6.3. SISTEME DE FORȚE PARALELE. CUPLU DE FORȚE

În continuare ne vom ocupa de un sistem de 2 forțe paralele, extinderea la cazul mai multor forțe fiind simplă. Să considerăm două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  paralele și de același sens (fig. I.6.6). Rezultanta lor va fi paralelă și de același sens cu forțele date, iar mărimea sa va fi egală cu suma modulelor celor două forțe:

$$R = F_1 + F_2. \quad (6.8)$$

Lucrurile stau ca și cînd am considera această situație ca un caz limită al compunerii a două forțe concurente atunci cînd unghiul dintre ele este zero (vezi ecuația 6.2).

Pentru determinarea punctului de aplicație al rezultantei ne folosim de teorema lui Varignon. Dacă alegem punctul  $O$  în raport cu care calculăm momentul total chiar pe suportul rezultantei, momentul  $\mathcal{M}_O$  este nul. Atunci, conform ecuației (6.7), suma momentelor forțelor  $F_1$  și  $F_2$  față de acest punct trebuie să fie zero, adică

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0$$

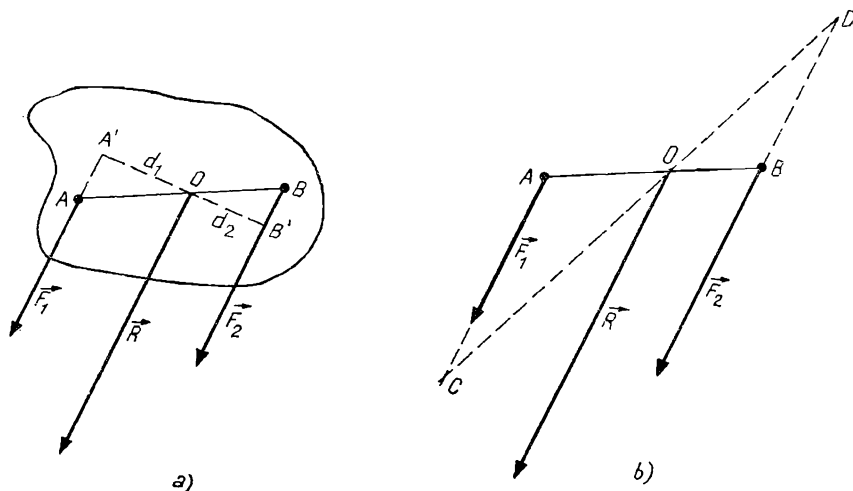


Fig. 1.6.6

\* Aceasta se numește momentul forței în raport cu axa respectivă.

(în fața celui de al doilea termen am luat semnul minus deoarece  $F_2$  tinde să producă rotația în sens invers trigonometric). Din relația precedentă rezultă

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (6.9)$$

unde am folosit asemănarea triunghiurilor  $OAA'$  și  $OBB'$ . Așadar, rezultanta a două forțe paralele și de același sens are punctul de aplicație pe segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale celor două forțe și împarte acest segment în părți invers proporționale cu mărimile acestor forțe.

Se poate obține punctul de aplicație al rezultantei pe cale grafică astfel: pe suportul forței  $\vec{F}_1$  și în sensul său (fig. I.6.6b) luăm segmentul  $\overline{AC}$  egal în mărime cu  $\vec{F}_2$  iar pe suportul lui  $\vec{F}_2$  însă în sens invers luăm segmentul  $\overline{BD}$  de lungime egală cu mărimea lui  $\vec{F}_1$ . Punctul de intersecție al segmentelor  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  este tocmai punctul de aplicație al rezultantei.

În cazul forțelor paralele și de sens contrar, rezultanta va avea din nou suportul paralel cu direcțiile celor două forțe. Mărimea ei va fi

$$R = |F_1 - F_2|, \quad (6.10)$$

dar va fi orientată în sensul forței celei mai mari.

Pentru a găsi punctul de aplicație al rezultantei recurgem din nou la teorema lui Varignon, observînd că de data aceasta punctul de aplicație trebuie să se găsească în afara segmentului care unește punctele de aplicație ale forțelor  $F_1$  și  $F_2$ , deoarece numai astfel momentele celor două forțe pot avea semne opuse (fig. I.6.7). Rezultă deci relația  $-d_1F_1 + d_2F_2 = 0$ , de unde obținem condiția

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (6.11)$$

care ne arată, la fel ca în cazul precedent, că distanțele de la punctele de aplicație ale forțelor sînt invers proporționale cu mărimile forțelor. Construcția grafică este similară celei precedente.

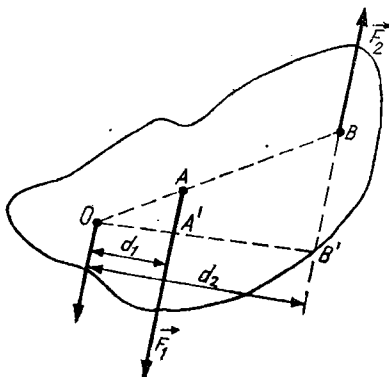


Fig. I.6.7

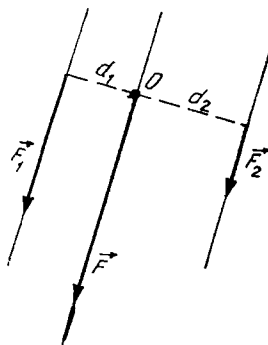


Fig. 1.6.8

În cazul unui sistem de mai multe forțe paralele procedăm fie din aproape în aproape (compunem două forțe și obținem rezultanta parțială  $R_1$ ;  $R_1$  este compusă apoi cu forța a treia, ș.a.m.d.) fie aplicînd direct teorema lui Varignon.

În practică, apare de multe ori necesitatea de a descompune o forță după două direcții paralele cu o forță dată (fig. 1.6.8). Suma celor două forțe componente trebuie să fie egală cu forța dată, iar suma momentelor față de punctul  $O$  de pe suportul forței trebuie să fie zero. Avem deci două ecuații

$$F_1 + F_2 = F, \quad d_1 F_1 - d_2 F_2 = 0,$$

care ne determină valorile forțelor componente:

$$F_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} F, \quad F_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} F.$$

Un caz particular de o deosebită importanță îl reprezintă ansamblul a două forțe paralele, de sens contrar și egale în mărime. Deși rezultanta acestui sistem este nulă, forțele nu sînt în echilibru, corpul căpătînd o mișcare de rotație. Un astfel de sistem de forțe formează un *cuplu de forțe*. Să considerăm un corp (fig. 1.6.9) străbătut de o axă de rotație și două forțe paralele, egale și de sens contrar  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ , care se găsesc în planul perpendicular pe axa de rotație. Notînd cu  $d_1$  și  $d_2$  distanțele de la suportul celor două forțe la axa de rotație și cu  $l$  brațul cuplului (adică distanța dintre suporturile celor două forțe), momentul rezultat în raport cu punctul  $O$  în care axa intersectează planul forțelor este

$$\mathcal{M}_O = d_1 F + d_2 F = (d_1 + d_2) F = l \cdot F.$$

$\mathcal{M}_O$  se numește momentul cu plului și după cum se vede mărimea lui nu depinde de poziția axei de rotație (poziția punctului  $O$ ) fiind egală cu produsul dintre mărimea uneia dintre forțe și brațul cuplului.

Conform teoremei lui Varignon momentul rezultat  $\mathcal{M}_O$  ar trebui să fie egal cu momentul rezultantei ( $d \cdot R$ ). Cum rezultanta este zero putem interpreta această situație în sensul că punctul de aplicație al rezultantei este la infinit ( $d = \infty$ ), astfel ca produsul  $d \cdot R$  să fie finit, diferit de zero și egal cu  $l \cdot F$ .

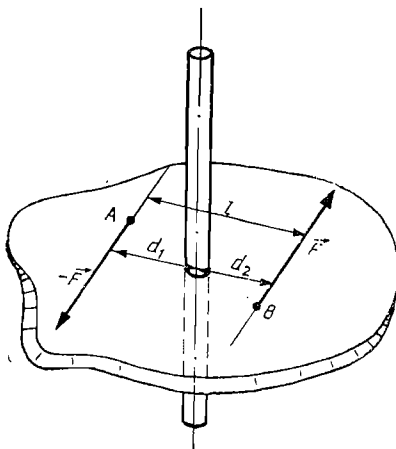


Fig. 1.6.9

Dacă în timpul rotației forțele cuplului își păstrează punctele de aplicație și direcția pe care acționează, momentul cuplului scade datorită micșorării brațului cuplului. Momentul cuplului devine zero și nu avem rotație în situația în care cele două forțe ajung să acționeze în lungul aceluiași suport.

O altă observație importantă este că un corp care nu are o axă fixă de rotație își alege de la sine o axă, ce trece prin centrul său de greutate și este perpendiculară pe planul cuplului.

#### 6.4. CENTRUL DE GREUTATE

Un corp este atras de Pământ cu o forță egală cu greutatea sa  $G = Mg$ . Putem însă considera corpul ca fiind format dintr-un număr foarte mare de puncte materiale\*, fiecare dintre ele fiind atras cu o forță  $G_i$ . Toate aceste forțe sînt orientate în lungul verticalei locului și pentru corpurile de dimensiuni obișnuite pot fi considerate practic paralele. În acest mod, greutatea corpului este rezultanta forțelor paralele  $G_i$  cu care este atras de Pământ fiecare punct material. Punctul de aplicație al acestei rezultante este numit *centru de greutate*.

Se poate arăta atît teoretic cît și experimental că poziția centrului de greutate este bine stabilită pentru fiecare corp și nu depinde de orientarea lui în spațiu. Existența sa ne arată că forța gravitației acționează asupra unui corp ca și cum ar fi aplicată într-un anumit punct cu toate că forța este un vector alunecător.

Această afirmație poate fi dovedită în felul următor. Suspendînd corpul de un fir flexibil (fig. 1.6.10) acesta se va întinde și va lua direcția în care va fi solicitat de rezultanta forțelor gravitaționale (greutatea corpului), ceea ce înseamnă că centrul de greutate se găsește pe dreapta care este în prelungirea

\* De fapt aceasta revine la împărțirea corpului în elemente de dimensiuni foarte mici, astfel ca fiecare din acestea să poată fi echivalat cu un punct material.

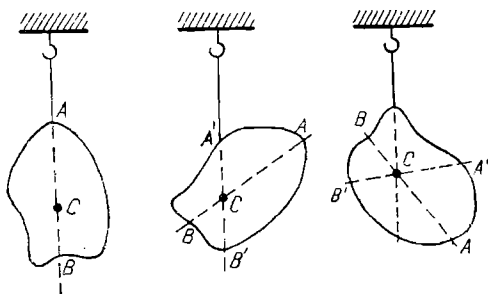


Fig. 1.6.10

firului  $\overline{AB}$ . Suspendăm acum corpul în alt punct și luăm dreapta  $\overline{A'B'}$  în prelungirea firului. Centrul de greutate fiind situat și pe o dreaptă și pe cealaltă, se va găsi deci în punctul de intersecție  $C$  al celor două drepte. Am determinat astfel experimental poziția centrului de greutate. Repetind acum experiența și alegînd alte puncte de suspensie vom constata că prelungirea firului trece totdeauna prin punctul  $C$ .

Centrul de greutate al corpurilor omogene, cu forme geometrice regulate, care posedă axe sau plane de simetrie, va fi totdeauna situat pe axa, respectiv pe planul de simetrie. Astfel pentru o sferă omogenă pentru care orice diametru constituie o axă de simetrie, centrul de greutate se va găsi în punctul de intersecție al diametrelor adică în centrul sferei (fig. 1.6.11a). Pentru un cilindru, centrul de greutate se va găsi în punctul în care axa cilindrului înțeapă un plan perpendicular pe ea și care împarte înălțimea cilindrului în două (fig. 1.6.11b). O bară prismatică dreaptă admite plane de simetrie perpendiculare între ele (fig. 1.6.11c), centrul de greutate găsindu-se în punctul de intersecție al acestora.

Pentru corpuri de formă mai complicată este uneori posibilă împărțirea acestora în părți cu formă geometrică regulată ale căror centre de greutate sînt calculate după regulile indicate mai înainte. Centrul de greutate al corpului va fi punctul de aplicație al rezultantei forțelor paralele care sînt greutatea fiecărei părți.

Trebuie observat că uneori (în general în cazul corpurilor găurite) centrul de greutate se găsește în afara substanței corpului. De exemplu în cazul unei sfere goale (fig. 1.6.11d) centrul de greutate se va găsi în centrul comun al celor două suprafețe sferice care mărginesc substanța corpului.

În sfîrșit menționăm că poziția centrului de greutate al unui rigid coincide cu poziția centrului său de masă definit în § 5.2 din capitolul „Mișcarea corpului rigid”.

Astfel vectorul de poziție al centrului de gravitație în raport cu o origine arbitrar aleasă este

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (5.11)$$

unde  $N$  reprezintă numărul de elemente în care am împărțit corpul dat,  $m_i$  și  $\vec{r}_i$  masa și respectiv vectorul de poziție al elementului  $i$ . În cazul unui corp

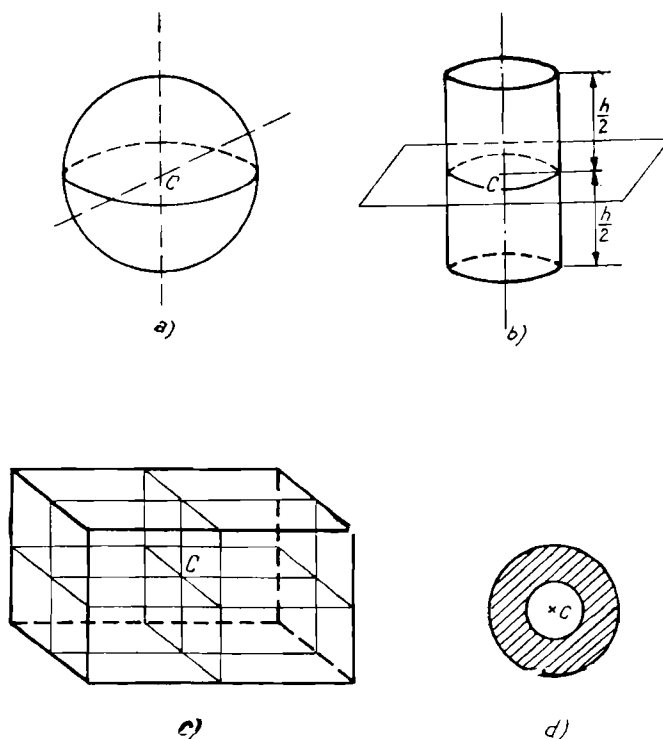


Fig. 1.6.11

omogen de densitate  $\rho$ ,  $m_i$  este egal cu produsul dintre densitatea  $\rho$  și volumul  $V_i$  al elementului respectiv astfel că (5.11) devine

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N V_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N V_i} = \frac{\sum_{i=1}^N V_i \vec{r}_i}{V},$$

unde  $V$  este volumul total al corpului. Demonstrarea relației (5.11) în cadrul staticii este mai complicată și nu va fi prezentată aici.

## 6.5. ECHILIBRUL CORPURILOR SUB ACȚIUNEA GRAVITAȚIEI

În acest paragraf ne vom ocupa de condițiile în care un corp rigid stă în echilibru atunci când asupra sa acționează doar greutatea proprie.

Să considerăm un corp care are o axă de rotație orizontală fixă. Asupra corpului acționează greutatea sa  $\vec{G}$  aplicată în centrul său de greutate  $C$  iar asupra axei acționează reacțiunea  $\vec{F}_R$  care este egală și de sens contrar cu com-

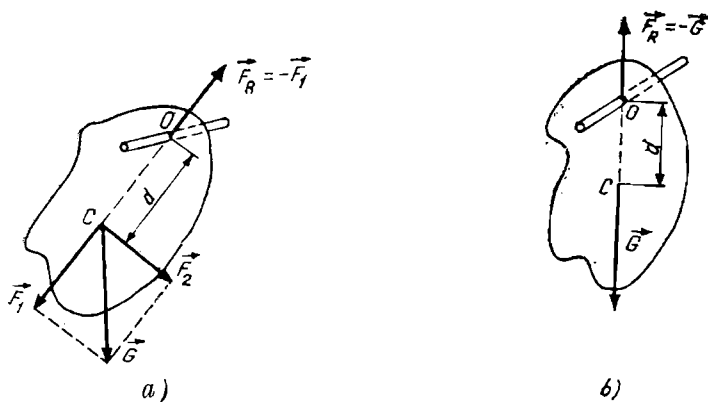


Fig. 1.6.12

ponenta  $\vec{F}_1$  a lui  $\vec{G}$  în lungul dreptei care trece prin  $C$  și este perpendiculară pe axă (fig. 1.6.12 a).  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_R$  își compensează reciproc acțiunile, în timp ce  $\vec{F}_2$  duce la rotirea corpului pînă cînd centrul de greutate  $C$  ajunge pe aceeași verticală cu  $O$ , sub axa de rotație, componenta  $\vec{F}_2$  devenind nulă (fig. 1.6.12b). În această situație, cînd centrul de greutate este la cea mai mică înălțime față de sol permisă de legătura cu axa, spunem că *echilibrul este stabil*. Dacă corpul este scos din poziția de echilibru apare componenta  $\vec{F}_2 \neq 0$  care readuce corpul în poziția de echilibru.

Cînd centrul de greutate se găsește pe aceeași verticală cu  $O$ , în poziția cea mai înaltă permisă de legătura cu axa, spunem că *echilibrul este instabil*. Într-adevăr, în poziția din fig. 1.6.13a greutatea și reacțiunea în axa de rotație se echilibrează reciproc. În schimb, o deviație oricît de mică de la această poziție face să apară componenta  $F_2 \neq 0$  (fig. 1.6.13b) care rotește corpul în jurul axei pînă îl aduce în poziția de echilibru stabil (fig. 1.6.12b).

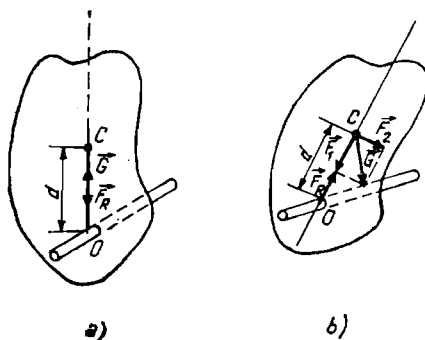


Fig. 1.6.13

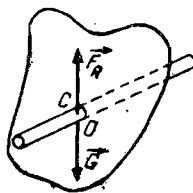


Fig. I.6.14

Dacă axa de rotație trece prin centrul de greutate, *echilibrul este indiferent* deoarece pentru orice poziție greutatea și reacțiunea în axă își fac echilibrul (fig. I.6.14). În acest caz, înălțimea centrului de greutate este aceeași pentru orice orientare a corpului.

Amintindu-ne definiția energiei potențiale, observăm că poziția de echilibru stabil corespunde situației în care energia potențială a corpului (egală cu cea a centrului său de greutate) are valoarea minimă permisă de legătura cu axa. Orice altă orientare se poate obține numai prin consumarea de lucru mecanic din afară. În cazul echilibrului instabil energia potențială este maximă în timp ce în condițiile echilibrului indiferent energia potențială este aceeași oricare ar fi orientarea corpului.

Să considerăm acum un corp cu o axă de rotație verticală (fig. I.6.15). În acest caz echilibrul este indiferent deoarece greutatea  $\vec{G}$  fiind perpendiculară pe planul de rotație nu ar putea produce decât modificarea poziției axei care este însă fixă.

În sfârșit, o ultimă situație este cea corespunzătoare corpurilor sprijinite pe un plan orizontal (fig. I.6.16). Poligonul care se obține prin unirea punctelor marginale în care corpul atinge planul, se numește *bază de susținere*. Dacă verticala coborâtă din centrul de greutate al corpului cade în interiorul bazei de susținere, corpul se găsește în echilibru. În acest caz, greutatea și reacțiunea în planul de susținere se echilibrează reciproc. Dacă verticala din centrul de greutate cade în afara bazei de susținere, greutatea și reacțiunea formează un cuplu care tinde să răstoarne corpul. Echilibrul este cu atât mai stabil cu cât baza de susținere este mai mare și cu cât centrul de greutate este mai apropiat de ea.

Dacă vrem să răsturnăm un corp, la limita de răsturnare centrul de greutate ocupă poziția cea mai înaltă  $h_{max}$  (permisă de condiția de sprijinire) astfel că el trece prin poziția de echilibru instabil (fig. I.6.17). Unghiul cu care trebuie să rotim corpul pentru a-l răsturna este cu atât mai mare cu cât baza de susținere e mai mare și cu cât centrul de greutate este mai aproape de ea, ceea ce arată că, într-adevăr, acestea sînt condițiile unui echilibru mai stabil.

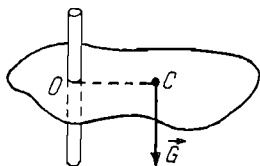


Fig. I.6.15

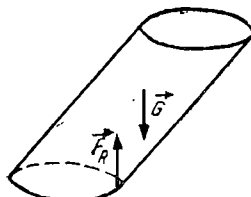


Fig. I.6.16



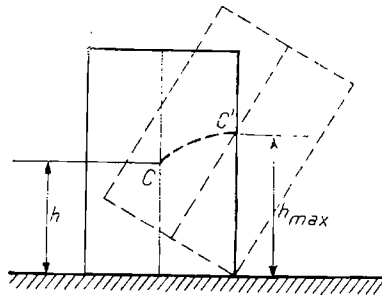


Fig. I.6.17

Pentru a determina gradul de stabilitate al unei construcții în tehnică se calculează *raportul*  $K$  care este definit ca raportul dintre momentul de stabilitate și momentul de răsturnare:

$$K = \frac{\mathcal{M}_S}{\mathcal{M}_R}.$$

Se numește moment de stabilitate suma momentelor, în raport cu axa de răsturnare\*, ale forțelor care caută să stabilizeze construcția, iar moment de răsturnare suma momentelor, în raport cu aceeași axă, ale forțelor care tind să răstoarne corpul.

În cazul  $K > 1$  rezultanta sistemului de forțe cade în interiorul bazei de susținere și deci construcția este stabilă iar pentru  $K = 1$  cade chiar pe conturul bazei de susținere fiind deci la limita echilibrului. În sfârșit, în cazul  $K < 1$  rezultanta căzînd în afara bazei de susținere, construcția se răstoarnă. Pentru siguranța construcției aceasta este dimensionată așa încît  $K > 1,5$ .

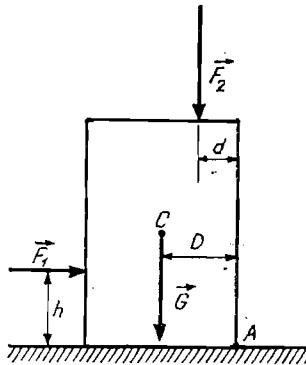


Fig. I.6.18

Ca un exemplu, să considerăm elementul de construcție prismatic din fig. I.6.18. Greutatea  $\vec{G}$  și forța  $\vec{F}_2$  contribuie la stabilizare în timp ce forța  $\vec{F}_1$  tinde să răstoarne prisma în jurul axei care înțeapă hîrtia în punctul  $A$ . Rezultă  $\mathcal{M}_S = GD + F_2d$  și  $\mathcal{M}_R = F_1h$  și deci:

$$K = \frac{GD + F_2d}{F_1h}.$$

\* Se numește axă de răsturnare axa în jurul căreia s-ar roti corpul în momentul răsturnării

## 7. Elemente de elasticitate și rezistența materialelor

### 7.1. INTRODUCERE

În capitolele anterioare am considerat corpurile solide ca fiind rigide, care nu se pot deforma sub acțiunea forțelor ce acționează asupra lor. În această ipoteză am stabilit condițiile în care corpurile (sau sistemele de corpuri) pot sta în echilibru fără a ține seama de mărimile acestor forțe. În realitate, natura nu ne pune la dispoziție corpuri perfect rigide, ci corpuri care se deformează sub acțiunea forțelor; în cazul când deformațiile depășesc anumite limite, corpurile nu-și mai păstrează integritatea, se rup.

În calculele care se fac pentru proiectarea unor construcții, aparate etc. trebuie să se țină seama de proprietățile de deformare ale materialelor folosite. Astfel, nu este suficient să stabilim condițiile de echilibru ci trebuie să mai impunem condiția ca forțele care acționează asupra diferitelor elemente ale construcției să nu depășească anumite limite, altminteri construcția s-ar rupe.

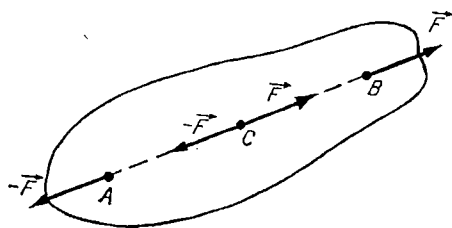


Fig. 1.7.1

Disciplina care introduce în calcule proprietatea corpurilor de a se deforma, pentru a determina dacă ele rezistă acțiunii forțelor, se numește *rezistența materialelor*. Aceasta se bazează printre altele pe teoria elasticității, teoria plasticității etc.

Pentru a ne da seama mai bine de importanța considerării deformării corpurilor să revenim puțin la caracterul forțelor aplicate. În cap. 6 am arătat că acestea pot fi considerate vectori alunecători (considerând corpul perfect rigid). Această ipoteză nu mai este corectă în studiul rezistenței materialelor. Într-adevăr dacă aplicăm două forțe egale, de sens opus, în două puncte diferite ale rigidului,  $A$  și  $B$  (fig. 1.7.1), ele vor produce o deformare a corpului în lun-

gul direcției  $AB$ . Dacă le deplasăm în lungul suportului lor astfel ca să fie aplicate în același punct  $C$ , ele se vor anula reciproc fără a mai fi aplicate corpului și deformarea nu ar mai exista. Aceasta înseamnă că în rezistența materialelor forțele trebuie tratate ca vectori legați (au puncte de aplicații bine stabilite).

## 7.2. TIPURI DE DEFORMAȚII. FORȚE INTERIOARE. EFORT

Din discuția precedentă rezultă că sub acțiunea unor forțe exterioare corpurile se deformează, își schimbă forma. Dacă după încetarea acțiunii forțelor deformarea dispăre complet, avem de-a face cu *deformații elastice*, iar în caz contrar cu *deformații permanente*. Corpurile care deformându-se sub acțiunea unor forțe exterioare revin la forma inițială după încetarea acestor acțiuni, se numesc *corpuri elastice*. Dacă deformarea produsă este prea mare (forțele care solicită corpul sînt foarte mari) aceasta nu mai dispăre la încetarea acțiunii forțelor. Din acest punct de vedere în natură nu există corpuri perfect elastice. Menționăm de asemenea că, în general, chiar pentru corpurile elastice, deformarea nu dispăre complet, instantaneu, atunci cînd încetează acțiunea forțelor. De exemplu, dacă acționăm cu o forță în lungul unui tub de cauciuc vom constata că acesta s-a alungit. Dacă măsurăm lungimea tubului imediat după ce nu-l mai întindem vom vedea că are o lungime încă mai mare decît cea inițială. El va reveni la lungimea inițială după un timp de circa 10 minute.

Cînd asupra unui corp acționează forțe exterioare care-l deformează, în interiorul său apar forțe care se opun deformării. Dacă deformările sînt elastice aceste forțe se numesc *forțe elastice*. Un exemplu de astfel de forțe am întîlnit în cazul întinderii sau comprimării unui resort (§ 3.10).

Pentru studiul rezistenței materialelor prezintă o mare importanță *forțele interioare*, care arată acțiunea unei părți a corpului asupra celeilalte atunci cînd corpul este supus acțiunii anumitor forțe exterioare. Forțele interioare pot fi puse în evidență, prin metoda secțiunilor, în care se presupune că se secționează corpul în două părți. Prin aceasta se strică însă echilibrul și pentru a-l reface trebuie introduse anumite forțe (interioare), în planul secțiunii.

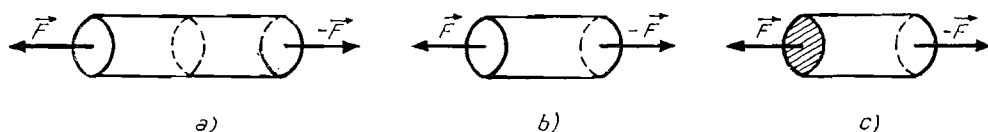


Fig. 1.7.2

În fig. 1.7.2 am considerat o bară la capetele căreia acționează forțele  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$  în lungul axului. Dacă am secționa bara după linia punctată (fig. 1.7.2a) am obține cele două părți (b) și (c). Pentru a reface echilibrul, în secțiunea din porțiunea (b) trebuie să introducem o forță  $\vec{F}_i = -\vec{F}$  și analog, în secțiunea porțiunii (c) o forță  $\vec{F}_i = \vec{F}$ . Forțele  $\vec{F}_i$  și  $\vec{F}_i$  se mai numesc *forțe în secțiune* sau *eforturi*. Cum forțele inițiale  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$  formau un sistem în echilibru (nu deplasau bara) este clar că efortul  $\vec{F}_i$  de pe o față a secțiunii trebuie să fie

egal dar de sens contrar cu cel de pe fața opusă ( $-\vec{F}'_i$ ) astfel ca refăcînd continuitatea corpului (anulînd secționarea) eforturile  $\vec{F}_i$  și  $\vec{F}'_i$  să dispară, corpul rămînînd supus doar forțelor  $\vec{F}$  și  $-\vec{F}$ . În exemplul nostru particular lucrul acesta se vede imediat ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}$  și  $\vec{F}'_1 = \vec{F}$ ). În general chiar asupra unei bare poate acționa un sistem de mai multe forțe exterioare care însă să nu fie toate în lungul axului ei (fig. I.7.3a). Și în acest caz, dacă secționăm bara după linia punctată, în secțiune trebuie introdus un sistem de forțe care să echi-

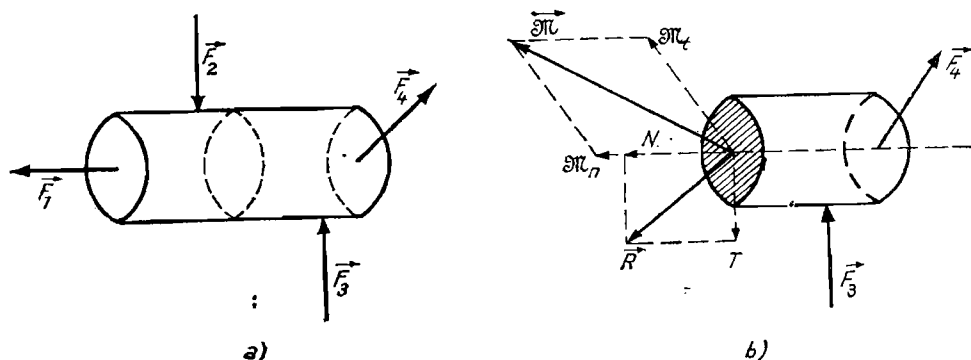


Fig. I.7.3

libreze forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  (pentru porțiunea stîngă a barei), respectiv forțele  $\vec{F}_3$  și  $\vec{F}_4$  pentru porțiunea dreaptă a barei. Aceasta este echivalent cu a considera o forță  $\vec{R}$  (care este de fapt rezultanta sistemului de forțe în secțiune) și un cuplu de moment  $\vec{M}$  (momentul resultant al forțelor) cu punctele de aplicație în centrul de greutate al secțiunii respective. Vom numi eforturi mărimile  $\vec{R}$  și  $\vec{M}$ . Acestea pot fi calculate după legile staticii, astfel că porțiunea de bară, considerată, să rămînă în echilibru. Eforturile  $\vec{R}$  și  $\vec{M}$ , în cazul general, au direcții arbitrare și pot fi descompuse într-o componentă în lungul normalei la planul secțiunii și una conținută în acest plan (fig. I.7.3b).

$\vec{R}$  este descompus în forța normală  $N$  la planul secțiunii și forța  $T$  conținută în planul secțiunii și analog  $\vec{M}$  este descompus în momentul normal  $M_n$  și cel tangențial  $M_t$ . Fiecare dintre eforturile  $N$ ,  $T$ ,  $M_n$  și  $M_t$  produce un anumit tip de deformare a barei numită solicitare simplă. Astfel, forța  $N$  (fig. I.7.4a) provoacă întinderea sau comprimarea barei (solicitare de întindere sau compresiune), după cum este îndreptată de la sau spre secțiune. Forța  $T$  (fig. I.7.4b) egală și de sens contrar cu cea de pe fața cealaltă a secțiunii (a celeilalte porțiuni de bară) provoacă tăierea barei în lungul acestei secțiuni. Solicitarea se numește *tăiere sau forfecare*, iar forța  $T$  se mai numește *forță tăietoare*. Componenta normală a momentului  $M_n$  (fig. I.7.4c) provoacă răsucirea barei în jurul axei sale (solicitare de răsucire sau torsiune) fiind numit de aceea *moment de răsucire* (sau de torsiune). În sfîrșit,  $M_t$  (fig. I.7.4d) provoacă încovoierea barei (solicitare de încovoiere) și de aceea se mai numește *moment de încovoiere*. Ob-

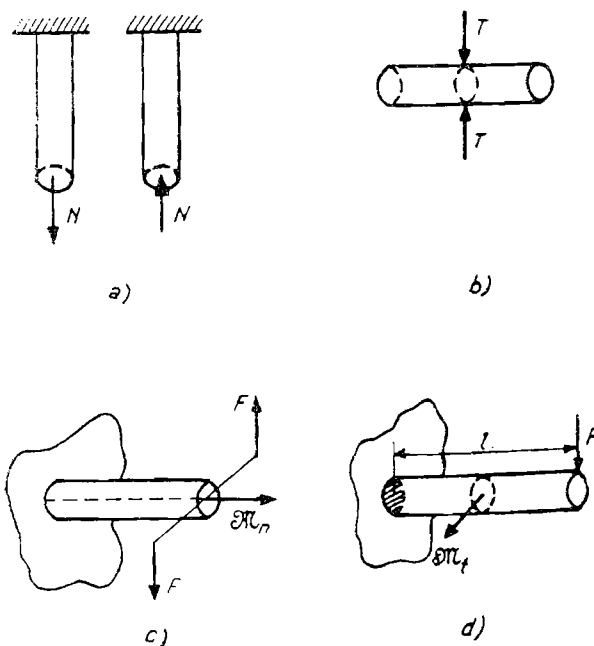


Fig. 1.7.4

servăm că secțiunea periculoasă este cea hașurată unde momentul de încovoiere este maxim  $M_l = l \cdot F$ .

În cele ce urmează ne vom ocupa de câteva din cazurile în care apare una din solicitările simple enumerate mai sus. Înainte de a trece însă mai departe, să observăm că aplicarea eforturilor  $\vec{R}$  și  $\vec{M}$  în centrul de greutate al secțiunii este o reprezentare convențională care ne permite să le calculăm mărimile folosind procedeele staticii. În realitate, forțele interioare apar pe toate elementele de suprafață ale secțiunii respective, astfel că eforturile  $\vec{R}$  și  $\vec{M}$  reprezintă de fapt rezultantele celor distribuite în suprafața secțiunii. Problema de bază în rezistența materialelor constă tocmai în determinarea acestor eforturi distribuite atunci când sînt cunoscute eforturile concentrate  $\vec{R}$  și  $\vec{M}$ .

Din acest motiv este util să introducem noțiunea de *efort unitar*. Să luăm în acest scop un element de suprafață  $\Delta S$ , suficient de mic, așa fel încît să putem considera efortul uniform distribuit (pe suprafața sa) și deci să putem considera rezultanta  $\Delta \vec{F}_i$  aplicată în centrul de greutate al elementului (fig. 1.7.5). Numim *efort unitar*  $\vec{f}$ , efortul distribuit aplicat pe unitatea de suprafață a secțiunii:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}_i}{\Delta S}. \quad (7.1)$$

Această mărime se mai numește și *tensiune*. Efortul unitar  $\vec{f}$  este descompus în lungul direcțiilor menționate mai înainte obținînd *efortul unitar normal* și *efortul*

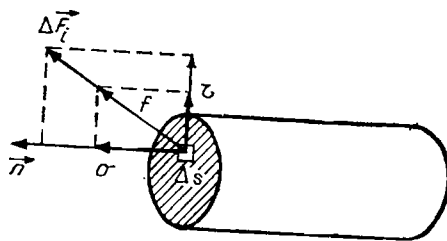


Fig. 1.7.5

*unitar tangențial* care se notează uzual cu  $\sigma$  și respectiv  $\tau$ . Fără a intra în amănunte menționăm doar că deși aici am notat efortul unitar  $\vec{f}$  ca pe o forță (vector) el este o mărime mai complicată decât forțele deoarece depinde atât de forța  $\Delta \vec{F}_i$  cât și de orientarea suprafeței  $\Delta S$  în raport cu direcția forței; el este o mărime tensorială.

În încheierea acestui paragraf menționăm că nu ne vom preocupa aici de mecanismul microscopic, adică de legătura dintre structura materialelor și proprietățile lor mecanice, de deformare. Este vorba de studierea doar a unor aspecte fenomenologice, macroscopice urmînd ca în VI.2 să se discute și unele probleme legate de structură.

### 7.3. LEGEA LUI HOOKE

Să considerăm o bară de lungimea  $l_0$  și secțiune normală  $S$  supusă unei solicitări de întindere prin aplicarea unei forțe  $\vec{F}$  în lungul axului său. Piesa care se folosește pentru încercările experimentale are forma din fig. 1.7.6 și se numește *epruvetă*. Lungimea  $l_0$  se măsoară între reperele  $A$  și  $B$ . Dacă mărimea forței  $F$  nu depășește o anumită valoare (caracteristică pentru fiecare material) deformarea este elastică. În acest domeniu s-a constatat experimental că

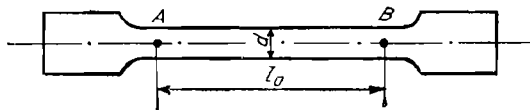


Fig. 1.7.6

alungirea  $\Delta l$  pe care o capătă epruveta sub acțiunea forței  $\vec{F}$  este proporțională cu mărimea acestei forțe și cu lungimea inițială  $l_0$  și invers proporțională cu aria secțiunii normale  $S$ , adică

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{F l_0}{S}, \quad (7.2)$$

unde  $E$  este un factor de proporționalitate care se numește *modul de elasticitate* sau *modulul lui Young*. Relația (7.2) mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (7.3)$$

și este cunoscută sub numele de *legea lui Hooke*. Mărima  $\Delta l/l_0$  se numește *alungire relativă* sau *alungire specifică* și reprezintă alungirea unității de lungime a barei, iar  $F/S$  reprezintă efortul unitar  $\sigma$ . Legea lui Hooke mai poate fi pusă și sub forma

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (7.3')$$

Notînd  $ES/l_0 = k$  (care este o constantă pentru o bară dată) obținem

$$F = k \cdot \Delta l, \quad (7.3'')$$

care conduce imediat la relația (3.52) folosită pentru resort. Forța  $F$  care tinde să readucă bara la lungimea inițială fiind proporțională cu  $\Delta l$  ne arată că forțele interioare care apar la deformarea elastică a corpurilor sînt *forțe elastice*.

Menționăm că relațiile (7.2—7.3) sînt valabile și în cazul solicitării de compresiune. În acest caz  $F$  este forța care acționează în lungul barei pentru comprimarea sa,  $\Delta l$  reprezintă scurtarea barei iar  $\Delta l/l_0$  se numește *scurtare specifică*. Modulul de elasticitate  $E$ , pentru o bară confecționată dintr-un material dat, are aceeași valoare atît pentru solicitarea de întindere cît și pentru cea de compresiune.

Se constată experimental că, odată cu alungirea barei, apare o comprimare în secțiunea transversală, numită *contracție transversală*. În cazul solicitării de compresiune apare o mărire a secțiunii transversale. Contrația relativă a diametrului  $d_0$  al barei este proporțională cu efortul unitar  $\sigma$  (normal la secțiunea transversală):

$$\frac{\Delta d}{d_0} = \frac{\mu}{E} \sigma, \quad (7.4).$$

$\mu$  fiind numit *coeficientul lui Poisson* sau coeficient de *contracție transversală*.

Aceasta înseamnă că dacă în urma solicitării de întindere lungimea barei a crescut de la  $l_0$  la  $l$ , fiind dată de relația

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 \left( 1 + \frac{1}{E} \sigma \right),$$

diametrul barei s-a micșorat de la  $d_0$  la  $d$ . Această scădere este obținută cu ajutorul relației (7.4):

$$d = d_0 - \Delta d = d_0 \left( 1 - \frac{\mu}{E} \sigma \right).$$

Volumul barei înainte de deformare este  $V_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0$ , iar după deformare,

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l = \frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 \left( 1 + \frac{1}{E} \sigma \right) \left( 1 - \frac{\mu}{E} \sigma \right)^2 \simeq \\ V_0 \left( 1 + \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma \right).$$

În scrierea ultimei relații am ținut seama că raportul  $\sigma/E$  este, în general, foarte mic deoarece modulul lui Young are (pentru metale mai ales) valori foarte mari și deci putem neglija puterile mai mari cu unu ale lui  $\sigma/E$ . În sfârșit volumul mai poate fi scris sub forma

$$V = V_0 + (1 - 2\mu) \frac{\sigma}{E} V_0 = V_0 + \Delta V.$$

Această relație ne arată că dacă  $\mu = 0,5$ , deformația barei are loc fără variația volumului său. Măsurători experimentale ale dimensiunilor barei au arătat că volumul barei crește la solicitarea de întindere, adică  $\Delta V > 0$  și deci  $\mu < 0,5$ . Valoarea experimentală a coeficientului lui Poisson  $\mu$ , este de aproximativ 0,3 pentru numeroase metale.

Pentru alungirea barei de la  $l_0$  la  $l_0 + \Delta l$  se efectuează un lucru mecanic  $\mathcal{E} = F_m \cdot \Delta l$ , unde  $F_m$  reprezintă valoarea medie a forței  $F$  care variază cu alungirea. Deoarece această variație este liniară,  $F_m$  este media aritmetică dintre valoarea forței  $F = 0$  pentru  $\Delta l = 0$  și respectiv  $F = ES\Delta l/l_0$  pentru  $\Delta l$  dat, adică

$$F_m = \frac{0 + F}{2} = \frac{ES}{2l_0} \Delta l.$$

Cu aceasta lucrul mecanic de deformare devine

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} \Delta l^2.$$

Acest lucru mecanic, care se cheltuiește, se înmagazinează în bara deformată sub forma energiei potențiale

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} \Delta l^2.$$

Revenind la notațiile  $ES/l_0 = k$  și  $\Delta l = x$  obținem  $W_p = \frac{1}{2} kx^2$ , expresie care coincide cu energia potențială a unui corp supus acțiunii unei forțe elastice  $F = kx$ .

#### 7.4. CURBA CARACTERISTICĂ

Dacă reprezentăm grafic relația dintre forța care produce deformarea și alungire, am obține conform legii lui Hooke (7.2—3) o dreaptă avînd panta egală cu  $ES/l_0$ . Experimental se constată însă că un corp solid se supune legii lui Hooke numai între anumite limite. Se constată astfel că dacă forța cu care întindem epruveta crește foarte mult, deformația crește; în plus, nu va mai exista o relație de proporționalitate între forță și alungire.

În mod obișnuit nu se face însă reprezentarea grafică pe care am amintit-o, deoarece forma curbei depinde în acest caz, de dimensiunile epruvetei. O curbă independentă de aceste dimensiuni se obține luînd pe abscisă alungirea relativă  $\Delta l/l_0$  iar pe ordonată efortul unitar  $\sigma = F/S$ . Curba care se obține în



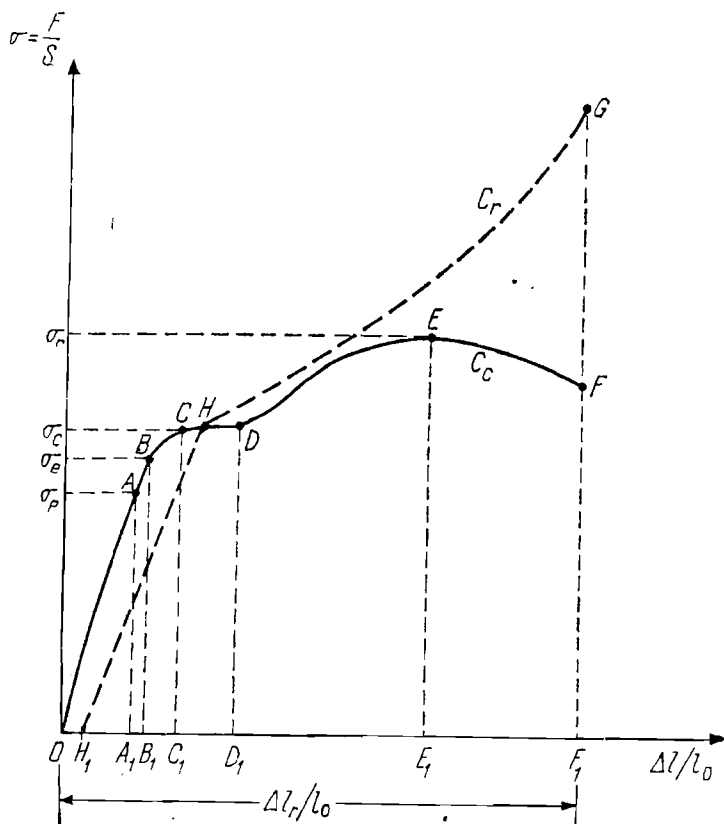


Fig. 1.7.7

acest caz se numește *curbă caracteristică* și forma ei tipică este prezentată în fig. 1.7.7. Când efortul  $\sigma$  crește de la zero pînă la  $\sigma_p$  este respectată legea lui Hooke așa că porțiunea de curbă  $OA$  este o dreaptă;  $\sigma_p$  poartă numele de *limită de proporționalitate* deoarece pentru  $0 \leq \sigma \leq \sigma_p$  avem  $\Delta l/l_0 \sim \sigma$ . Dacă efortul crește în continuare apar abateri de la legea lui Hooke însă materialul se comportă încă perfect elastic pînă se atinge valoarea  $\sigma_e$  (corespunzătoare punctului  $B$ ) care se numește *limita de elasticitate*. În continuare, alungirea începe să crească foarte rapid chiar pentru creșteri mici ale efortului. Punctului  $C$  îi corespunde valoarea  $\sigma_c$  numită *limită de curgere aparentă* și reprezintă valoarea efortului dincolo de care alungirea crește extrem de rapid chiar dacă efortul rămîne practic constant. Între  $C$  și  $D$  curba caracteristică are un traseu aproape orizontal (uneori sinuos), porțiunea  $CD$  fiind numită *palier de curgere* (zonă de fluiditate). Menționăm că pentru unele materiale, palierul de curgere este foarte mic sau practic nu există. Mai departe curba este din nou crescătoare, porțiunea  $DE$  fiind numită *zonă de întărire*. Valoarea maximă a efortului unitar  $\sigma_r$  (corespunzătoare punctului  $E$ ) se numește *rezistență de rupere*. În vecinătatea acestui punct epruveta se subțiază foarte mult, într-un loc al ei apărînd o gîtuire și apoi se rupe. După apariția gîturii forța de întindere se micșorează și se obține porțiunea descrescătoare a curbei caracteristice  $EF$ . Dacă

după rupere punem cap la cap cele două bucăți ale epruvetei și măsurăm apoi distanța ( $l_r$ ) dintre reperele  $A$  și  $B$ , obținem alungirea relativă la repere:  $\Delta l_r/l_0 = (l_r - l_0)/l_0$ .

Să menționăm că porțiunea descendentă  $EF$  este totuși nefirească deoarece aceasta ar arăta că ruperea se produce în punctul  $F$  la un efort unitar mai mic decât cel corespunzător punctului  $E$ . Aceasta este o consecință a faptului că am luat în ordonată raportul dintre forța de întindere  $F$  și aria inițială  $S$  a secțiunii transversale. În realitate, în timpul solicitării de întindere epruveta se subțiază și aria secțiunii transversale scade (după punctul  $E$ , în zona gîtuiturii, ea scade chiar foarte mult) așa că efortul unitar crește tot timpul chiar dacă după punctul  $E$  forța de întindere se micșorează. În fig. I. 7.7. cu o linie punctată este desenată curba caracteristică reală ( $C_r$ ). Curba pe care am discutat-o (linia plină) se numește curba caracteristică convențională. Deoarece în aplicațiile practice materialul se folosește doar în regiunea de proporționalitate, se preferă curba convențională pentru stabilirea căreia nu sînt necesare și măsurători ale secțiunii epruvetei.

Așa cum am menționat în cazul deformațiilor elastice, corpul revine la forma inițială după încetarea acțiunii forțelor. Dacă forța de întindere a fost atît de mare încît efortul a depășit limita de elasticitate, după încetarea acțiunii forței rămîne o deformare remanentă. Spunem că am produs o deformare plastică. Dacă, de exemplu, am aplicat un efort  $\sigma > \sigma_e$  ajungînd într-un punct  $H$  (în regiunea deformațiilor plastice ale materialului) prin micșorarea efortului  $\sigma$ , epruveta nu va reveni în starea inițială după curba  $HCBAO$ , ci în lungul dreptei  $HH_1$ , rămînînd o alungire remanentă  $\Delta l/l_0 = OH_1$ .

În sfîrșit, să observăm că în fig. I.7.7 am reprezentat o curbă caracteristică în cazul cel mai general. Pentru materiale reale se poate întîmpla ca o porțiune sau alta să fie foarte mică sau să lipsească complet. Această constatare ne permite să facem o clasificare a materialelor.

Dacă regiunea deformațiilor elastice este mare *materialul* se numește *elastic*, iar dacă cea a deformațiilor plastice predomină, *materialul* se numește *plastic*. De cele mai multe ori ambele regiuni sînt întinse, materialul comportîndu-se elastic sau plastic în funcție de efortul unitar la care e supus. Astfel de *materiale* se numesc *elasto-plastice*. Deoarece majoritatea acestor materiale prezintă și o zonă de curgere (fluiditate) înainte de rupere, ele se mai numesc și *materiale viscoase*. Această proprietate se numește *viscozitate* și o prezintă majoritatea metalelor, cauciucul etc.

O altă clasificare se poate face după mărimea deformațiilor produse înainte de rupere. Astfel, materialele care suferă deformații mari înainte de rupere se numesc *materiale tenace* (de exemplu oțeluri de mică rezistență, cupru, aluminiu), iar cele care se deformează foarte puțin înainte de rupere se numesc *fragile* sau *casante* (de exemplu sticla, betonul, fonta, oțeluri de foarte mare rezistență). La acestea din urmă regiunea de elasticitate este foarte mică iar zona de fluiditate lipsește complet.

Aceste proprietăți ale materialelor nu sînt absolute; ele depind în general de modul de preparare și de condițiile în care se găsește corpul: temperatură, presiune, timpul cît este aplicată forța etc. De exemplu, metalele incandescente devin plastice chiar dacă sînt supuse unor eforturi unitare nu prea mari. Ceea ce înțelegem în mod obișnuit sub numele de materiale plastice, sînt anume substanțe sintetice care la temperaturi și presiuni mari devin plastice

astfel că din ele putem matrița diferite obiecte. La temperaturi normale acestea își pierd plasticitatea și devin foarte rezistente (uneori însă casante) putînd fi utilizate chiar ca piese de mașini, înlocuitori ai metalelor.

## 7.5. REZISTENȚA ADMISIBILĂ. COEFICIENTUL DE SIGURANȚĂ

Pentru buna funcționare a unei mașini, cunoscînd curba caracteristică a materialului din care este făcută o anumită piesă, trebuie să stabilim pînă la ce valoare a efortului unitar aceasta poate să fie solicitată fără a se rupe sau deforma permanent. Ținînd însă seama în general de proprietățile mecanice ale materialelor și de condițiile de lucru impuse piesei în ansamblul în care este montată, aceasta este dimensionată astfel încît eforturile unitare care apar în ea să nu depășească limita de elasticitate  $\sigma_e$  și cu atît mai mult cea de rupere. De regulă proiectanții au grijă ca eforturile unitare, considerate, să fie mult sub limita  $\sigma_e$  deoarece în general, mărimea forțelor luată în calcul este aproximativă și se poate întîmpla ca în condiții de funcționare aceasta să fie depășită.

În practică sînt stabilite anumite valori maxime admisibile pentru eforturile unitare, numite *rezistențe admisibile* (se notează cu  $\sigma_a$  sau  $\tau_a$ ). Aceasta reprezintă valoarea convențională aleasă în calcul pentru efortul unitar maxim care se poate produce într-o piesă confecționată dintr-un anumit material cînd este supusă unei anumite solicitări.

Rezistențele admisibile sînt legate, de obicei, de una din valorile particulare de pe curba caracteristică. De exemplu, pentru materiale tenace pentru care se poate determina limita de curgere, rezistența admisibilă se ia ca raportul

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c},$$

iar pentru cele fragile se consideră limita de rupere  $\sigma_r$ ,

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r}.$$

Coeficienții  $c_c$  și  $c_r$  se numesc *coeficienți de siguranță*. Valorile lor sînt tabelate în STAS-uri și depind de o serie de factori ca omogenitatea materialului, felul solicitării, temperatură, durata solicitării etc.

Pentru a ne da seama de modul în care se procedează, să considerăm de exemplu, bara încastrată (fig. I.7.8 a) supusă la solicitarea de întindere sub acțiunea forței  $\vec{F}$ . Dacă vrem să stabilim ce secțiune ( $S_{nec}$ ) trebuie să aibă bara de lungime  $l$  pentru a rezista acțiunii forței  $F$  folosim relațiile

$$\sigma = \frac{F}{S} \leq \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r}, \text{ de unde rezultă } S_{nec} = \frac{F}{\sigma_a}.$$

Pentru bare de lungimi mari, așezate vertical, trebuie să ținem seama și de greutatea proprie a barei. Astfel, secțiunea transversală care se găsește la distanța  $x$  de capătul  $AA'$  al barei este solicitată atît de forța  $F$  cît și de greutatea proprie a porțiunii de bară care se găsește sub această secțiune. Această greutate

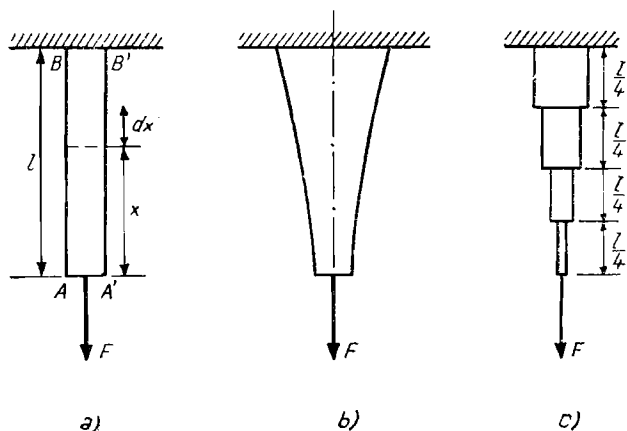


Fig. 1.7.8

este  $\rho g x S$  dacă notăm cu  $\rho$  densitatea barei și cu  $g$  accelerația gravitației. Efortul unitar  $\sigma_x$  în secțiunea respectivă va fi

$$\sigma_x = \frac{F + \rho g x S}{S} = \frac{F}{S} + \rho g x.$$

Se vede că efortul unitar variază liniar în lungul barei de la valoarea  $\sigma_{min} = F/S$  (pentru  $x = 0$ ) la  $\sigma_{max} = F/S + \rho g l$  (pentru  $x = l$ ). Secțiunea periculoasă este deci  $BB'$ , acolo unde efortul unitar este maxim. Pentru ca bara să reziste trebuie să avem

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{F}{S_{nec}} + \rho g l, \text{ adică } S_{nec} = \frac{F}{\sigma_a - \rho g l}.$$

Observăm că  $S_{nec}$  crește cu lungimea barei. Se poate întâmpla ca pentru un anumit  $l$  să avem  $\sigma_a = \rho g l$  ceea ce ar cere  $S_{nec} = \infty$ . Dacă bara este foarte lungă, este posibil să avem  $\sigma_r = \rho g l$  și bara să se rupă sub acțiunea propriei greutate. Aceasta arată că bara de secțiune constantă nu dă rezultate bune. În plus, deoarece o asemenea bară este astfel dimensionată încât în secțiunea superioară ( $BB'$ ) să se atingă rezistența admisibilă, materialul este utilizat neeconomic. Pentru o mai bună utilizare a materialului și pentru a evita ruperea sub propria greutate, se utilizează bara de secțiune variabilă (crescând de la secțiunea  $AA'$  spre  $BB'$ ). Matematic, soluția optimă este bara de egală rezistență la întindere (fig. 1.7.8b) ale cărei secțiuni variază după legea exponențială

$$S_{nec} = \frac{F}{\sigma_a} e^{\frac{\rho g}{\sigma_a} x}.$$

O astfel de bară este însă greu de executat și de aceea practic se folosește bara a cărei secțiune variază în salturi din loc în loc, fiind formată din porțiuni de bară cilindrice (fig. 1.7.8c).

## 8. Mașini simple

### 8.1. INTRODUCERE

Prin mașini simple înțelegem acele dispozitive mecanice puse în mișcare de o forță activă  $\vec{F}$  (numită și forță de acționare sau forță motoare) pentru a deplasa punctul de aplicație al unei alte forțe  $\vec{R}$  care se opune mișcării, numită forță rezistentă. Aceste dispozitive permit în general o amplificare a forțelor, adică sînt construite în așa fel încît cu ajutorul unei forțe active date să învingem o forță rezistentă cît mai mare. Uneori însă forța activă poate fi egală sau mai mare chiar decît forța rezistentă. Aceasta permite însă obținerea altor condiții practice mai avantajoase cum ar fi de pildă schimbarea direcției forței sau economisirea deplasărilor.

Deoarece sistemul de forțe care acționează asupra acestor dispozitive trebuie să fie în echilibru, pentru studierea lor putem folosi metodele staticii.

Uneori mașinile simple sînt împărțite în categorii și anume:

- categoria pîrghiilor (pîrghii și scripeți);
- categoria planului înclinat (planul înclinat, șurubul și pana).

### 8.2. PÎRGHII

O bară (sau în general un corp) care se poate roti în jurul unui punct fix  $O$  (numit punct de sprijin), atunci cînd se găsește sub acțiunea unei forțe active  $\vec{F}$  și a unei forțe rezistente  $\vec{R}$ , se numește *pîrghie*. Suporturile celor două forțe se găsesc într-un plan perpendicular pe axa de rotație, care trece prin punctul de sprijin  $O$ , dar care nu intersectează această axă (fig. I.8.1).

În funcție de poziția punctului  $O$  în raport cu forțele  $\vec{F}$  și  $\vec{R}$ , pîrghiile se clasifică în următoarele trei categorii:

a) de ordinul I, cînd punctul de sprijin se găsește între forța activă  $\vec{F}$  și forța rezistentă  $\vec{R}$ ; (fig. I.8.1a)

b) de ordinul II, cînd forța rezistentă  $\vec{R}$  este aplicată într-un punct care se găsește între punctul de sprijin și punctul de aplicație al forței active  $\vec{F}$  (fig. I.8.1b);

c) de ordinul III, cînd forța activă  $\vec{F}$  este aplicată într-un punct care se găsește între punctul de sprijin și punctul de aplicație al forței rezistente  $\vec{R}$

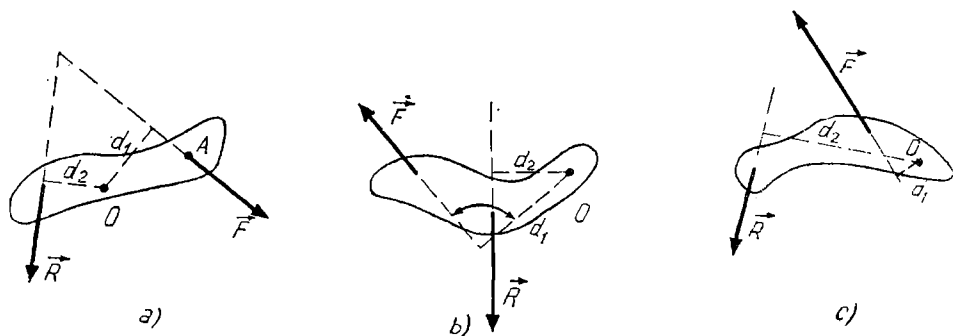


Fig. 1.8.1

(fig. 1.8.1c). De multe ori cînd se vorbește de pîrghii se consideră doar bare drepte, punctul de sprijin și punctele de aplicație ale forțelor fiind coliniare, iar forțele — paralele și de sens opus. Acest gen de pîrghie constituie însă cazuri particulare care rezultă imediat din cele generale reprezentate în figura 1.8.1.

Să dăm cîteva exemple de pîrghii uzuale: ranga, balanțe, foarfecele, cleștele de cuie (pîrghii de ordinul I, ultimele două fiind pîrghii duble), roaba, spîrgătorul de nuci (pîrghii de ordinul II), pedala tocilarului, penseta, antebrațul (pîrghii de ordinul III).

Sub acțiunea unei forțe, pîrghia tinde să se rotească în jurul punctului de sprijin  $O$ . Forța activă  $\vec{F}$  este orientată în așa fel încît să se opună acțiunii imprimante de forța rezistentă  $\vec{R}$ . Deoarece rezultanta celor două forțe este echilibrată de reacțiunea din punctul de sprijin  $O$ , pîrghia va fi în echilibru atunci cînd momentul de rotație al forței active față de punctul de sprijin va fi egal și de sens contrar cu cel al forței rezistente. Ținînd seama că forțele și punctul de sprijin se găsesc în același plan, perpendicular pe axa de rotație, cele două momente vor fi orientate perpendicular pe acest plan (în lungul axei de rotație) și deci condiția enunțată mai înainte se reduce la egalitatea mărimilor momentelor. Notînd cu  $d_1$  brațul forței active (distanța de la punctul de sprijin  $O$  la suportul forței active) și cu  $d_2$  brațul forței rezistente, obținem relația

$$F \cdot d_1 = R \cdot d_2 \text{ sau } \frac{R}{F} = \frac{d_1}{d_2}. \quad (8.1)$$

care reprezintă condiția de echilibru a pîrghiilor. Din fig. 1.8.1 se vede că această condiție este valabilă pentru oricare gen de pîrghie. Menționăm că această clasificare e păstrată în mecanică mai mult prin tradiție, pentru că de fapt teoria momentelor înglobează toate cazurile posibile.

Dacă  $d_1 > d_2$ , pîrghiile sînt pîrghii de forță, adică cu o anumită forță activă putem echilibra o forță rezistentă de atîtea ori mai mare de cîte ori este mai mare brațul forței active ( $d_1$ ) față de brațul forței rezistente ( $d_2$ ). Această condiție poate fi realizată pentru pîrghiile de ordinul I și II.

În cazul  $d_1 < d_2$  (condiție ce poate fi realizată pentru pîrghii de ordinul I și III) forța activă este mai mare decît cea rezistentă, însă punctul de apli-

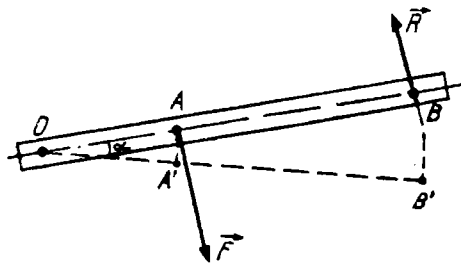


Fig. 1.8.2

cație al forței active se deplasează mai puțin decât cel al forței rezistente (se face deci economie de deplasare). Pentru simplificarea raționamentului să considerăm pârghia de ordinul III din figura 1.8.2. Din triunghiurile asemenea  $OAA'$  și  $OBB'$  rezultă

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}. \quad (8.2)$$

Ținând seama că  $\overline{OA} = d_1$ ,  $\overline{OB} = d_2$ , relația (8.1) devine

$$\frac{R}{F} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}. \quad (8.3)$$

Aceasta arată că deplasarea forței active ( $\overline{AA'}$ ) este mai mică decât cea a forței rezistente ( $\overline{BB'}$ ), și cu atât mai mică cu cât raportul  $R/F$  (sau  $d_1/d_2$ ) este mai mic. În acest raționament am ținut seama de faptul că, odată ce s-a realizat condiția de echilibru, o creștere foarte mică a forței active va pune în mișcare pârghia. Cu ajutorul pârghiilor economisim deci fie forță, fie deplasare. Trebuie subliniat însă că *nu putem câștiga lucru mecanic*. Pentru a arăta aceasta să revenim la pârghia de ordinul III din fig. 1.8.2, considerînd poziția  $OA'B'$  foarte apropiată de  $OAB$ . În acest caz unghiul la centru ( $\alpha$ ) format de cele două direcții este foarte mic și putem considera forțele tangente la arcele  $\overline{AA'}$  și respectiv  $\overline{BB'}$  în orice punct de pe arc. Lucrul mecanic rezistent (produs de forța rezistentă) va fi deci

$$\mathcal{L}_R = - R \cdot \overline{BB'},$$

iar cel efectuat de forța activă

$$\mathcal{L}_F = F \cdot \overline{AA'}.$$

Semnul minus în prima expresie apare datorită faptului că deplasarea se produce în sens opus forței. Ținând seama că unghiul  $\alpha$  este mic, arcele  $\overline{AA'}$  și  $\overline{BB'}$  se confundă cu coardele respective; vom obține:

$$\frac{\mathcal{L}_R}{\mathcal{L}_F} = - \frac{R}{F} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = - \frac{R}{F} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

Folosind relația (8.3) avem  $\frac{R}{F} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = 1$  și deci

$$\frac{\mathcal{E}_R}{\mathcal{E}_F} = -1 \text{ sau } \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_F = 0. \quad (8.5)$$

Un raționament similar ne duce la aceeași relație și pentru celelalte categorii de pîrghii. Aceasta înseamnă că în cazul pîrghiilor, *lucrul mecanic se conservă*.

Menționăm că atât condiția de echilibru (8.1) cât și conservarea lucrului mecanic au fost obținute în ipoteza lipsei de frecare în punctul de sprijin.

### 8.3. BALANȚE

Balanțele sînt dispozitive care permit măsurarea sau compararea maselor. Partea principală a unei balanțe o constituie o pîrghie de ordinul I cu brațe egale sau neegale menținută în poziție orizontală, la echilibru, de două greutăți așezate la capete.

*Balanța cu brațe egale* este formată dintr-o pîrghie de ordinul I care se sprijină în mijloc pe un cuțit cu muchia în jos  $C_1$  (fig. I.8.3) care stă pe o placă de oțel sau agat. La capetele pîrghiei, pe cuțitele  $C_2$  și  $C_3$  așezate cu muchia, în sus se sprijină talerele balanței (egale în greutate) pe care se așează masele de comparat. Brațele fiind egale, pîrghia se va găsi în echilibru atunci cînd încărcăm cele două platane cu greutăți egale. Un ac indicator fixat de mijlocul pîrghiei ne arată oscilațiile acesteia de o parte și alta a poziției de echilibru.

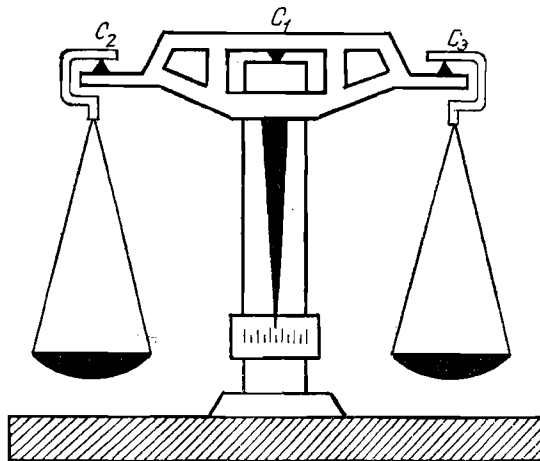


Fig. I.8.3

O balanță trebuie să fie dotată cu următoarele calități:

a) **Stabilitatea** care cere ca la echilibru stabil pîrghia să stea orizontal. Această condiție nu poate fi îndeplinită decît dacă, prin construcție, centrul de greutate propriu al pîrghiei se găsește sub punctul său de sprijin. În caz contrar echilibrul este instabil sau indiferent.



b) **Justețea (sau exactitatea)** care cere ca la greutateți egale în ambele talere, pîrghia să se găsească în poziția orizontală. Pentru aceasta trebuie ca brațele pîrghiei să fie egale. (Presupunem evident că brațele pîrghiei sînt identice iar talerele au greutateți egale.) Condiția nu poate fi îndeplinită riguros și de fapt se cere să fie îndeplinită în limita preciziei cu care au fost etalonate greutatețile folosite. Verificarea justeței se face prin schimbarea de pe un taler pe altul a greutateților echilibrate.

c) **Sensibilitatea.** O balanță este cu atît mai sensibilă cu cît greutatea adițională, așezată într-unul din talerele echilibrate, care scoate balanța din poziția de echilibru este mai mică. Sensibilitatea unei balanțe se măsoară prin unghiul făcut de pîrghie cu orizontala atunci cînd într-unul din platane este așezată o greutate adițională egală cu unitatea. Să determinăm acest unghi. Notăm cu  $G$  greutatea pîrghiei, mai precis a sistemului mobil, cu  $P$

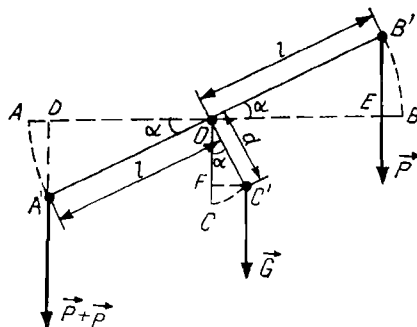


Fig. 1.8.4

greutățile care își fac echilibrul și cu  $p$  greutatea adițională. În figura 1.8.4 am reprezentat schematic balanța prin pîrghia ei (de lungime  $2l$ ) și punctul de sprijin  $O$ . Cu  $\alpha$  am notat unghiul cu care este rotită pîrghia  $AOB$  prin faptul că în capătul din stînga este aplicată forța  $\vec{P} + \vec{p}$ , iar în dreapta forța  $\vec{P}$ . Greutatea  $\vec{G}$  este aplicată în centrul de greutate  $C$  al balanței. Echilibrul se va realiza atunci cînd suma momentelor celor trei forțe este zero, adică

$$(P + p) \cdot \overline{DO} - G \cdot \overline{FC'} - P \cdot \overline{EO} = 0.$$

Însă  $\overline{DO} = \overline{EO} = l \cos \alpha$  și  $\overline{FC'} = d \sin \alpha$ , deci

$$(P + p)l \cos \alpha - Gd \sin \alpha - Pl \cos \alpha = 0,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{Gd}.$$

Ținînd seama că pentru o greutate adițională mică deviația  $\alpha$  va fi mică, avem  $\operatorname{tg} \alpha \simeq \alpha$  și deci obținem formula care dă sensibilitatea absolută ( $\alpha/p$ ) a balanței:

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{l}{Gd}. \quad (8.6)$$

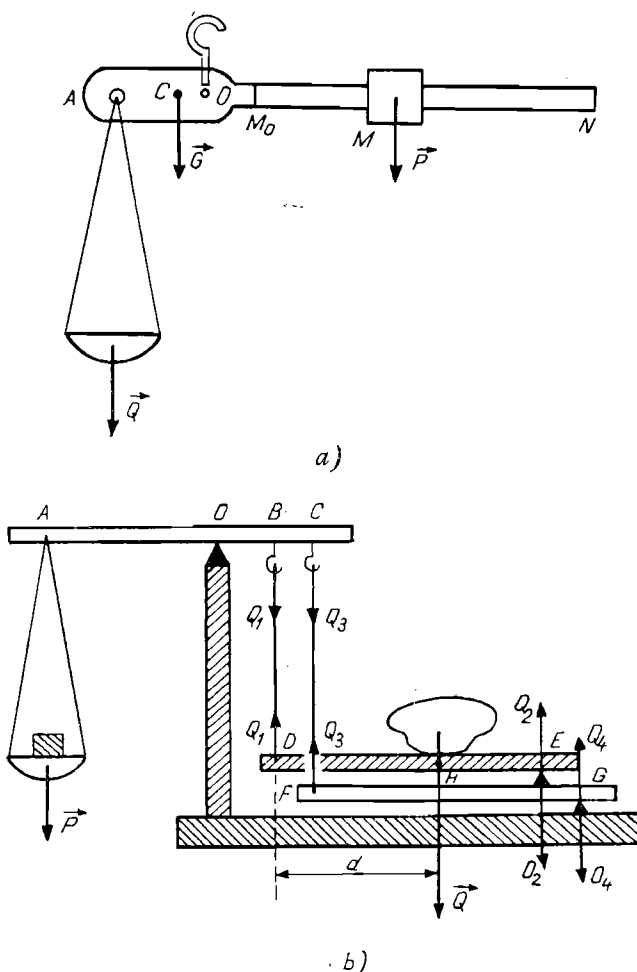


Fig. 1.8.5

Această relație ne arată că sensibilitatea este cu atât mai mare cu cât lungimea brațelor pîrghiei este mai mare, cu cât greutatea sistemului mobil este mai mică și cu cât centrul său de greutate este mai apropiat de punctul de sprijin ( $d$  cât mai mic). Micșorarea lui  $d$  mărește sensibilitatea balanței însă îngreuează cîntărirea deoarece brațul balanței oscilează foarte lent.

Ca o consecință a faptului că pîrghia a fost considerată perfect rigidă, în formula (8.6) nu apare greutatea  $P$  cu care au fost încărcate talerele. În realitate, prin încărcare pîrghia se deformează și centrul de greutate coboară mai mult sub punctul de sprijin astfel că sensibilitatea scade cu încărcarea. Ea mai scade și pentru că prin mărirea încărcării muchiile cușitelor apasă mai puternic asupra lăcașurilor măbind frecarea.

În practică se folosesc două metode pentru cîntărire: cîntărirea simplă și cîntărirea dublă. În prima metodă se pune într-un platan corpul de cîntărit, iar în celălalt greutate etalonată pînă cînd acul indicator ne arată că pîrghia

stă în poziție orizontală. Dacă brațele sînt egale, greutatea din platane sînt egale. Metoda are dezavantajul unor erori sistematice datorită lipsei egalității riguroase a lungimii brațelor care se adaugă erorilor de etalonare a greutăților.

În cîntărirea dublă (sau prin substituție), se pune corpul într-un platan și greutatea în celălalt pînă la echilibrare. Se scoate apoi corpul și se reface echilibrul punînd în locul lui greutatea etalonată. Prin aceasta se elimină erorile provenite din neegalitatea riguroasă a lungimii brațelor.

În încheiere menționăm fără a intra în amănunte încă două tipuri de balanțe. *Balanța romană* care este tot o pîrghie de ordinul I, însă cu brațe neegale (fig. 1.8.5 a). La capătul scurt atîrnăm corpul de cîntărit, iar pe brațul lung este deplasat un cursor de greutate  $P$  pînă ce pîrghia stă în poziție orizontală.

Condiția de echilibru în absența corpului este

$$G \cdot \overline{CO} = P \cdot \overline{OM}_0.$$

În cazul în care corpul de greutate  $Q$  se găsește în platan,

$$Q \cdot \overline{AO} + G \cdot \overline{CO} = P \cdot (\overline{OM}_0 + \overline{M}_0\overline{M}).$$

Folosind prima condiție obținem

$$\overline{M}_0\overline{M} = Q \frac{\overline{AO}}{P}.$$

Mărimile  $\overline{AO}$  și  $P$  fiind constante (prin construcție) rezultă că distanța  $\overline{M}_0\overline{M}$  străbătută de cursor este proporțională cu greutatea din platan. Brațul  $\overline{M}_0\overline{N}$  este etalonat punînd în platan greutatea cunoscute și marcînd pozițiile cursorului corespunzătoare fiecărei greutăți. Cîntărirea se face așezînd corpul în platan și deplasînd cursorul pînă la realizarea echilibrului, citind apoi direct masa corespunzătoare diviziunii respective.

*Balanța zecimală*, care servește la cîntărirea corpurilor mari și grele (fig. 1.8.5 b), se compune din două pîrghii,  $AOC$  și  $FG$ , sprijinite pe cuțite în  $O$  și respectiv  $G$  și o altă pîrghie  $DE$  formată de platforma pe care așezăm corpul de cîntărit. Poziția cuțitelor și lungimile brațelor sînt astfel calculate încît cîntărirea să nu depindă de poziția corpului pe platforma  $DE$ . Folosind din nou legea momentelor se obține

$$\frac{Q}{P} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}. \quad (8.7)$$

Pentru ca o greutate  $P$  să echilibreze o greutate  $Q$  de zece ori mai mare este necesar deci ca brațul  $OA$  să fie de zece ori mai lung decît  $OB$ .

## 8.4. TROLIUL

Troliurile sînt mașini din categoria pîrghiilor, care servesc la ridicarea greutăților. Se numește troliu un sistem format din două roți concentrice, solidare, sau o manivelă solidară cu un cilindru, avînd aceeași axă de rotație, pe care este înfășurat un cablu de care atîrnă sarcina  $R$  care trebuie ridicată.

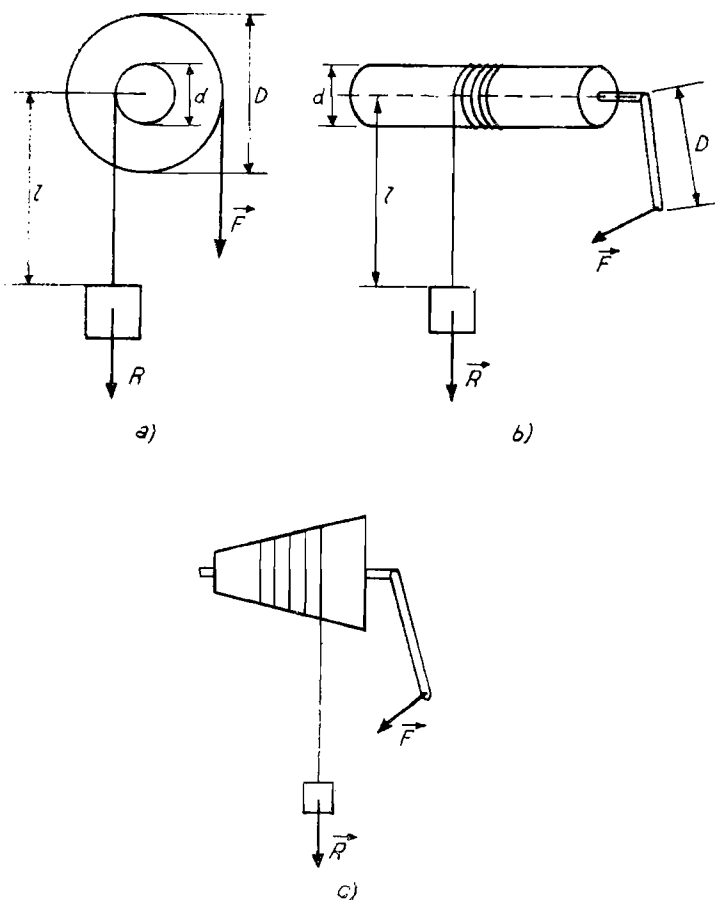


Fig. 1.8.6

(fig. 1.8.6). Neglijînd frecările, momentele vor fi egale la echilibru și relația dintre forțe și brațe va fi

$$F \cdot \frac{D}{2} = R \cdot \frac{d}{2} \text{ sau } F = R \frac{d}{D}. \quad (8.8)$$

Se vede că forța activă este amplificată cu factorul  $D/d$  însă mîna care învîrte manivela parcurge un arc de lungime  $D/d$  centimetri pentru a înfășura un centimetru de cablu.

Dacă ținem seama de greutatea proprie a cablului și notăm cu  $q$  greutatea sa pe unitatea de lungime iar cu  $l$  lungimea porțiunii de cablu care atîrnă, relațiile devin

$$F \frac{D}{2} = (R + ql) \frac{d}{2} \text{ sau } F = (R + ql) \frac{d}{D}. \quad (8.9)$$

Se observă că forța activă  $F$  variază cu lungimea cablului desfășurat. Pentru

a menține  $F$  constant, tamburul troliului are formă tronconică, astfel ca atunci când sarcina  $R$  urcă și  $l$  descrește, să crească  $d$  și deci produsul  $(R + gl)d$  să rămână constant (fig. I.8.6 c). Un astfel de troliu se numește regulator.

## 8.5. SCRİPEȚI

Scripetele este o mașină din categoria pîrghiilor, compus dintr-un disc circular avînd pe muchie un șanț prin care trece un cablu. Axul scripetelui, care trece prin centrul discului, este susținut într-o furcă terminată cu un cîrlig. În continuare vom descrie cele două tipuri de scripeți simpli (fix și mobil), precum și cîteva din cele mai importante sisteme de scripeți.

a) **Scripetele fix** (fig. I.8.7) are furca în sus și nu se deplasează în timpul lucrului. Rezultanta este echilibrată de reacțiunea  $\vec{N}$  în axul scripetelui ( $-\vec{N} = \vec{F} + \vec{R}$ ). La echilibru momentele trebuie să fie egale. Urmărind notațiile din desen și presupunînd că firul nu alunecă pe șanțul scripetelui, condiția devine

$$F \frac{D}{2} = R \frac{D}{2} \text{ sau } F = R. \quad (8.10)$$

În acest caz nu avem economie de forță, este schimbată însă direcția forței într-un mod convenabil. Dacă ținem seama de frecările dintre roata scripetelui și axul său, condiția de echilibru va fi dată de relația

$$F \cdot D/2 = R \cdot D/2 + \mu Nd/2,$$

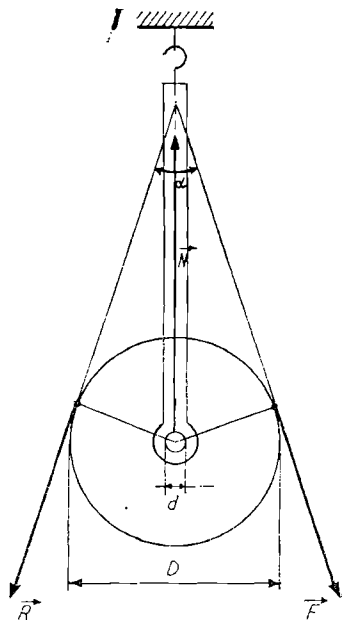


Fig. I.8.7

unde  $d$  reprezintă diametrul fusului scripetului,  $\mu$  coeficientul de frecare;  $N$  este modulul reacțiunii axei, egal cu cel al forței normale exercitate asupra ei:

$$N = \sqrt{F^2 + R^2 + 2FR \cos \alpha}.$$

În ultima relație  $\alpha$  este unghiul dintre suporturile forțelor  $\vec{F}$  și  $\vec{R}$ . Dacă suporturile sînt paralele ( $\alpha = 0$ ,  $N = F + R$ ) obținem:

$$FD - \mu Fd = RD + \mu Rd$$

sau

$$F = R \frac{D + \mu d}{D - \mu d}. \quad (8.11)$$

Rezultatele se complică puțin dacă ținem seama de faptul că în realitate cablul nu este perfect flexibil (are o oarecare rigiditate) și în consecință nu va sta exact în șanțul scripetelui.

b) **Scripetele mobil** este un scripete al cărui ax se deplasează. Greutatea este atârnată de furca îndreptată în jos, iar unul din capetele cablului este

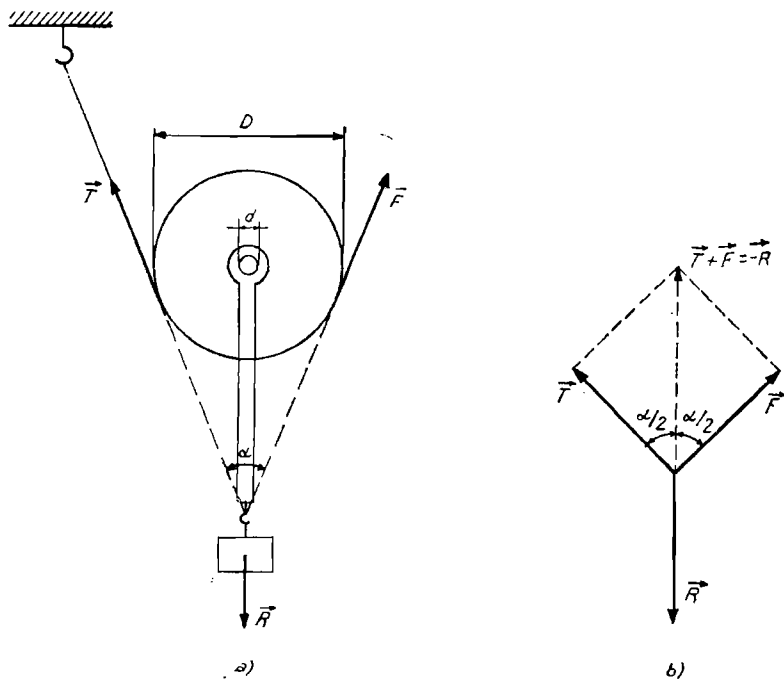


Fig. 1.8.8

fixat (fig. 1.8.8 a). Forța activă  $\vec{F}$  ridică atât scripetele cât și greutatea atârnată de el. Forța de rezistență  $\vec{R}$  este compensată, la echilibru, de tensiunea  $\vec{T}$  a cablului și de forța activă  $\vec{F}$ . Ecuația momentelor în raport cu axa scripetelui este

$$TD/2 = FD/2 \text{ adică } T = F. \quad (8.12)$$

Scriind acum condiția ca forțele  $\vec{T}$  și  $\vec{F}$  să echilibreze forța  $\vec{R}$  avem (vezi fig. I.8.8 b)

$$T \cos \alpha/2 + F \cos \alpha/2 = R,$$

de unde rezultă

$$F = \frac{R}{2 \cos \alpha/2}. \quad (8.13)$$

Cînd forțele sînt paralele,  $\alpha = 0$ , și (8.13) devine

$$F = \frac{R}{2}. \quad (8.14)$$

Aceste relații ne arată că în cazul scripetelui mobil putem ridica o greutate  $R$  folosind o forță activă mai mică ( $F < R$ ). Se observă de asemenea că forța activă are valoarea cea mai redusă în cazul în care are direcția verticalei ( $\alpha = 0$ ). Cînd cablul este perfect întins  $\alpha = 180^\circ$  și  $\cos \alpha/2 = 0$ , fiind deci necesară o forță infinită pentru a echilibra o greutate oricît de mică. Acest lucru are importanță în construcția funicularelor (fig. I.8.9), arătîndu-ne că nu putem utiliza un cablu perfect întins deoarece în acest caz tensiunea în

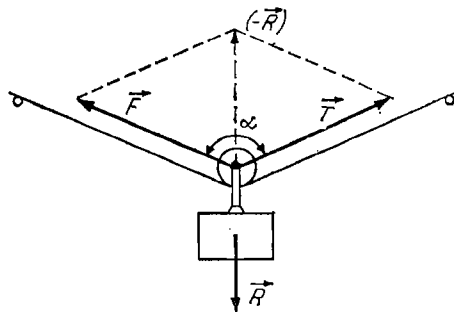


Fig. I.8.9

cablu ar deveni infinită și l-ar rupe. Mai mult decît atît, pentru a nu utiliza un cablu exagerat de gros acesta trebuie lăsat suficient de larg.

c) **Sisteme de scripeți.** Se poate obține o economie mai mare de forță, ca și posibilitatea schimbării direcției în mod convenabil, prin folosirea unor combinații de scripeți fiși și mobili.

De exemplu, scripetele mobil este de obicei asociat cu unul fix în așa fel ca pe lîngă economia de forță să schimbăm și sensul de acțiune al forței active (fig. I.8.10).

Să considerăm acum un sistem de  $n$  scripeți mobili și unul fix, legați între ei ca în figura I.8.11, unde am reprezentat doar trei scripeți mobili. Aplicînd succesiv relația (8.14) avem

$$F_1 = \frac{R}{2}, \quad F_2 = \frac{F_1}{2} = \frac{R}{2^2}, \quad F_3 = \frac{F_2}{2} = \frac{R}{2^3},$$

rezultînd în final

$$F = F_3 = \frac{R}{2^3}$$

Pentru cazul a  $n$  scripeți mobili forța  $F$  este

$$F = \frac{R}{2^n}. \quad (8.15)$$

Deoarece în expresia forței active numărul de scripeți  $n$  apare la exponent, acest sistem de scripeți este denumit uneori palan exponențial.

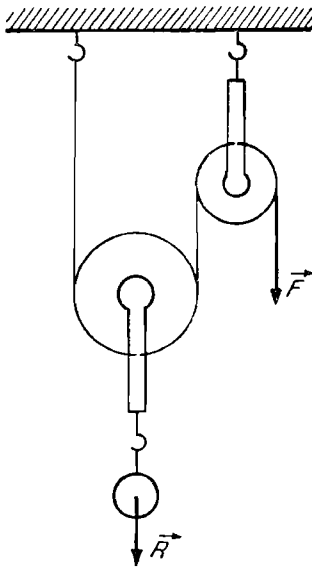


Fig. 1.8.10

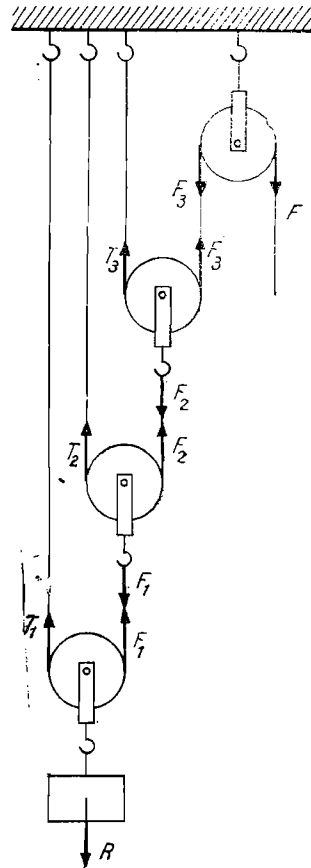


Fig. 1.8.11

d) **Palanul** este tot un sistem de scripeți, format din două mufle (care sînt asociații de scripeți montate pe aceeași furcă). Scripeții care formează o mufă sînt montați fie pe același ax (dacă sînt de același diametru) fie pe axe paralele fixate în aceeași furcă (fig. 1.8.12). Una din mufele care formează palanul este fixă iar cealaltă mobilă. Un cablu continuu este legat la un capăt de furca



muflei fixe și trece succesiv peste scripeți (fig. I.8.13). La capătul liber al firului acționează forța activă, iar forța rezistentă acționează în furca muflei mobile.

Forța de rezistență este echilibrată de tensiunile din cablu, adică

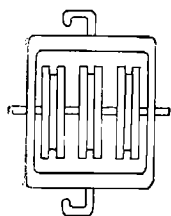
$$R = T_1 + F_1 + T_2 + F_2 + T_3 + F_3.$$

Însă pentru fiecare scripete din mufla mobilă avem

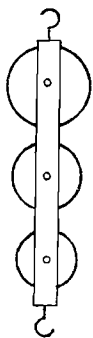
$$T_1 = F_1, \quad T_2 = F_2 \quad \text{și} \quad T_3 = F_3$$

iar pentru scripeții din mufla fixă,

$$T_1 = F, \quad T_2 = F_1 \quad \text{și} \quad T_3 = F_2.$$



a)



b)

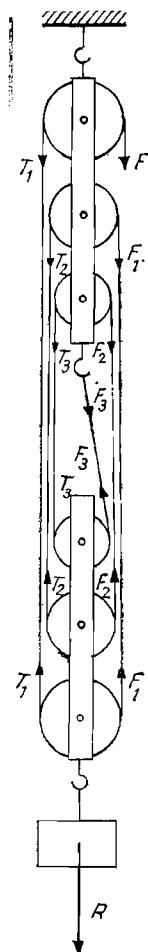


Fig. I.8.13

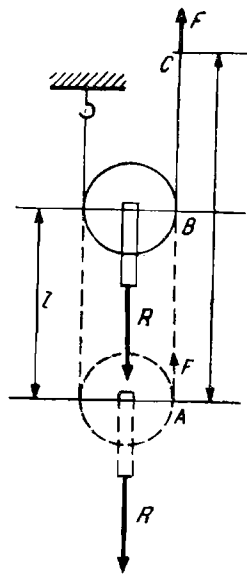


Fig. I.8.14

Rezultă de aici că toate tensiunile sînt egale între ele:

$$F = T_1 = F_1 = T_2 = F_2 = T_3 = F_3,$$

astfel că relația dintre  $R$  și  $F$  este

$$R = 6F \text{ sau } F = \frac{R}{6} = \frac{R}{2 \cdot 3}.$$

În general, pentru un palan în care fiecare din cele două mufle are  $n$  scripeți relația dintre forța activă și cea rezistentă devine:

$$F = \frac{R}{2n}. \quad (8.16)$$

În încheiere menționăm că și în cazul scripeților se conservă lucrul mecanic. Pentru exemplificare să considerăm scripetele mobil din figura I.8.14. Se vede că dacă scripetele s-a deplasat de la  $A$  la  $B$  pe distanța  $l$ , adică punctul de aplicație al forței rezistente s-a deplasat pe distanța  $l$ , punctul  $A$  al cablului s-a deplasat în punctul  $C$  pe distanța  $2l$ , adică forța activă s-a deplasat pe distanța  $2l$ . Neglijînd frecările, lucrul mecanic rezistent va fi  $\mathcal{L}_R = -R \cdot l$  iar lucrul mecanic motor va fi  $\mathcal{L}_F = F \cdot 2l$ .

Cum  $F = R/2$ , rezultă  $\mathcal{L}_F = R \cdot l$ , adică

$$\mathcal{L}_F = -\mathcal{L}_R.$$

Dacă nu ținem seama deci de frecări, lucrul mecanic produs de forța activă este egal și de sens contrar cu cel al forței rezistente. În cazul în care luăm în considerare și frecările, lucrul mecanic al forței active va trebui să acopere și lucrul rezistent al forțelor de frecare.

## 8.6. PLANUL ÎNCLINAT

Planul înclinat este o mașină simplă care permite economisirea forței la ridicarea greutăților.

Să considerăm un corp de greutate  $\vec{R}$  (forța rezistentă) pe un plan care face unghiul  $\alpha$  cu orizontala (fig. I.8.15 *a*). Descompunem forța  $\vec{R}$  în componentele  $R_1 = R \sin \alpha$  și  $R_2 = R \cos \alpha$  dirijate în lungul planului și respectiv perpendicular pe plan.

Forța  $\vec{R}_2$  este echilibrată de reacțiunea  $\vec{N}$  a planului, astfel că echilibrul corpului pe planul înclinat este realizat dacă

$$F = R_1 = R \sin \alpha. \quad (8.17)$$

Dacă notăm lungimea planului cu  $l$  și înălțimea sa cu  $h$ , obținem din relația (8.17) formula planului înclinat:

$$F = R \frac{h}{l}. \quad (8.18)$$

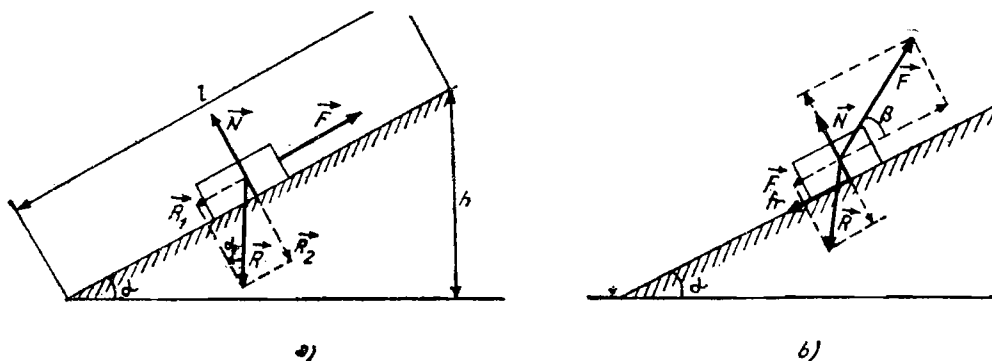


Fig. 1.8.15

Conservarea lucrului mecanic se menține și în acest caz. Într-adevăr, pentru a ridica greutatea  $R$  pe verticală la înălțimea  $h$  trebuie cheltuit lucrul mecanic  $\mathcal{L} = R \cdot h$ , iar pentru a o ridica pe planul înclinat la aceeași înălțime,  $\mathcal{L}' = F \cdot l$ . Folosind acum (8.18) rezultă imediat  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ .

Să considerăm acum cazul mai general în care forța activă face un unghi  $\beta$  cu planul înclinat și avem și frecare (fig. 1.8.15 b). Pentru a avea echilibrul corpului pe planul înclinat trebuie ca forța activă  $\vec{F}$  și reacțiunea planului  $\vec{N}$  să echilibreze greutatea  $\vec{R}$  și forța de frecare  $\vec{F}_{fr}$ , adică

$$\vec{F} + \vec{N} = \vec{R} + \vec{F}_{fr}.$$

Proiectând această relație pe o direcție în lungul planului și pe alta perpendiculară pe plan avem

$$F \cos \beta = R \sin \alpha + F_{fr},$$

$$F \sin \beta + N = R \cos \alpha.$$

Ținând seama că  $F_{fr} = \mu N$ , poate fi eliminat  $N$  între cele două relații:

$$F \cos \beta = R \sin \alpha + \mu(R \cos \alpha - F \sin \beta),$$

de unde rezultă forța activă

$$F = R \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}. \quad (8.19)$$

Dacă forța activă  $F$  este aplicată în lungul planului ( $\beta = 0$ ), relația devine

$$F = R(\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (8.20)$$

În cazul în care neglijăm frecările, aceasta trece în relația (8.17).

## 8.7. PANA

Pana este o piesă de îmbinare avînd forma unei prisme triunghiulare care se introduce între două piese  $A$  și  $B$  (fig. 1.8.16). Ea este întrebuințată la construcția pieselor, la îmbinare, la spartul lemnurilor etc. Forța activă  $\vec{F}$

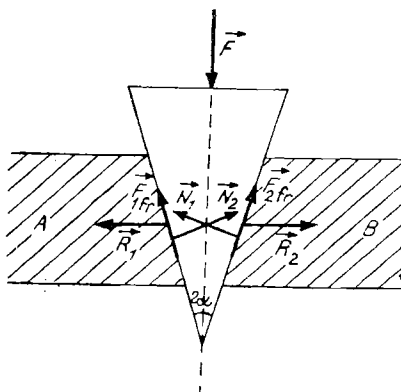


Fig. I.8.16

împinge pana în locașul său acționând astfel asupra pieselor laterale prin presiunile și forțele de frecare. Pana se va găsi în echilibru atunci când forțele de frecare și reacțiunile  $\vec{N}_1$  și  $\vec{N}_2$  din pereți vor fi echilibrate de forța  $\vec{F}$ , adică

$$\vec{F} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{1fr} + \vec{F}_{2fr}.$$

Proiectând această relație vectorială pe direcția axului penei, obținem

$$F = N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + F_{1fr} \cos \alpha + F_{2fr} \cos \alpha.$$

Dacă pana este simetrică  $N_1 = N_2 = N$  și, cum  $F_{fr} = \mu N$ , rezultă reacțiunile în pereți:

$$N = \frac{F}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (8.21)$$

Forța cu care pana împinge lateral una din piesele A sau B este, de exemplu,

$$R_1 = N \cos \alpha - F_{1fr} \sin \alpha = N (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

sau

$$F = 2 R_1 \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (8.22)$$

și analog pentru cealaltă piesă. Când pana este scoasă, sensul forțelor de frecare se schimbă și (8.22) devine

$$F = 2 R \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (8.22')$$

Pentru ca pana să rămână fixată după batere, este necesar ca valoarea lui  $F$  dată de (8.22') să fie nulă sau negativă adică

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0 \text{ sau } \mu \geq \tan \alpha.$$

## 8.8. ȘURUBUL

Șurubul face parte din categoria planului înclinat. El este format dintr-un cilindru drept pe a cărui suprafață laterală este săpat un șanț elicoidal. În capătul superior are un tambur de care poate fi rotit (fig. I.8.17). Pasul șurubului (notat  $h$ ) reprezintă distanța cu care înaintează șurubul la o rotație completă. Dacă considerăm desfășurată suprafața laterală a cilindrului care formează șurubul, se observă imediat relația dintre unghiul  $\alpha$  (unghiul făcut de tăietura filetului cu planul de rotație al șurubului) și pasul șurubului. Liniile  $AB, B'C, \dots$  reprezintă urma muchiei filetului, iar  $2\pi r$  este lungimea drept-unghiului pe care se desfășoară suprafața laterală a șurubului de rază  $r$ . Deci (fig. I.8.17).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}. \quad (8.23)$$

Șurubul se înșurubează într-o piesă numită piuliță care are un gol cilindric pe suprafața căruia este săpat un șanț elicoidal cu aceleași elemente geometrice ca ale șurubului. În practică întâlnim cazuri în care fie piulița, fie șurubul, sînt mobile.

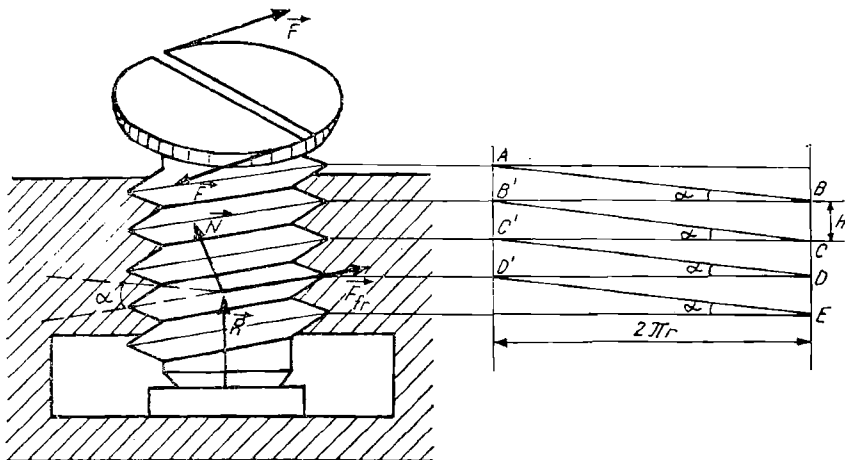


Fig. I.8.17

Vom considera acum cazul în care piulița este fixă și șurubul mobil, rezultatele rămînînd valabile și în celelalte situații. În figura I.8.18 am desenat schematic elementele șurubului. Asupra sa acționează cuplul motor  $\mathcal{M}_c = F \cdot D$ , forța rezistentă în lungul axei șurubului  $R$ , iar în lungul filetului sau în fiecare punct de contact  $P_i$  cu filetul piuliței, forța de apăsare  $N_i$  normală la filel și forța de frecare  $F_{i\text{ fr}}$  ( $F_{i\text{ fr}} = \mu N_i$ ) tangentă la filel, dirijată în sens invers deplasării. Pentru a găsi condiția de echilibru scriem relația dintre proiecțiile forțelor pe axa șurubului:

$$R - \sum N_i \cos \alpha + \sum \mu N_i \sin \alpha = 0.$$

O altă relație o obținem egalînd mărimea lucrului mecanic al forțelor active (al cuplului motor  $\mathcal{M}_c$ ) efectuat într-o rotație completă, cu mărimea lucrului

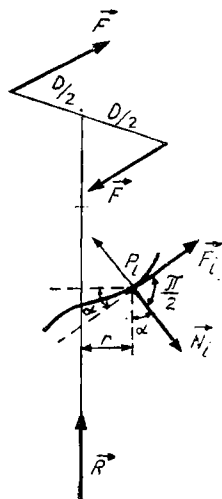


Fig. I.8.18

mecanic produs de forțele care se opun mișcării. În timp ce se efectuează o rotație completă șurubul înaintează cu pasul  $h$  astfel că vom avea (vezi fig. I.8.17)

$$2(F \cdot \pi D) = Rh + \sum \mu N_i \frac{2\pi r}{\cos \alpha}.$$

Sumele  $\sum$  se referă la toate punctele filetului. Ținând acum seama că  $\mu$  și  $\alpha$  sînt aceleași în toate aceste puncte, că  $F \cdot D = \mathcal{M}_c$  și făcînd uz de relația (8.23) se poate scrie

$$R = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \sum N_i,$$

$$\mathcal{M}_c = rR \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu r}{\cos \alpha} \sum N_i.$$

Eliminînd acum  $\sum N_i$  între aceste două relații obținem

$$\mathcal{M}_c = Rr \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}. \quad (8.24)$$

Dacă neglijăm frecarea, relația devine

$$\mathcal{M}_c = Rr \operatorname{tg} \alpha = R \frac{h}{2\pi}. \quad (8.25)$$

La deșurubare se schimbă sensul forțelor de frecare și (8.24) devine

$$\mathcal{M}_c = Rr \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (8.26)$$

Condiția ca șurubul strâns să nu se desfacă singur (să rămână autofixat), indiferent de mărimea lui  $R$ , este ca  $\mathfrak{M}_c \leq 0$ , adică

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0 \text{ sau } \mu \geq \operatorname{tg} \alpha.$$

## 8.9. RANDAMENTUL MAȘINILOR SIMPLE

În paragrafele anterioare ne-am ocupat în general de stabilirea condițiilor de echilibru static pentru diferitele mașini simple. O mică mărire a forței active față de valoarea de echilibru va pune în mișcare sistemul. Unele din dispozitivele studiate, ca de exemplu pîrghiile din elementele de construcții, pana, șuruburile de îmbinare sau strîngere, funcționează în regim static. Pentru altele însă, cum ar fi pîrghiile care intră în componența diferitelor mașini, scripetii, planul înclinat, șuruburile de acționare mecanică (șurubul conducător de la strung) etc., este esențială tocmai considerarea deplasărilor produse de aceste dispozitive.

Pentru majoritatea mașinilor simple studiate am arătat că, dacă nu luăm în considerare frecările, lucrul mecanic se conservă, adică lucrul mecanic motor (produs de forța activă) este egal în mărime cu lucrul mecanic rezistent (efectuat de forța rezistentă). În realitate, lucrul mecanic motor va fi întotdeauna mai mare decât cel rezistent deoarece forța activă trebuie să învingă, în afara forței rezistente, și forțele de frecare care se opun întotdeauna mișcării.

Numim *lucru mecanic consumat*,  $\mathcal{L}_c$ , lucrul produs de forța activă (lucrul motor), iar *lucru mecanic util*,  $\mathcal{L}_u$ , lucrul mecanic necesar pentru a învinge forța rezistentă (pentru învingerea căreia am construit mașina). Notăm cu  $\mathcal{L}_p$  lucrul mecanic necesar pentru a învinge forțele de frecare. Relația dintre acestea este

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_p, \quad (8.27)$$

unde

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_F, \quad \mathcal{L}_u = -\mathcal{L}_R \text{ și } \mathcal{L}_p = -\mathcal{L}_{Ff},$$

Numim *randament*  $\eta$  al mașinii, raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_c}. \quad (8.28)$$

Dacă nu avem frecare (cazul ideal)  $\mathcal{L}_p = 0$  și  $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_u$ , adică  $\eta = 1$ . În cazurile reale însă, totdeauna  $\mathcal{L}_p \neq 0$  și deci  $\mathcal{L}_c > \mathcal{L}_u$ , adică  $\eta < 1$ . Spunem despre o mașină că are un randament cu atât mai bun cu cît  $\eta$  este mai apropiat de unu, adică cu cît partea din lucrul mecanic util cheltuită pentru învingerea forțelor de frecare este mai mică.

Din (8.27) avem  $\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_c - \mathcal{L}_p$  și (8.28) devine

$$\eta = 1 - \frac{\mathcal{L}_p}{\mathcal{L}_c},$$

care este în acord cu afirmația de mai sus. Raportul  $\mathcal{L}_p/\mathcal{L}_c$  se mai numește și coeficient de pierdere.

Pentru planul înclinat de exemplu, lucrul mecanic util este dat de:

$$\mathcal{E}_u = Rh = Rl \sin \alpha,$$

iar lucrul mecanic consumat (folosind 8.20) este

$$\mathcal{E}_c = F \cdot l = R(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)l,$$

de unde rezultă randamentul

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}.$$

Notînd  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$

$$\eta = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin (\alpha + \varphi)} = 1 - \frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)}.$$

Ultima relație ne arată că dacă nu avem frecare  $\mu = 0$ , adică  $\varphi = 0$  și deci  $\eta = 1$ .



## 9. Hidro- și aerostatica

### 9.1. PROPRIETĂȚILE GENERALE ALE FLUIDELOR

Hidrostatica și aerostatica studiază lichidele și respectiv gazele în starea de echilibru mecanic.

Vom numi fluid orice corp ale cărui părți se pot deplasa cu ușurință unele față de altele. Din acest motiv, fluidul ia forma vasului care-l conține și este perfect elastic. Un lichid este un fluid foarte puțin compresibil în timp ce gazele sînt fluide compresibile, ocupînd de aceea volumul întregului vas închis în care se găsesc.

Ca toate corpurile de pe Pămînt, lichidele și gazele se găsesc sub acțiunea forțelor de gravitație. Din această cauză suprafața unui lichid în echilibru este plană și orizontală, indiferent de forma vasului, iar în vase comunicante nivelul lichidului se găsește în același plan orizontal. Această proprietate a vaselor comunicante are numeroase aplicații tehnice, dintre care menționăm:

— Distribuirea apei în orașe. Apa cu care se alimentează un oraș se găsește într-un rezervor mai ridicat decît clădirile cele mai înalte.

— Fîntîni arteziene (fig. I.9.1). Dacă un strat nisipos AB, permeabil pentru apă, se găsește între două straturi impermeabile, forînd un puț care să străbată stratul impermeabil superior, se obține o fîntînă arteziană al cărei nivel ar fi situat în același plan orizontal cu suprafața A'B' dacă nu ar exista rezistența aerului.

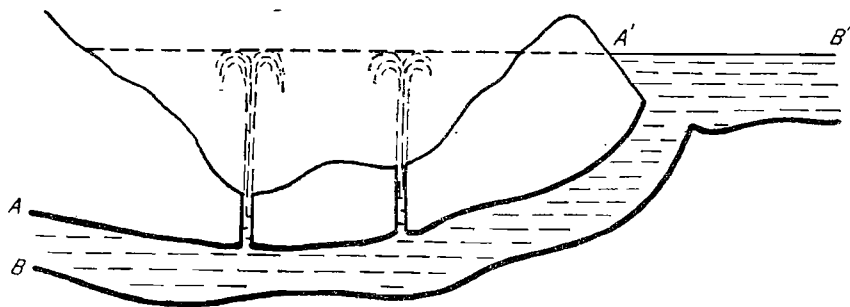


Fig. I.9.1

O caracteristică importantă a fluidelor este densitatea lor. Prin definiție, masa de fluid conținută în unitatea de volum, sau masa unității de volum, se numește *densitate* și se notează cu  $\rho$ :

$$\rho = m/V. \quad (9.1)$$

Greutatea unității de volum de fluid se numește greutate specifică a fluidului și se notează cu  $\gamma$ .

Dacă volumul  $V$  are greutatea  $G$ ,

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V}. \quad (9.2)$$

Din relațiile (9.1) și (9.2) rezultă

$$\gamma = \rho g. \quad (9.3)$$

Unitățile de măsură pentru cele două mărimi sînt  $[\rho]_{\text{CGS}} = 1 \text{ g/cm}^3$  iar  $[\rho]_{\text{SI}} = 1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} [\rho]_{\text{CGS}}$ ,  $[\gamma]_{\text{CGS}} = 1 \text{ dyn/cm}^3$  iar  $[\gamma]_{\text{SI}} = 1 \text{ N/m}^3 = 10^{-1} [\gamma]_{\text{CGS}}$ .

## 9.2. PRESIUNEA

Forța care acționează perpendicular pe unitatea de suprafață se numește *presiune* și se notează cu  $p$ :

$$p = \frac{F}{S}. \quad (9.4)$$

În sistemul CGS unitatea de presiune se numește barye și este egală cu  $1 \text{ dyn/cm}^2$ ;  $[p]_{\text{CGS}} = 1 \text{ dyn/cm}^2$ . Unitatea de măsură în SI este  $[p]_{\text{SI}} = 1 \text{ N/m}^2 = 10 [p]_{\text{CGS}}$ . În tehnică încă se utilizează unitatea tolerată (pentru că este practică) numită atmosferă tehnică. Ea este egală cu  $9,8 \text{ N/cm}^2$  adică este presiunea exercitată de o forță de  $1 \text{ kgf}$  ( $9,8 \text{ N}$ ), uniform repartizată pe o suprafață de  $1 \text{ cm}^2$ :  $1 \text{ at} = 9,8 \text{ N/cm}^2 = 9,8 \cdot 10^4 [p]_{\text{SI}} = 9,8 \cdot 10^5 [p]_{\text{CGS}}$ .

Să considerăm un vas cu lichid în formă de U, ramurile laterale avînd diametrele neegale (fig. I.9.2). Vasul este prevăzut cu două pistoane.

Să acționăm cu o forță  $F$  asupra pistonului din stînga provocîndu-i o deplasare  $l_1$ . Deoarece lichidul este practic incompresibil, acesta va împinge pistonul al doilea pe o distanță  $l_2$ , așa încît volumul său să rămînă același. Aceasta implică

$$S_1 l_1 = S_2 l_2. \quad (9.5)$$

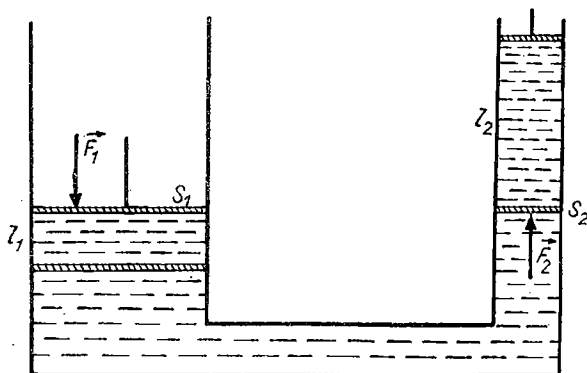


Fig. I.9.2

Pe de altă parte, conform legii conservării energiei, lucrul mecanic consumat pentru deplasarea primului piston trebuie să fie egal cu lucrul mecanic efectuat de fluid pentru deplasarea celui de al doilea

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad (9.6)$$

Ținând seama de relația (9.4),  $p_1 S_1 l_1 = p_2 S_2 l_2$ , iar apoi de relația (9.5), obținem:

$$p_1 = p_2, \quad (9.7)$$

adică presiunea exercitată din exterior pe o porțiune din suprafața unui lichid ce se află într-un vas închis, se transmite integral și în toate direcțiile, asupra tuturor suprafețelor pereților interiori, indiferent de orientarea lor. Această proprietate deosebit de importantă este cunoscută sub numele de legea lui Pascal.

O aplicație importantă bazată pe această lege este presa hidraulică, redată în principiu în fig. I.9.2. Acționînd de data aceasta asupra pistonului mic cu o forță  $F_2$  ce transmite în lichid presiunea  $p_2 = F_2/S_2$ , asupra pistonului de secțiune mai mare va acționa forța

$$F_1 = p_1 S_1 = p_2 S_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2,$$

deci

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (9.8)$$

Se obține astfel o forță  $F_1$  de atîtea ori mai mare ca  $F_2$ , de cîte ori  $S_1$  este mai mare ca  $S_2$ .

### 9.3. PRESIUNEA HIDROSTATICĂ

Să considerăm un vas cilindric ce conține un lichid. Asupra unui strat  $A'B'$ , de suprafață  $S$ , apasă greutatea  $G$  a coloanei de lichid de înălțime  $h$ , cuprinsă între suprafața liberă a lichidului și stratul  $A'B'$ :

$$G = mg = \rho V_{AA'BB'} g = \rho S h g. \quad (9.9)$$

Stratul  $A'B'$  este supus unei presiuni

$$p = \frac{G}{S} = \rho g h \quad (9.10)$$

numită *presiune hidrostatică*.

Între două puncte din lichid ce se găsesc la adîncimile  $h_1$  respectiv  $h_2$ , există o diferență de presiune hidrostatică

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2). \quad (9.10 \text{ a})$$

Presiunea hidrostatică nu depinde de forma vasului ci doar de adâncimea la care se găsește stratul  $A'B'$ , avînd deci aceeași valoare în toate punctele situate în același plan orizontal. Într-adevăr, presiunea ce se exercită asupra porțiunii  $\Delta S$  se datorește numai coloanei de lichid din volumul  $abb'a'$ , care va avea întotdeauna aceeași greutate  $G = \rho \Delta S h g$  indiferent de forma vasului, deci presiunea  $p = \frac{G}{\Delta S} = \rho g h$  este independentă de forma vasului (fig. I.9.3).

Deoarece stratul  $A'B'$  se găsește în repaus, înseamnă că pe lîngă presiunea hidrostatică  $p$ , dirijată de sus în jos, mai apare o presiune de jos în sus care o compensează.

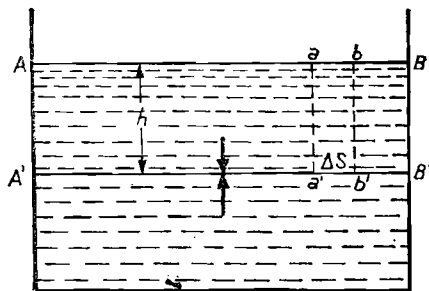


Fig. I.9.3

Suprafețele solide care se găsesc într-un lichid suportă aceleași presiuni. Se poate demonstra experimental că asupra unui corp aflat într-un lichid acționează o forță din partea lichidului care este normală pe suprafața corpului indiferent de orientarea acestei suprafețe. Existența forței implică existența unei presiuni normale ce se exercită pe orice suprafață udată de lichid, independent de orientarea ei. Fundul vasului ce conține un lichid de înălțime  $h$  suportă presiunea hidrostatică a întregii mase de lichid.

Deoarece presiunile se transmit în toate direcțiile conform principiului lui Pascal, pereții laterali ai vasului sînt supuși la aceeași presiune hidrostatică  $p = \rho g h$  ca și stratul de fluid  $A'B'$  ce se găsește la adâncimea  $h$ . Putem verifica ușor că forța ce acționează asupra pereților este dirijată normal pe aceștia. Prin perforarea vasului se constată, de exemplu, că direcția jetului este normală la suprafața laterală a vasului, adică lichidul este împins de o forță normală la perete.

O experiență spectaculoasă se poate efectua cu așa-numitul butoi al lui Pascal din fig. I.9.4. Unui butoi obișnuit, umplut cu apă pînă sus, i se adaptează un tub subțire de înălțime mare,  $h$ . Umplînd complet și tubul, presiunea hidrostatică în interiorul butoiului crește apreciabil deoarece depinde doar de  $h$ , nu și de acțiunea tubului. Conform principiului lui Pascal, pereții laterali ai butoiului sînt supuși unor presiuni mari, adică unor forțe mari, care pot să distrugă butoiul.

Presiunea hidrostatică explică și modul în care se repartizează, în vase comunicante, două lichide de densități diferite, care nu reacționează chimic și care nu se amestecă între ele. Dacă în acest sistem se toarnă mai întîi mercur,

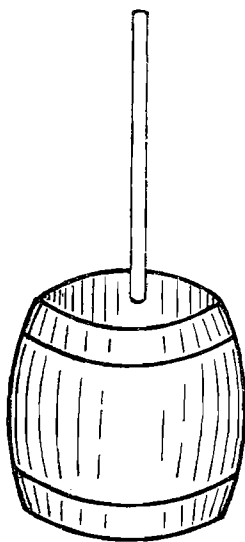


Fig. 1.9.4

acesta va avea același nivel în ambele ramuri (fig. 1.9.5 *a*). Turnînd apoi apa în ramura din stînga constatăm că nivelul mercurului scade în *A* datorită apăsării coloanei de apă și urcă în *B* pînă cînd presiunea hidrostatică a coloanei de mercur echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă (fig. 1.9.5*b*). Notînd cu  $\rho_1$  și  $\rho_2$  densitățile celor 2 lichide obținem egalitatea

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2, \text{ deci } \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (9.11)$$

adică denivelările lichidelor sînt invers proporționale cu densitățile lor.

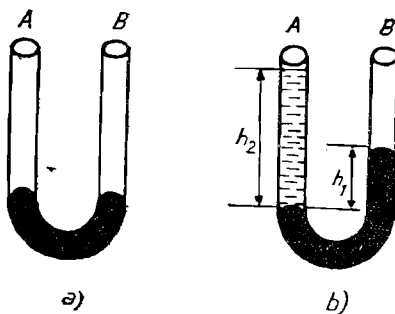


Fig. 1.9.5

#### 9.4. LEGEA LUI ARHIMEDE

Pentru a formula legea lui Arhimede să considerăm următoarea experiență: de unul din talerele unei balanțe este suspendat un cilindru gol *A*, cu pereți foarte subțiri, iar sub acesta un cilindru plin *A'*, de volum egal cu pri-

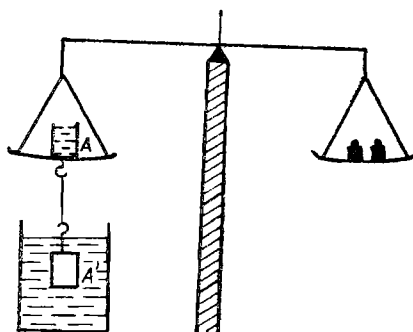


Fig. 1.9.6

mul. Se echilibrează mai întâi sistemul cu ajutorul unor greutateți puse pe celălalt taler după care se introduce cilindrul plin  $A'$  într-un vas cu apă (fig. 1.9.6). Constatăm că balanța se dezechilibrează, brațul din stînga deplasîndu-se în sus. Din acest fapt tragem imediat concluzia că asupra lui  $A'$  acționează din partea lichidului o forță dirijată pe verticală, de jos în sus, care este numită *forță arhimedică*. Observăm experimental că echilibrul balanței poate fi restabilit dacă se umple complet cu apă cilindrul gol  $A$ . Rezultă că mărimea forței arhimedice este egală cu greutatea volumului de lichid care încapă în cilindrul gol  $A$ . Avînd în vedere egalitatea volumelor celor doi cilindri, rezultă că forța care împinge cilindrul  $A'$  de jos în sus este egală cu greutatea volumului de lichid deplasat de corpul respectiv. Acesta este conținutul legii lui Arhimede.

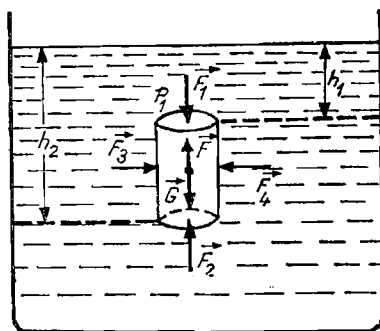


Fig. 1.9.7

Pentru a demonstra teoretic legea lui Arhimede să ne imaginăm că delimităm mintal un cilindru de lichid în interiorul unui vas, ca în fig. 1.9.7. Să notăm cu  $S$  și  $h$  suprafața bazei și respectiv înălțimea cilindrului. Asupra bazei sale superioare acționează forța

$$F_1 = p_1 S = \rho g h_1 S \quad (9.12)$$

dirijată de sus în jos. Deoarece greutatea  $\vec{G}$  a lichidului ce se găsește în cilindrul fictiv este îndreptată în același sens, ea se adună cu  $\vec{F}_1$  dînd o rezul-

tantă  $\vec{F}_1 + \vec{G}$  dirijată de sus în jos. Cilindrul de lichid fiind în repaus, înseamnă că asupra bazei sale inferioare acționează de jos în sus o forță  $\vec{F}_2$  al cărei modul satisface egalitatea  $F_2 = F_1 + G$ , sau

$$F_2 - F_1 = G, \quad (9.13)$$

adică asupra cilindrului acționează o forță  $F_2 - F_1$ , numită forță arhimedică, dirijată de jos în sus și egală cu greutatea  $G$  a volumului de lichid care ocupă cilindrul. Forța arhimedică are punctul de aplicație în centrul de simetrie al cilindrului de lichid care se mai numește din această cauză și centru de presiune.

Dacă mai facem un efort de imaginație și considerăm că am înlocuit cilindrul de lichid printr-un cilindru confecționat dintr-un material de densitate  $\rho'$  și de greutate  $G'$ , asupra acestui nou cilindru va acționa aceeași forță  $F_2 - F_1$ , egală cu greutatea  $G$  a volumului de lichid dezlocuit. Pe baza acestor raționamente se poate enunța legea lui Arhimede: *un corp cufundat într-un lichid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp*.

Dacă  $\rho' = \rho$ , atunci  $G' = G$  și corpul cufundat se află în stare de echilibru la orice adâncime s-ar afla cufundat în lichid.

Dacă  $\rho' < \rho$ ,  $G' < G$  deci  $F_2 - F_1 > G'$ , corpul este adus la suprafață de forța arhimedică, mișcându-se uniform accelerat. Odată ajuns la suprafață, o parte a corpului iese afară din lichid astfel încât partea ce rămâne cufundată să dezlocuiască un volum de lichid așa încât forța arhimedică și greutatea corpului să-și facă echilibrul. Această situație corespunde plutirii corpului.

Notind cu  $V$  volumul corpului aflat în lichid, greutatea volumului de lichid dezlocuit va fi  $G = \rho Vg$ , adică forța arhimedică este

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho Vg. \quad (9.14)$$

Pentru  $\rho' > \rho$ ,  $G' > G$  deci forța arhimedică  $F_2 - F_1$  este mai mică decât greutatea corpului, care se va mișca uniform accelerat pe verticală în jos pînă va atinge fundul vasului.

## 9.5. PLUTIREA CORPURILOR

Pentru tehnica construcțiilor navale cunoașterea condițiilor care determină stabilitatea corpurilor plutitoare este de o deosebită importanță. Vom spune despre un corp plutitor că este stabil dacă este capabil să revină la poziția sa de echilibru după ce a fost aplecat într-o parte datorită unor cauze externe, cum ar fi de exemplu izbiturile laterale ale valurilor provocate de un vînt puternic.

Să presupunem că un corp plutitor are centrul de greutate și cel de presiune situate în același punct  $O'$  (fig. I.9.8 a) și că asupra părții superioare a corpului ce se găsește deasupra lichidului acționează o forță  $\vec{F}$  orizontală care tinde să miște corpul spre stînga. Datorită rezistenței pe care o opune lichidul la înaintarea corpului, asupra părții inferioare a acestuia acționează forța de rezistență  $\vec{R}$ . Cele două forțe  $\vec{F}$  și  $\vec{R}$  tind să răstoarnă corpul înclinîndu-l cu un unghi  $\alpha$  față de verticală. În această situație centrul de presiune  $P$ , adică centrul de greutate al volumului de lichid dezlocuit nu mai coincide

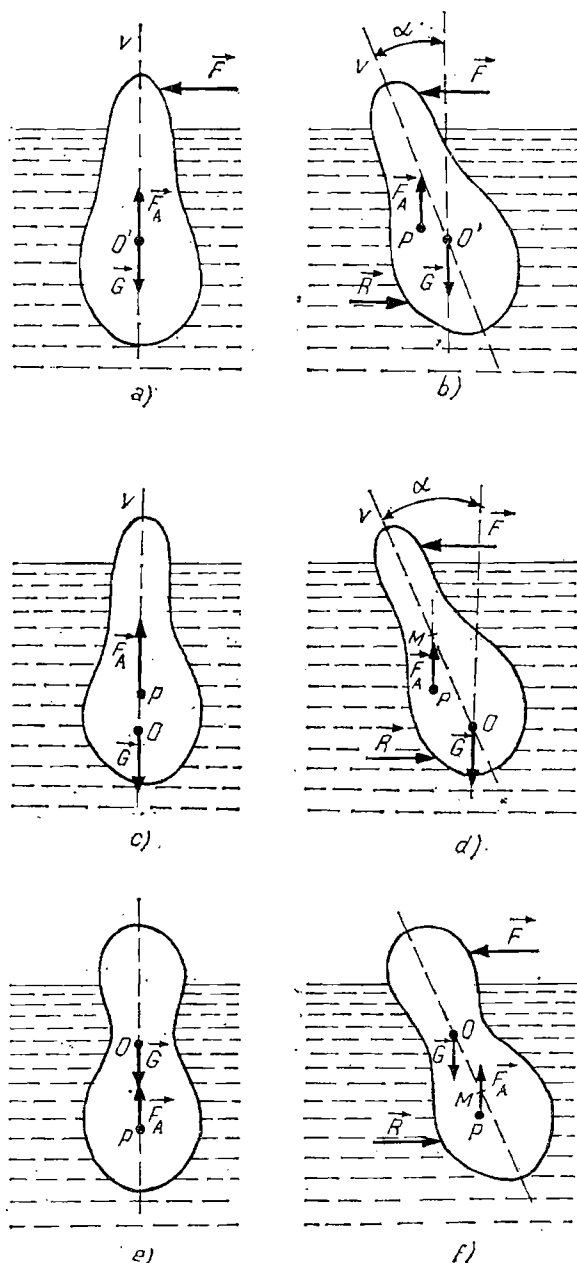


Fig. 1.9.8

cu centrul de greutate  $O'$  al corpului. Într-adevăr,  $O'$  se va găsi în continuare pe axa de simetrie a corpului, la aceeași distanță de vârful  $V$ , în timp ce  $P$  ajunge la stînga axei de simetrie a corpului, adică în partea în care a avut loc înclinarea (fig. 1.9.8 b). Forțele  $\vec{F}_A$  și  $\vec{G}$  dau naștere unui cuplu care tinde să



aducă corpul în poziția de echilibru, opunându-se deci răsturnării. Acest cuplu este cu atât mai mare cu cât distanța  $d$  dintre suporturile celor două forțe este mai mare. La un unghi de înclinare  $\alpha$  dat, această distanță este mai mare dacă  $O'P$  este mai mare. Așadar, dacă centrul de greutate  $O$  este de la bun început sub centrul de presiune  $P$  (fig. I.9.8 c) atunci, pentru același unghi de înclinare  $\alpha$  (fig. I.9.8 d), distanța  $OP$  în această situație este mai mare decât  $O'P$  din cazul precedent. Rezultă că valoarea cuplului de forțe care tinde să restabilească echilibrul, este mai mare dacă în situația de echilibru centrul de greutate este sub centrul de presiune, adică această stare corespunde echilibrului stabil. Din figurile I.9.8 e și I.9.8 f se observă că atunci când centrul de greutate se găsește deasupra lui  $P$ , deși centrul de presiune se deplasează în partea în care s-a înclinat corpul, pentru profilul studiat,  $P$  este situat între axa de simetrie și suportul lui  $G$ . Din acest motiv cuplul forțelor  $\vec{F}_A$  și  $\vec{G}$  nu mai aduce corpul în poziția de echilibru ci, dimpotrivă, contribuie la răsturnarea lui.

Punctul  $M$  în care suportul forței arhimedice intersectează axa de simetrie a corpului se numește *metacentru*. Starea de echilibru stabil corespunde situației în care metacentrul se găsește deasupra centrului de greutate.

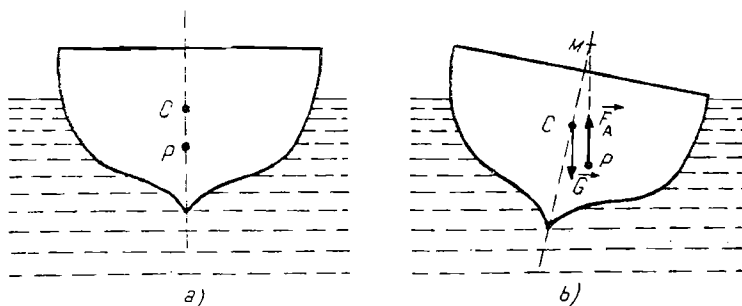


Fig. I.9.9

Pentru anumite profiluri, cum ar fi cel al bărcilor (fig. I.9.9), se poate realiza însă echilibrul stabil și când centrul de greutate se află deasupra celui de presiune. Într-adevăr, profilul bărcilor este astfel ales încât orice înclinare să mărească mult volumul apei dezlocuite așa încât centrul de presiune să fie mult deplasat lateral. În această situație metacentrul  $M$  se găsește deasupra centrului de greutate realizându-se astfel condiția de echilibru.

Profilul vapoarelor nu permite însă la înclinare o deplasare atât de mare a centrului de presiune din care cauză centrul de greutate trebuie să fie situat sub centrul de presiune pentru a avea realizat echilibrul stabil.

## 9.6. PRESIUNEA ATMOSFERICĂ

Datorită faptului că și gazele au masă și deci greutate, acestea exercită la rîndul lor o presiune asupra suprafețelor cu care vin în contact.

Amestecul de gaze care constituie atmosfera terestră este reținut de către Pămînt datorită atracției gravitaționale. Păturile superioare ale atmosferei comprimă păturile inferioare din care cauză densitatea crește sensibil în apro-

pierea suprafeței Pământului. Datorită greutății atmosferei, suprafața planetei noastre și o dată cu aceasta toate viețuitoarele de pe Pământ, suportă o presiune apreciabilă, care a fost numită presiune atmosferică. Această presiune nu poate fi calculată teoretic pentru că nu se cunoaște cu precizie înălțimea atmosferei. O experiență simplă efectuată de Toricelli, permite însă determinarea experimentală a acestei presiuni. Se folosește în acest scop un tub de sticlă cu un diametru de 7–8 mm și înalt de aproximativ 85 cm, închis la un capăt și complet umplut cu mercur. Se astupă cu degetul mare extremitatea liberă a tubului care este apoi răsturnat într-o cuvă cu mercur.

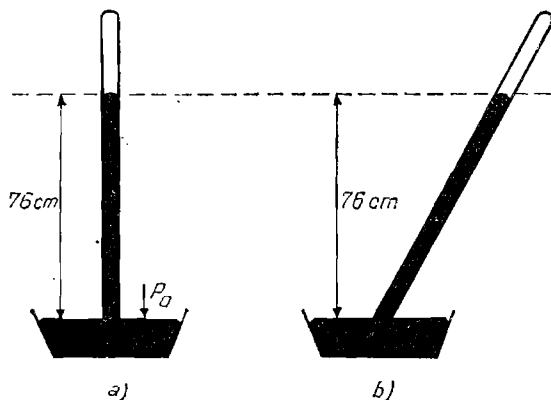


Fig. 1.9.10

Dacă se retrage degetul se constată că mercurul coboară în tub fixându-se la o înălțime de 76 cm deasupra nivelului mercurului din cuvă (fig. 1.9.10 a). Dacă se înclină tubul (fig. 1.9.10 b), spațiul vidat de deasupra coloanei de mercur se micșorează, dar diferența de nivel dintre suprafața mercurului din tub și a celui din vas rămâne nemodificată.

Deoarece mercurul din cuvă și cel din tub sînt în echilibru, înseamnă că presiunea atmosferică  $p_0$  ce se exercită de sus în jos asupra suprafeței mercurului din cuvă este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur din tub de 76 cm înălțime. Tubul în care se găsește coloana de mercur se numește tubul barometric sau tubul lui Toricelli.

Presiunea atmosferică depinde puternic de altitudine și de temperatură, ea scade rapid cu altitudinea. Pentru a demonstra acest lucru, să considerăm o coloană de aer de secțiune  $S$  și înălțime suficient de mică  $dh$  pentru ca între bazele acestei coloane densitatea să poată fi presupusă constantă iar presiunea să varieze cu o cantitate  $dp$  (fig. 1.9.11). Greutatea coloanei de aer

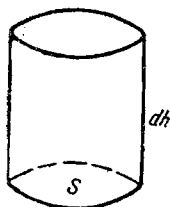


Fig. 1.9.11

este  $dG = gdm = gS\rho dh$ , deci contribuția la presiune a acestei coloane va fi

$$dp = -\frac{dG}{S} = -\rho g dh, \quad (9.15)$$

unde semnul minus trebuie introdus deoarece atunci cînd  $h$  crește ( $dh > 0$ ) presiunea  $p$  scade ( $dp < 0$ ).

Dacă masa unei molecule gram de gaz este  $M$ , iar volumul molar este  $V$ ,  $\rho = M/V$  și ecuația (9.15) devine

$$dp = -\frac{Mg}{V} dh. \quad (9.15 \text{ a})$$

Deoarece, la temperatura  $T$  constantă,  $pV = RT$  (vezi II ec. 3.23), înlocuind în (9.15 a) obținem

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Considerînd că la înălțimile  $h_0$  și  $h_1$  presiunile sînt respectiv  $p_0$  și  $p_1$  rezultă

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_0}^{h_1} dh,$$

adică

$$\ln p_1 - \ln p_0 = -\frac{Mg}{RT} (h_1 - h_0)$$

sau

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} (h_1 - h_0)} \quad (9.16)$$

Relația de mai sus care ne dă dependența presiunii de altitudine este cunoscută sub numele de formula barometrică.

După cum se vede din ecuația (9.16), înălțimea coloanei de mercur echilibrată de presiunea atmosferică nu are întotdeauna valoarea de 76 cm, aceasta avînd loc doar la nivelul mării și la temperatura de  $0^\circ \text{C}$ . La o creștere a altitudinii de aproximativ 10 m, coloana de mercur din tub scade cam cu 1 mm.

Presiunea atmosferică care echilibrează o coloană de mercur de 76 cm este numită presiune atmosferică normală și este luată ca unitate de măsură. Această unitate de măsură a fost numită atmosferă fizică (atm). Avînd în vedere că densitatea mercurului la  $0^\circ \text{C}$  este de  $13,6 \text{ g/cm}^3$ , obținem relația dintre atmosfera fizică și unitatea CGS de presiune ( $\text{dyn/cm}^2$ ):  $1 \text{ atm} = 13,6 \text{ g/cm}^3 \cdot 980 \text{ cm/s}^2 \cdot 76 \text{ cm} = 1,013 \cdot 10^6 \text{ g/cm} \cdot \text{s}^2 = 1,013 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$  sau  $1 \text{ atm} = 10,13 \text{ N/cm}^2 = 1,033 \text{ kgf/cm}^2 = 1,033 \text{ at}$ . O unitate de măsură pentru presiune, întrebuintată în special în meteorologie, este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm. Această unitate este numită torr sau milimetru coloană de mercur (mm Hg) și din însăși definiția sa rezultă că  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 760 \text{ torr}$ .

## 9.7. LEGEA LUI ARHIMEDE PENTRU GAZE

Deoarece gazele au greutate, legea lui Arhimede se aplică și acestora: un corp cufundat într-un gaz este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de gaz dezlucuit.

Avînd în vedere că densitatea gazelor este mult mai mică decît cea a lichidelor, forța arhimedică exercitată de gaze este sensibil mai mică decît în lichide. Totuși această forță poate fi pusă experimental în evidență cu ajutorul unui dispozitiv numit baroscop (fig. I.9.12). Baroscopul se compune dintr-o balanță la capetele căreia sînt suspendate două sfere  $S_1$  și  $S_2$  care își fac echilibru și au volume mult diferite. Dacă se scoate apoi aerul din interiorul clopotului de sticlă în care se găsește baroscopul, constatăm că balanța se înclină spre sfera mai voluminoasă. Interpretarea acestei experiențe este simplă: balanța a fost în echilibru cît timp sub clopot a existat aer deși masa sferei  $S_1$  este mai mare decît a sferei  $S_2$ , deoarece din cauza diferenței dintre volumele de aer dezlucuite de cele două sfere, forța arhimedică ce acționa asupra lui  $S_1$  era mai mare decît cea care acționa asupra lui  $S_2$ . După ce a fost vidată incinta, forța arhimedică care acționează asupra ambelor sfere devine neglijabilă, ceea ce are drept efect înclinarea balanței în partea sferei mai grele.

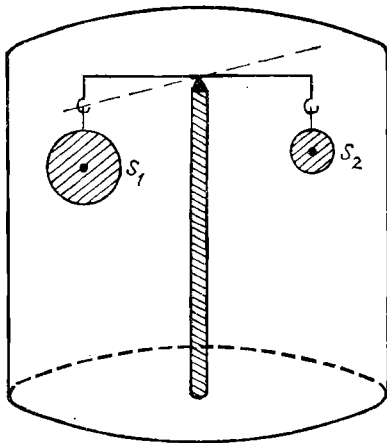


Fig. I.9.12

Notînd cu  $m_1$  și  $m_2$  masele celor două sfere iar cu  $V_1$  și  $V_2$  volumele lor, forța totală care acționează asupra lui  $S_1$  și care reprezintă greutatea aparentă a acesteia în aer va fi

$$F_1 = m_1g - \rho V_1g. \quad (9.17)$$

Analog, asupra sferei  $S_2$  se va exercita forța

$$F_2 = m_2g - \rho V_2g, \quad (9.18),$$

unde  $\rho$  este densitatea aerului. Deoarece inițial sferele își făceau echilibru, avem  $F_1 = F_2$ , adică:

$$m_1 - \rho V_1 = m_2 - \rho V_2; \quad m_1 - m_2 = \rho(V_1 - V_2), \quad (9.19)$$

adică diferența maselor celor două sfere care își fac echilibru în aer este egală cu diferența maselor de aer dezlucuite.

## 9.8. BAROMETRE

Barometrul este un aparat care măsoară cu precizie presiunea atmosferică. Cel mai simplu barometru este chiar tubul lui Toricelli.

Pentru ca un barometru cu mercur să indice cu precizie presiunea atmosferică este necesar ca deasupra coloanei de mercur din tub să nu se găsească urme de gaz sau aer. În caz contrar, gazul închis în tubul barometric va exercita o presiune asupra coloanei de mercur care se adună cu presiunea hidrostatică a mercurului. Pentru a evita folosirea unei cuve cu mercur se construiesc barometre ca cel din figura I.9.13. Partea superioară a tubului  $T$  este, după cum am spus, vidată. Presiunea hidrostatică a coloanei de mercur de înălțime  $h$  echilibrează presiunea atmosferică. Tubul  $T$  este gradat în milimetri pentru a se putea citi direct diferența de nivel a mercurului între cele două ramuri ale barometrului.

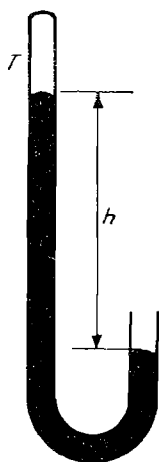


Fig. I.9.13

Un barometru mai puțin precis dar mult mai robust este barometrul metalic sau aneroid (fără aer). El constă dintr-o cutie metalică, ermetic închisă, în care se face vid. Un resort împiedică turtirea cutiei de către presiunea atmosferică. Capacul superior al cutiei este constituit dintr-o membrană metalică subțire și flexibilă a cărei suprafață ondulată se ridică sau coboară în funcție de variația presiunii atmosferice. Micile deplasări ale membranei sînt amplificate și transmise, printr-un sistem de pîrghii articulate, la un ac indicator ce se mișcă pe un cadran gradat. Gradarea cadranelui se face comparînd indicațiile barometrului aneroid cu cele ale unui barometru cu mercur. Aceste barometre sînt robuste, fiind ușor transportabile. Deoarece elasticitatea membranei metalice se modifică în timp, gradațiile barometrului aneroid trebuie verificate din cînd în cînd.

## 10. Hidro- și aerodinamica

### 10.1. FLUIDE PERFECTE

Partea mecanicii care se ocupă de studiul mișcării lichidelor și gazelor poartă numele de *dinamica fluidelor*. Mișcarea fluidelor se deosebește radical de cea a corpurilor rigide prin faptul că diferitele straturi ale aceluiași fluid (lichid sau gaz), se pot deplasa unele față de altele. Întotdeauna la deplasarea unor straturi față de altele apar forțe de frecare, motiv pentru care spunem că fluidul este vâscos. Gradul de vâscozitate diferă mult de la lichid la lichid. În schimb, pentru toate gazele vâscozitatea este puțin importantă.

Prin experiențe simple se poate constata că lichidele sînt foarte puțin compresibile; se obișnuiește chiar să se spună că lichidele sînt practic incompresibile. Despre gaze evident nu se poate spune acest lucru, dimpotrivă, volumul ocupat de un gaz poate fi mult modificat. Totuși, cînd un curent de gaz, care are o viteză mică în comparație cu viteza sunetului prin gazul respectiv, se lovește de un obstacol, se poate observa că nu are loc o comprimare a gazului ci doar o deplasare a particulelor acestuia din fața obstacolului. Dacă dimpotrivă, un corp se mișcă cu o viteză mai mică decît 340 m/s printr-un gaz presupus în repaus, putem considera din nou că gazul nu se comprimă ci doar se deplasează din fața corpului. Prin urmare, în anumite situații, putem presupune că și gazul este practic incompresibil.

Prin definiție, un fluid fără vâscozitate și perfect incompresibil se numește fluid perfect. Vom căuta să obținem mai întîi legile de mișcare ale fluidelor perfecte aproximînd astfel mișcarea lichidelor de vâscozitate mică și a gazelor cu viteze reduse, cu mișcarea unui fluid perfect. După aceea, vom discuta modificările ce trebuie aduse legilor de mișcare ale fluidului perfect atunci cînd ținem seama și de vâscozitate.

### 10.2 CURGEREA STAȚIONARĂ A FLUIDULUI PERFECT

Traectoria descrisă de o particulă de fluid se numește linie de curent. Un mănunchi de linii de curent formează un tub de curent (fig. I.10.1). Deoarece viteza este tangentă în fiecare punct la traiectorie, rezultă că viteza  $\vec{v}$  a particulei de fluid este tangentă în fiecare punct al liniei de curent. Cunoașterea liniilor de curent ale unui fluid înseamnă așadar cunoașterea direcției vitezei fluidului în orice punct din spațiu. Prin convenție s-a hotărît ca liniile de curent să fie astfel figurate, încît desimea lor să fie mai mare acolo unde

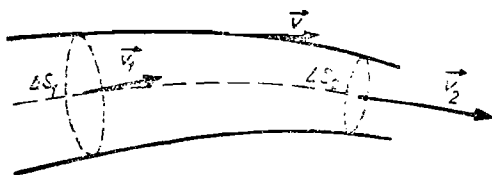


Fig. I.10.1

fluidul are o viteză de curgere mai mare și mai mică acolo unde fluidul curge mai încet.

Liniile de curent și configurația lor în zonele cu viteză de curgere diferită pot fi puse în evidență prin presărarea unei pulberi fine în fluidul respectiv; traiectoria fiecărei particule de pulbere va coincide cu traiectoria unei particule de fluid.

Dacă viteza fluidului în diferite puncte ale sale rămâne constantă în timp, spunem că mișcarea fluidului este staționară sau în regim permanent. În cele ce urmează vom presupune realizată această condiție.

Să considerăm două secțiuni transversale  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$  ale tubului de curent. Deoarece vitezele au componentele perpendiculare pe suprafața laterală a tubului de curent nule, rezultă că toate particulele ce se găsesc într-o secțiune a tubului de curent, continuă să se miște în interiorul acestuia fără a putea ieși din el. De asemenea nici o particulă dintr-un tub de curent învecinat nu pătrunde în interiorul tubului de curent studiat. Din acest motiv cantitatea de fluid care trece printr-o secțiune transversală a tubului de curent în unitatea de timp și care se numește *debit*, este o caracteristică importantă a curgerii fluidului. În cazul staționar debitul este constant în timp.

Cum cantitatea de fluid se poate exprima fie prin intermediul masei fie prin volum, se poate defini un debit masic  $Q_m$  sau un debit volumic  $Q_v$  după cum urmează:

$$Q_m = \frac{m}{t}, \quad Q_v = \frac{V}{t}. \quad (10.1)$$

Utilizînd densitatea fluidului  $\rho$  și avînd în vedere că  $m = \rho V$ , relația dintre  $Q_m$  și  $Q_v$  este

$$Q_m = \rho Q_v. \quad (10.2)$$

Pentru că într-o curgere staționară debitul este constant în oricare secțiune a conductei și pentru că masa de fluid care intră în fiecare secundă printr-un capăt al tubului de curent trebuie să fie egală cu cea care iese prin celălalt capăt (legea conservării masei), obținem

$$\rho \Delta S_1 v_1 = \rho \Delta S_2 v_2. \quad (10.3)$$

În stabilirea relației de mai sus am mai avut în vedere că masa de fluid ce traversează secțiunea  $\Delta S_1$  într-o secundă, este conținută într-un cilindru de bază  $\Delta S_1$  și înălțime  $h = v_1 \cdot 1$ , unde  $v_1$  este viteza particulelor în dreptul secțiunii  $\Delta S_1$ . Relația (10.3) devine

$$\Delta S_1 \cdot v_1 = \Delta S_2 \cdot v_2 = \text{const.} \quad (10.4)$$

Ea este numită *ecuația de continuitate*. Prin urmare, viteza curentului de fluid perfect în dreptul unei secțiuni este invers proporțională cu secțiunea corespunzătoare.

Dacă considerăm curgerea unui fluid perfect printr-o conductă reală, aceasta constituie chiar un tub de curent. Din ecuația de continuitate rezultă că fluidul care curge în partea mai îngustă a conductei începe să curgă mai repede, deci el capătă o accelerație ; ajungem la concluzia că asupra fluidului ce intră într-o parte mai îngustă a tubului acționează o forță din partea fluidului rămas în porțiunea mai largă a conductei. Această forță ce apare în interiorul volumului fluidului nu se poate datora decît unor diferențe de presiune între diferitele părți ale fluidului. Deoarece forța este dirijată spre partea îngustă a tubului, rezultă că presiunea trebuie să fie mai mare în regiunile mai largi ale conductei și mai mică în regiunile de îngustare ale tubului. Pe lângă această forță trebuie să mai luăm în considerare și forțele externe care deplasează masa de fluid în lungul conductei, cum ar fi de exemplu forța de greutate în cazul unei conducte înclinată față de orizontală.

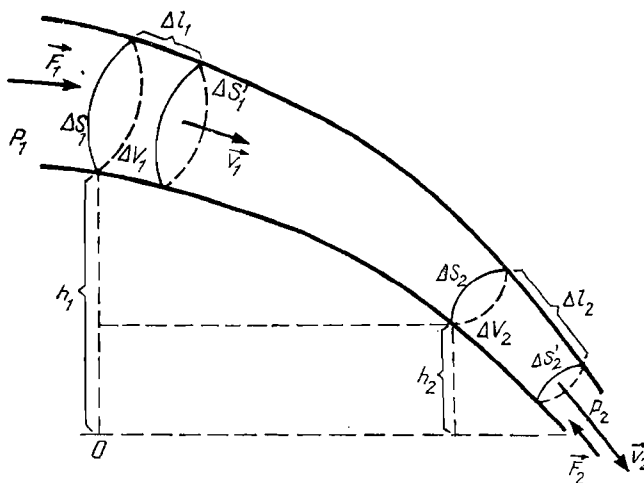


Fig. 1.10.2

Să urmărim mișcarea unei mase  $\Delta m$  de fluid ce se scurge prin tubul de curent din fig. 1. 10.2 pătrunzînd mai întîi prin secțiunea  $\Delta S_1$  situată la înălțimea  $h_1$  și ieșind prin secțiunea  $\Delta S_2$  ce se află la înălțimea  $h_2$ . Fie  $v_1$  viteza fluidului și  $p_1$  presiunea în dreptul secțiunii  $\Delta S_1$ , iar  $v_2$  și  $p_2$ , viteza și respectiv presiunea în dreptul secțiunii  $\Delta S_2$ .

După cum am văzut în paragraful 4.3, variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic  $\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}$  al forțelor exterioare:

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} = \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}. \quad (10.5)$$

Cum una dintre forțele externe este greutatea, vom scrie pe  $\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}$  sub forma unei sume dintre lucrul mecanic al forței de greutate, care este  $\Delta m \cdot g (h_1 - h_2)$



și lucrul mecanic  $\mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}$  al tuturor celorlalte forțe externe a căror natură și proveniență nu ne interesează aici:

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} = \Delta m \cdot gh_1 - \Delta m \cdot gh_2 + \mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}.$$

Rezultă

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot gh_2 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot gh_1 + \mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}, \quad (10.6)$$

unde  $\mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}$  este lucrul mecanic al forțelor exterioare (cu excepția greutateii) care deplasează masa  $\Delta m$  de la secțiunea  $\Delta S_1$  pînă la secțiunea  $\Delta S_2$ .

Să studiem mai amănunțit deplasarea masei de fluid  $\Delta m$  între secțiunile  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$ . Dacă notăm cu  $\Delta V_1$  și  $\Delta V_2$  volumele ocupate de  $\Delta m$  în dreptul primei și respectiv celei de a doua secțiuni, incompresibilitatea lichidului ne permite să afirmăm că  $\Delta V_1 = \Delta V_2$ , adică

$$\Delta S_1 \cdot \Delta l_1 = \Delta S_2 \cdot \Delta l_2. \quad (10.7)$$

Notînd cu  $\Delta t$  timpul în care masa  $\Delta m$  de fluid este transportată prin oricare din cele două secțiuni, vom avea  $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$  și  $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$ . Ținînd seama de incompresibilitatea lichidului, din fig. I.10.2 se observă că transportul masei  $\Delta m$  de fluid din volumul  $\Delta V_1$ , într-un volum egal  $\Delta V_2$ , este echivalent cu deplasarea întregii porțiuni de fluid cuprinse între secțiunile  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$  într-un volum egal delimitat de secțiunile  $\Delta S'_1$  și  $\Delta S'_2$ . Din această ultimă observație rezultă că lucrul mecanic  $\mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}$  necesar transportului masei  $\Delta m$  de la  $\Delta V_1$  la  $\Delta V_2$  este egal cu lucrul mecanic necesar pentru transportul întregii porțiuni de fluid delimitată de  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$  în regiunea delimitată de  $\Delta S'_1$  și  $\Delta S'_2$ . Avînd

în vedere că forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  care acționează la bazele coloanei de fluid au sensuri contrare (ca și în hidrostatică), vom avea  $F_1 = p_1 \Delta S_1$  și  $F_2 = -p_2 \Delta S_2$  unde  $p_1$  și  $p_2$  sînt presiunile ce se manifestă în dreptul secțiunilor  $\Delta S_1$  și  $\Delta S_2$ . Lucrul mecanic  $\mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2}$  fiind egal cu suma lucrurilor mecanice ale celor două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , se obține

$$\mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2} = F_1 \Delta l_1 + F_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta S_1 \Delta l_1 - p_2 \Delta S_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2. \quad (10.8)$$

Introducînd ultima relație în ecuația (10.6) rezultă

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m gh_2 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m gh_1 + p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2.$$

Ținînd seama că  $\Delta m = \rho \Delta V_1 = \rho \Delta V_2$ , obținem relația

$$\rho \frac{v_2^2}{2} \Delta V_2 + \rho gh_2 \Delta V_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} \Delta V_1 + \rho gh_1 \Delta V_1 + p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2,$$

din care rezultă

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \text{constant}. \quad (10.9)$$

Expresia obținută mai sus este *ecuația lui Bernoulli*. Ea ne arată că suma  $\rho \frac{v^2}{2} + \rho gh + p$  este constantă în dreptul oricărei secțiuni.

Dacă conducta este dispusă orizontal,  $h_1 = h_2$  și ec. (10.9) devine

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \text{constant}. \quad (10.10)$$

Presiunea  $p$  pe care ar exercita-o fluidul în toate direcțiile dacă nu s-ar deplasa prin tub se numește *presiune statică* și o vom nota de acum înainte cu  $p_s$ . Deoarece suprafața pereților conductei este paralelă cu viteza de curgere a fluidului deci componenta perpendiculară a vitezei de curgere pe pereții tubului este nulă, presiunea exercitată de fluid asupra pereților conductei este egală chiar cu presiunea statică.

Mărimea  $p_d = \rho v^2/2$  se numește *presiunea dinamică*.

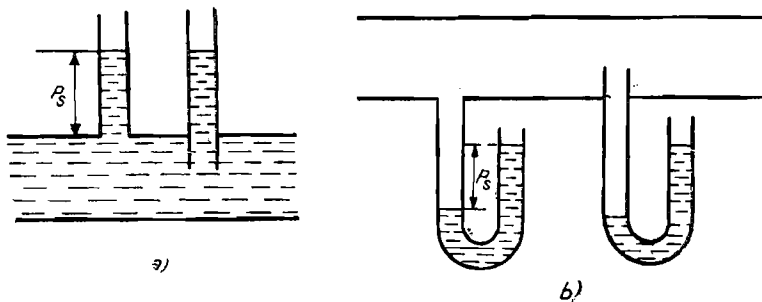


Fig. I.10.3

Presiunea statică  $p_s$  se măsoară cu o sondă de presiune, așa cum se vede din figura I.10.3 a pentru un lichid și I.10.3b pentru un gaz. Denivelarea lichidului din manometru ne arată că presiunea statică  $p_s$  este egală cu presiunea hidrostatică a coloanei de lichid.

Din ecuația lui Bernoulli se observă cu ușurință că presiunea statică a fluidului este mai mare în locurile în care viteza este mai mică, adică acolo unde secțiunea este mai mare. Acest fenomen, numit paradoxul hidrodinamic, poate fi observat dacă în lungul unei conducte de secțiune variabilă, numită tub Venturi, sînt așezate mai multe manometre ca în fig. I.10.4.

Dacă în conducta străbătută de fluid se introduce un manometru cu capătul de jos îndoit în unghi drept așezat contra curentului, care se numește tub

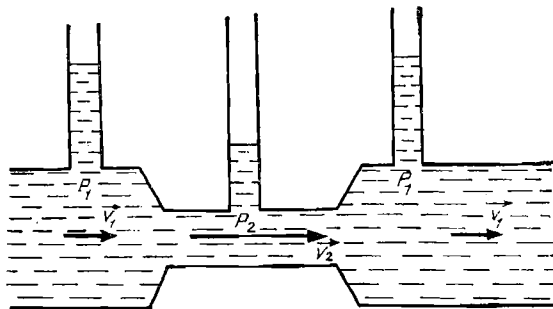


Fig. I.10.4

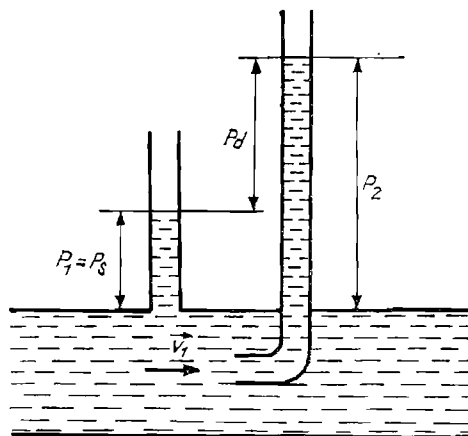


Fig. I.10.5

Pitot, constatăm că lichidul se urcă mai sus în tubul Pitot decât în sonda de presiune (fig. I.10.5). Într-adevăr, când se realizează înălțimea de echilibru a coloanei de fluid din tub, viteza fluidului în dreptul orificiului este nulă, în caz contrar lichidul ar fi împins mai sus în tubul Pitot. Prin urmare presiunea dinamică se anulează și presiunea statică este egală cu cea totală.

Folosind ecuația Bernoulli în acest caz, obținem

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2}, \quad (10.11)$$

adică în acest mod putem măsura presiunea totală  $p_2$  și presiunea statică  $p_s$ .

Diferența  $p_2 - p_1 = \rho \frac{v_1^2}{2}$  reprezintă tocmai presiunea dinamică  $p_d$ .

Utilizînd un tub manometric ca cel din fig. I.10.6. avem posibilitatea să determinăm experimental direct presiunea dinamică a unui curent de gaz.

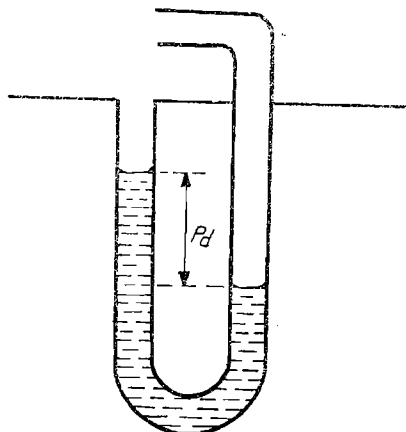


Fig. I.10.6

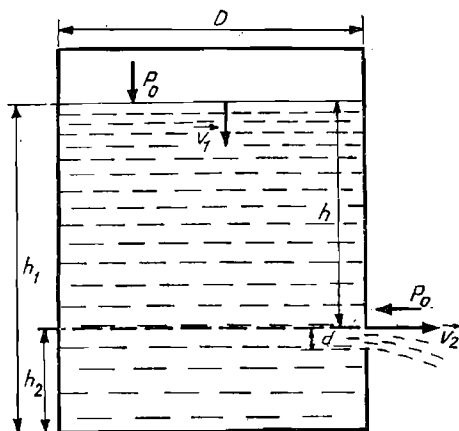


Fig. I.10.7

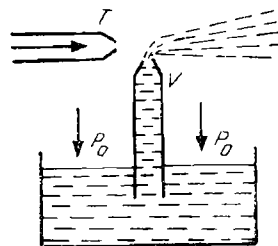


Fig. I.10.8

Cu ajutorul ecuației lui Bernoulli putem afla viteza de curgere a unui lichid printr-un orificiu de diametru  $d$ , mic în comparație cu diametrul  $D$  al vasului (fig. I.10.7). În această situație nivelul lichidului în vas scade lent în timp, deci viteza fluidului din vas este mică. Putem atunci considera că întregul lichid din vas formează un singur tub de curent căruia îi aplicăm ecuația (10.9) avînd în vedere că atît în dreptul secțiunii de sus cît și în dreptul secțiunii orificiului, presiunea este egală cu presiunea atmosferică  $p_0$ :

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_0 = \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_0. \quad (10.12)$$

Rezultă

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}. \quad (10.13)$$

Dacă considerăm  $v_1 = 0$  și  $h = h_1 - h_2$ , ecuația (10.13) devine

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad (10.14)$$

adică viteza pe care o capătă lichidul perfect ce curge de la înălțimea  $h$  este egală cu viteza căpătată de un corp ce cade liber în vid, de la aceeași înălțime.

Printre numeroasele aplicații tehnice ale legii lui Bernoulli menționăm lampa Bunsen, trompa de apă, injectorul, pulverizatorul etc. Deoarece funcționarea tuturor acestora este și simplă și asemănătoare vom descrie doar pulverizatorul (fig. I.10.8).

Prin tubul orizontal  $T$  ce se îngustează la capăt, circulă un curent de aer a cărui viteză se mărește la extremitatea îngustată. Presiunea statică în dreptul extremităților devine mai mică decît presiunea atmosferică din care cauză lichidul este aspirat prin tubul vertical  $V$ , fiind antrenat și pulverizat de jetul de aer care vine prin  $T$ .

### 10.3. CURGEREA FLUIDULUI REAL

Vom trece acum la studiul curgerii fluidului real adică la fluidul pentru care deplasarea unor straturi în raport cu altele este însoțită de apariția unor forțe de frecare. Aceste forțe se manifestă deoarece straturile care se mișcă mai rapid antrenează pe cele mai lente. Acestea din urmă, la rândul lor, acționează cu o forță egală și de sens contrar care provoacă frînarea straturilor care se deplasează mai repede. Mărimea forțelor de frecare depinde de variația vitezei între două straturi învecinate, fiind cu atât mai mare cu cât această variație este mai importantă.

De asemenea, măsurătorile ne arată că în condiții identice forțele de frecare dintre straturile aceluiași fluid diferă sensibil de la fluid la fluid, adică depind de natura fluidului. Cu cât forța de frecare este mai mare se spune că fluidul este mai vâscos. Fluidul perfect este un fluid lipsit de vâscositate. Vâscozitatea lichidelor este de câteva sute de ori mai mare decât cea a gazelor și este o funcție de temperatură. Vâscozitatea lichidelor scade o dată cu creșterea temperaturii pe când cea a gazelor crește.

Legea lui Bernoulli nu mai este valabilă pentru fluidele reale deoarece în deducerea ei, pe baza ecuației (10.5), nu s-a ținut seama și de lucrul mecanic al forțelor de frecare.

Pentru fluidul real ecuația (10.6) se scrie:

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + \mathcal{E}'_{1 \rightarrow 2} + \mathcal{E}_f.$$

unde  $\mathcal{E}_f$  este lucrul mecanic al forțelor de frecare ( $\mathcal{E}_f < 0$ ). Ecuația (10.9) se înlocuiește deci prin

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 + \frac{\mathcal{E}_f}{\Delta V}. \quad (10.9a)$$

Relația (10.9a) ne arată că presiunea totală scade în lungul conductei deoarece  $\mathcal{E}_f < 0$ . Deci

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 < \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1.$$

Dacă un fluid vâscos, de exemplu glicerina curge printr-o conductă orizontală ( $h_1 = h_2$ ) de secțiune constantă (deci  $v_1 = v_2$ ), relația de mai sus devine

$$p_2 < p_1,$$

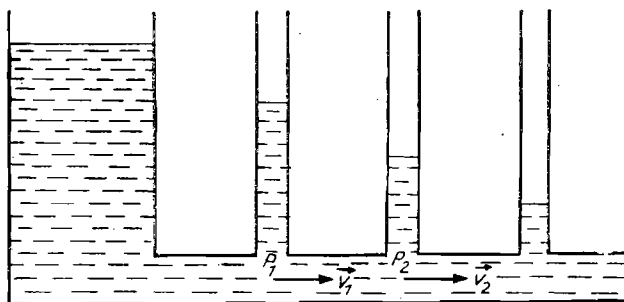


Fig. I.10.9

adică presiunea statică scade în lungul conductei. Așezînd mai multe sonde de presiune, ca în figura I.10.9, putem să verificăm experimental aceasta.

Pentru multe lichide (apă, eter etc.), lucrul mecanic al forțelor de frecare poate fi neglijat cu o bună aproximație dacă vitezele celor două straturi care alunecă unul peste altul, nu diferă prea mult. Aceasta se întîmplă la viteze nu prea mari ale lichidului. Lichidele uleioase, cum ar fi glicerina, au forțe de frecare mari ce nu pot fi neglijate.

Pentru gaze utilizarea formulei lui Bernoulli este de asemenea justificată, acestea fiind mai puțin vîscoase decît orice lichid.

Dacă viteza fluidului prin conductă nu este mare, straturile de fluid se deplasează ca și cum ar aluneca unul peste altul. O asemenea curgere se numește *laminară* și corespunde cazului în care fluidelor reale li se poate aplica cu o bună precizie ecuația Bernoulli.

La curgerea unui fluid real printr-o conductă, în regiunea de contact dintre pereții conductei și primele straturi de fluid apar forțe de frecare mai puternice decît cele dintre straturile de fluid. Din acest motiv viteza straturilor de fluid scade de la mijlocul conductei spre pereții acesteia (fig. I.10.10a). Pentru conducte largi (fig. I.10.10 b), frecarea cu pereții nu mai influențează viteza straturilor suficient depărtate de pereți.

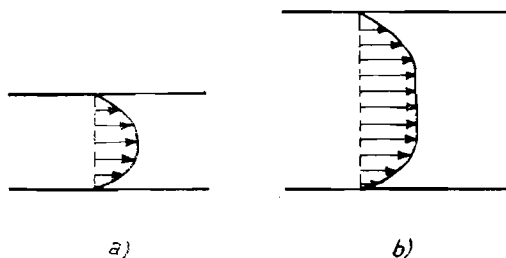


Fig. I.10.10

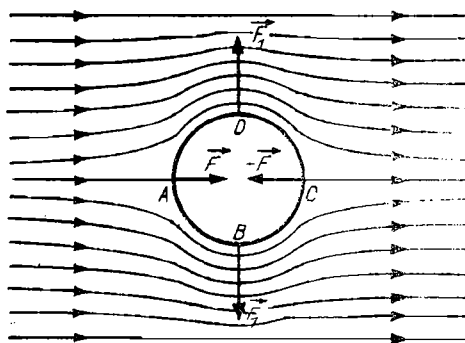
Cînd viteza fluidului crește, curgerea acestuia își pierde caracterul laminar deoarece vitezele încep să aibă componente și după direcția perpendiculară pe axa conductei. În fluid apar vîrtejuri din care motiv curgerea se numește turbulentă.

Trecerea de la curgerea laminară la cea turbulentă este însoțită de o creștere importantă a forțelor de frecare.

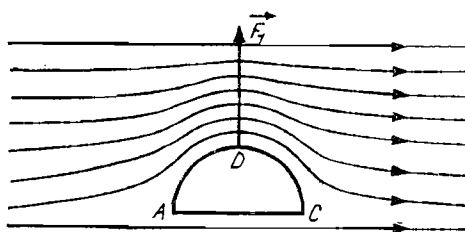
#### 10.4. MIȘCAREA CORPURILOR PRIN FLUIDE

În loc de a studia mișcarea unui corp, cu viteza  $\vec{v}$  printr-un fluid, este mai comod să considerăm situația perfect echivalentă cînd corpul este în repaus iar fluidul se mișcă cu viteza  $(-\vec{v})$ . Totul se petrece ca și cum fluidul aflat în mișcare se izbește de obstacolul pe care îl constituie corpul. Forța pe care o exercită fluidul asupra obstacolului reprezintă chiar forța de rezistență pe care o întîmpină corpul în mișcarea reală de înaintare prin fluid.

Să analizăm mai întîi, conform celor spuse mai sus, mișcarea printr-un fluid perfect a unui cilindru de rază  $r$ , cu axa perpendiculară pe direcția de curgere a fluidului. În fig. I.10.11a am reprezentat liniile de curent ale fluidului în-



a)



b)

Fig. I.10.11

tr-o secțiune longitudinală. În punctele  $A$  și  $C$  viteza fluidului este nulă iar în  $B$  și  $D$  este mai mare decât viteza  $v$  a fluidului neperturbat, tubul de curent îngustându-se. Variația vitezei fluidului în dreptul lui  $A$  este deci  $\Delta v = 0 - v = -v$  iar în dreptul lui  $C$ ,  $\Delta v = v - 0 = v$ . Din această cauză presiunea statică este mai mare în  $A$  și  $C$  și mai mică în  $B$  și  $D$ .

Avînd în vedere că viteza fluidului scade în vecinătatea lui  $A$  de la  $v$  la zero, rezultă că asupra fluidului se exercită o forță din partea obstacolului, care este dirijată de la dreapta la stînga. Conform principiului acțiunii și reacțiunii fluidul acționează la rîndul său cu o forță egală și de sens contrar, adică

de la stînga la dreapta, care pe figura I.10.11a a fost notată cu  $\vec{F}$ . În dreptul lui  $C$  viteza fluidului crește de la zero la  $v$ , prin urmare forța ce acționează asupra fluidului este dirijată de la stînga la dreapta iar cea care acționează asupra corpului conform principiului al treilea este îndreptată de la dreapta

la stînga. Pe figura I.10.11a această forță a fost notată cu  $(-\vec{F})$  deoarece modulul său este egal cu cel al forței din  $A$ , dacă avem în vedere că în valoare absolută variația vitezei (deci și a impulsului) fluidului este aceeași atît în vecinătatea lui  $A$  cît și a lui  $C$ . Este evident că forțele din  $A$  și  $C$  își fac echilibru din care cauză asupra corpului nu acționează nici o forță după direcția decurgere a fluidului.

În punctul  $D$ , datorită scăderii presiunii statice, apare o forță  $\vec{F}_1$  care tinde să deplaseze cilindrul în regiunea de presiune mai scăzută. Dar aceeași valoare scăzută a presiunii se înregistrează și în dreptul lui  $B$ , prin urmare apare o forță care datorită simetriei trebuie să fie egală în modul cu  $\vec{F}_1$  dar care este dirijată în sens contrar și a fost notată cu  $(-\vec{F}_1)$ .

În concluzie, suma tuturor forțelor care acționează asupra cilindrului din partea fluidului este egală cu zero, adică un corp simetric în mișcare într-un fluid nevîscos nu întîmpină nici o rezistență.

Dacă corpul este însă asimetric, de exemplu o jumătate de cilindru, forța  $\vec{F}_1$  din punctul  $D$  nu mai este compensată, apare deci o forță rezultantă perpendiculară pe direcția de curgere a fluidului neperturbat (fig. I.10.11b).

La mișcarea unui corp într-un mediu vîscos apare întotdeauna o forță de rezistență care se opune înaintării corpului. Aceasta se datorește forțelor de frecare dintre păturile de fluid ce au viteze diferite datorită antrenării diferite de către corp a respectivelor straturi de fluid. Cînd corpul este și asimetric, cum este cazul profilului aripii de avion (fig. I.10.12 a), pe lîngă forța longitudinală de rezistență  $\vec{R}$  mai apare o forță transversală  $\vec{\mathfrak{Q}}$  numită *portanță*, deoarece forța  $\vec{\mathfrak{Q}}$  asigură mișcarea ascensională a avionului. Pentru ca avionul să nu cadă, trebuie satisfăcută egalitatea

$$\mathfrak{Q} = F \cos \rho = mg$$

unde  $m$  este masa avionului, iar forța  $\vec{F}$  reprezintă rezultanta forțelor care acționează asupra corpului din partea fluidului.

Componenta orizontală  $R = F \sin \varphi$ , care reprezintă rezistența la înaintare, este compensată de forța de propulsie dezvoltată de motoarele avionului. În acest fel se realizează mișcarea după verticală și după orizontală a avionului.



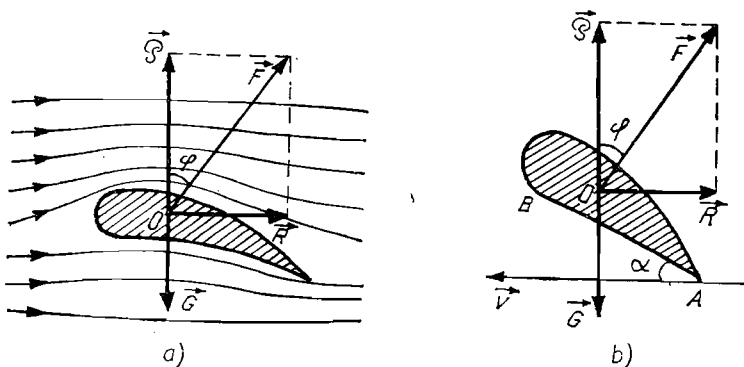


Fig. 1.10.12

În realitate, aripa avionului face în general un unghi  $\alpha$  cu direcția de deplasare a avionului, numit unghi de atac (fig. 1.10.12 b). În cele ce urmează vom aproxima conturul inferior al aripii printr-o dreaptă  $AB$  ce face unghiul  $\alpha$  cu  $\vec{v}$ .

Experiența arată că la viteze  $v$  mari care permit formarea de vârtejuri, forța  $\vec{F}$  este proporțională cu pătratul vitezei și depinde de unghiul de atac după legea

$$F = Kv^2 \sin \alpha, \quad (10.15)$$

fiind perpendiculară pe dreapta  $AB$ , adică  $\varphi = \alpha$ . Constanta  $K$  depinde de forma geometrică a profilului de aripă și de mediul în care are loc mișcarea. Înlocuind pe  $F$  în expresiile lui  $\mathfrak{L}$  și  $R$ , obținem

$$\mathfrak{L} = Kv^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{K}{2} v^2 \sin 2\alpha, \quad (10.16)$$

$$R = Kv^2 \sin^2 \alpha. \quad (10.17)$$

După cum se vede din ecuația (10.16) când viteza  $v$  pe orizontală dată de motor crește, portanța  $\mathfrak{L}$  crește și avionul urcă. Dimpotrivă, aparatul coboară când viteza scade. Este ușor de înțeles că un avion are nevoie de opistă de decolare care să-i permită să-și ridice viteza, rulând pe sol, pînă la valoarea dată de egalitatea  $\mathfrak{L} = mg$ , când începe să se ridice.

Din relația (10.16) se mai observă că portanța este maximă pentru unghiul de atac  $\alpha = \pi/4$ , când  $\sin 2\alpha = 1$ . Portanța crește deci când unghiul de atac crește de la zero pînă la  $\pi/4$ , după care începe să scadă la o creștere ulterioară a lui  $\alpha$ . Să nu uităm însă că acest rezultat îl obținem doar în urma unei aproximări a conturului aripii. În realitate lucrurile sînt mult mai complicate, dar calitativ, portanța depinde de unghiul  $\alpha$ , ca în modelul nostru simplificat. Valoarea maximă a portanței nu se înregistrează însă pentru  $\alpha = \pi/4$ , adică din punct de vedere cantitativ nu obținem rezultate precise prin simplificările făcute.

Notînd cu  $\vec{T}$  forța de tracțiune a motorului, cînd  $\vec{T} = -\vec{R}$ , avionul se mișcă pe orizontală rectiliniu și uniform. Puterea motorului este dată de relația (4.19):

$$P = \vec{T} \vec{v} = Tv \quad (10.18)$$

deci

$$P = Kv^3 \sin^2 \alpha. \quad (10.19)$$

Din ultima relație se observă că pentru a dubla viteza maximă a unui avion, este necesar un motor de opt ori mai puternic.

Relația (10.17) este de fapt o relație mai generală care dă forța de rezistență pe care o întîmpină un corp ce se mișcă într-un fluid. Constanta  $K$  depinde de forma geometrică a corpului respectiv și este proporțională cu secțiunea transversală maximă  $S$  a acestuia, dar depinde și de densitatea  $\rho$  a mediului:

$$K = CS\rho, \quad (10.20)$$

unde  $C$  este o nouă constantă ce depinde numai de forma geometrică a corpului și care se determină experiemantal într-o instalație numită tunel aerodinamic.

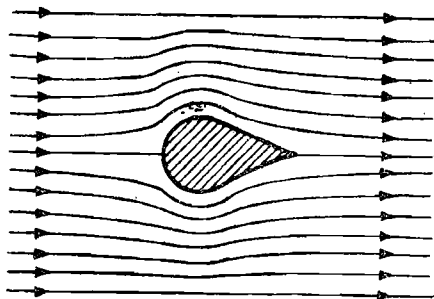


Fig. I.10.13

Dintre diferite corpuri ce au aceeași secțiune transversală maximă  $S$ , corpul care întîmpină o rezistență minimă în aceleași condiții de mișcare (adică cel ce are  $C$  minim), se zice că are o formă aerodinamică. În fig. I.10.13 este figurat un corp de formă aerodinamică. Corpurile păsărilor și peștilor se apropie foarte mult de această formă. Toate vehiculele ce se mișcă rapid prin fluide (avioane, automobile de curse, trenuri, vapoare), sînt construite cu profil aerodinamic. La avioane însă portanța trebuie să fie suficient de mare, ori aceasta este proporțională cu  $C$ . Din acest motiv găsirea profilului de aripă optim, care la o portanță dată  $\mathcal{Q}$  să întîmpine o rezistență  $R$  cît mai mică, necesită o muncă foarte complicată.

Forța de rezistență este folosită pentru a încetini căderea unui corp în aer. Parașuta are forma unei emisfere ce înaintează cu concavitatea înainte deoarece acestei forme îi corespunde o valoare deosebit de mare a constantei  $C$ , adică o forță de rezistență mare. Pe măsură ce viteza corpului aflat în cădere și suspendat de o parașută crește, se mărește și forța de rezistență pînă ajunge să echilibreze greutatea corpului. În continuare, are loc o mișcare rectilinie și

uniformă cu viteza  $v$  ce corespunde echilibrului celor două forțe. Putem determina această viteză dacă utilizăm relațiile (10.17) și (10.20) precum și faptul că unghiul de atac  $\alpha$  este egal cu  $\pi/2$  în acest caz:  $C_{\rho} S v^2 = mg$ , adică

$$v = \sqrt{\frac{mg}{C_{\rho} S}}. \quad (10.21)$$

## 10.5. ENERGIA HIDRAULICĂ

O sursă naturală și ieftină de energie o constituie energia apei în cădere, care poate servi la punerea în mișcare a unei roți, numită roată hidraulică.

Dacă masa  $m$  de apă cade de la o înălțime  $h$ , lucrul mecanic pe care îl poate efectua este egal cu variația energiei potențiale, adică

$$\mathcal{E} = mgh, \quad (10.22)$$

unde  $h$  este măsurat față de nivelul roții hidraulice.

Puterea va fi

$$P = \frac{\mathcal{E}}{t} = \frac{mgh}{t} = Q_m gh, \quad (10.23)$$

unde  $Q_m$  este debitul masic.

Puterea utilă  $P_u$ , adică puterea comunicată arborelui roții hidraulice, este însă mai mică. Prin definiție, raportul

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{P_u}{Q_m gh} \quad (10.24)$$

se numește *randament* și este aproximativ 0,75 pentru roata hidraulică. Din punct de vedere tehnic se urmărește ca randamentul să fie cât mai mare. Din acest motiv, tehnica contemporană nu se mulțumește cu puterea utilă obținută prin simpla cădere a apei. Au fost construite dispozitive perfecționate, numite turbine care au un randament mult superior.

O turbină extrem de des întâlnită, care este acționată de o cădere de apă de debit mic însă de viteză mare ( $h$  mare), este turbina Pelton (fig. I.10.14). Rotorul acesteia este acționat de un jet de apă ce iese cu viteză mare dintr-o conductă de secțiune variabilă ce se îngustează treptat, numită ajutoraj. Cupele rotorului sînt concave, avînd o muchie ascuțită la mijloc care împarte jetul în două părți egale inversîndu-i direcția de curgere (fig. I.10.15 a). Din această cauză variația vitezei apei este  $v - (-v) = 2v$ . Notînd cu  $Q_m$  debitul masic ce iese din ajutorajul  $A$  și avînd în vedere că jetul de apă se împarte în părți egale, variația impulsului fluidului în unitatea de timp este

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = Q_m v - \left[ \frac{Q_m}{2} (-v) + \frac{Q_m}{2} (-v) \right] = 2Q_m v.$$

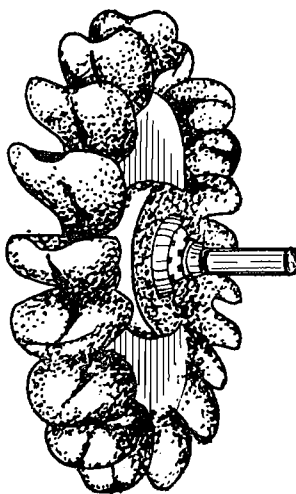


Fig. I.10.14

Asupra fluidului acționează o forță  $F = 2Q_m v$  deci asupra cupei  $C$  acționează o forță egală ca mărime, dar de sens opus, care o va pune în mișcare. Dacă cupa ar fi avut forma din fig. I.10.15 *b*, viteza finală a jetului, de același debit  $Q_m$ , ar fi fost practic nulă, adică variația impulsului fluidului în unitatea de timp ar fi fost

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = Q_m v - 0 = Q_m v,$$

adică forța care ar fi acționat asupra paletii rotorului ar fi fost de două ori mai mică decât în primul caz.

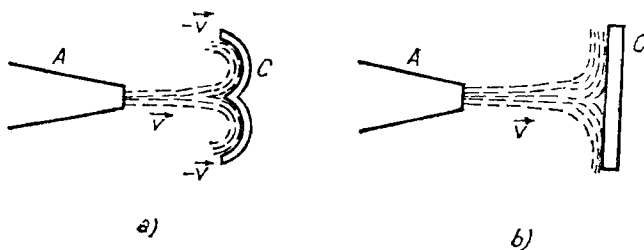


Fig. I.10.15

## 11. Unde elastice

### 11.1. MIȘCAREA ONDULATORIE. PROPAGAREA UNDELOR ÎN MEDII ELASTICE

În paragrafele 2.7 și 3.10 consacrate mișcării oscilatorii ne-am ocupat de studiul oscilațiilor unor corpuri sau particule izolate (ex.: pendul, greutate atârnată de un resort). Ce se întâmplă însă când particula care efectuează oscilația face parte dintr-un mediu ale cărui particule sînt legate între ele datorită forțelor interne? În acest caz mișcarea unei particule (respectiv energia sa) se poate transmite particulelor care o înconjoară și care încep și ele să oscileze. Mișcarea oscilatorie a întregului sistem de particule are un caracter mai complicat și prezintă o serie de aspecte diferite de cea a unei particule independente.

Să considerăm, de exemplu, un sistem de pendule grele suspendate prin vergele rigide de un ax horizontal comun și legate între ele prin resorturi (fig. I.11.1). Dînd un impuls primului pendul astfel ca să oscileze într-un plan perpendicular pe ax, acesta trage după sine al doilea pendul care începe să oscileze, și așa mai departe. Mișcarea unui pendul nu se transmite însă instantaneu celui vecin ci cu o oarecare întârziere, astfel că mișcarea oscilatorie se transmite din aproape în aproape cu o viteză finită. Mărimea acestei viteze depinde de masa bilelor și de constanta de elasticitate a resoartelor de legătură.

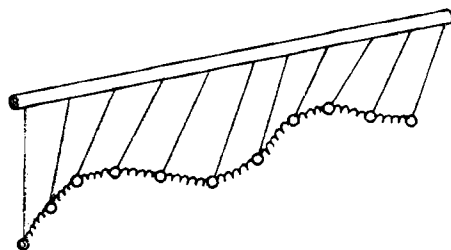


Fig. I.11.1

Mai putem da și alte exemple de mișcări oscilatorii care se propagă printr-un mediu: valurile concentrice care se formează la suprafața apei în jurul punctului în care a căzut o piatră, propagarea oscilațiilor în lungul unui tub de cauciuc flexibil (sau un fir) fixat la un capăt prin imprimarea mișcării oscilatorii la celălalt capăt.

Un mediu oarecare este constituit din particule între care se exercită anumite forțe de legătură. Dacă acestea sînt de natură elastică *mediul* se numește *elastic*. Mișcarea oscilatorie imprimată unor particule ale mediului se propagă

din aproape în aproape în toate punctele sale, iar procesul acesta de propagare a oscilației poartă numele de *undă*. Undele care se propagă în medii elastice sînt numite *unde elastice*.

Trebuie observat că în propagarea mișcării oscilatorii particulele nu se deplasează între punctele între care s-a propagat oscilația ci efectuează doar oscilații în jurul pozițiilor lor de echilibru. Particulele mediului încep să oscileze cu o frecvență egală cu cea a sursei de oscilații, fiind însă în întârziere de fază față de aceasta. Întârzierea este legată de timpul necesar oscilației să se propage și cum viteza de propagare este finită, întârzierea este cu atît mai mare cu cît distanța de la particulă la sursă este mai mare. Locul geometric al punctelor mediului atinse în același moment de oscilație se numește *front de undă*. Se mai poate introduce și noțiunea de *suprafață de fază egală* sau *suprafață de undă* care este locul geometric al punctelor care oscilează cu aceeași fază. În mediile izotrope, mișcarea oscilatorie se propagă cu aceeași viteză în toate direcțiile și atunci frontul de undă coincide cu suprafața de undă.

Putem face o clasificare a undelor după forma frontului de undă: astfel dacă frontul de undă este o suprafață sferică avem *unde sferice*, iar dacă este un plan avem *unde plane*. Într-un mediu elastic omogen și izotrop oscilațiile produse într-un punct al său se propagă în mod uniform în toate direcțiile, astfel că fronturile de undă la diferite momente sînt suprafețe sferice concentrice (deci unde sferice). Direcția de propagare a undelor (sau a frontului de undă), normală la această suprafață, se numește *rază*. Să observăm că, la distanță mare de sursa undelor raza suprafeței sferice devenind foarte mare, curbura suprafeței este foarte mică și putem considera fronturile de undă ca fiind plane paralele între ele (unde plane).

În general distingem două tipuri de unde elastice: *unde longitudinale*, dacă particulele oscilează în lungul direcției de propagare și *unde transversale* dacă direcția de oscilație a particulelor este perpendiculară pe direcția de propagare a undeii.

În fig. I.11.2 este reprezentat schematic procesul de propagare a unei unde longitudinale. În momentul  $t = 0$ , toate particulele mediului ocupă poziții de echilibru și presupunem că sînt egal depărtate (prima linie din figură). Imprimăm în acest moment particulei din punctul  $O$  o viteză  $v$ . După un sfert de perioadă ( $t = T/4$ ) această particulă s-a depărtat de poziția de echilibru cu o distanță egală cu amplitudinea  $A$  a mișcării oscilatorii. În acest moment viteza sa este nulă și sub acțiunea forțelor elastice dintre particule, capătă o accelerație îndreptată spre poziția de echilibru. În același moment însă particula din  $O_1$  aflată încă în poziția de echilibru primește viteza  $v$  (linia a doua din figură). După o jumătate de perioadă,  $t = T/2$ , particula  $O$  a revenit în poziția de echilibru avînd însă viteza  $v$  în sens contrar celei imprimate inițial. În acest moment particula  $O_1$  are elongația maximă, iar particula  $O_2$  aflată încă în poziția de echilibru primește viteza  $v$  (linia a 3-a). După timpul  $t = 3T/4$  (linia a 4-a) particula  $O$  are elongația  $-A$ , particula  $O_1$  ajunge din nou în poziția de echilibru,  $O_2$  are elongația maximă (în direcția propagării) iar particula  $O_3$  primește viteza  $v$ . În sfîrșit, după o perioadă,  $t = T$  (linia a 5-a), particula  $O$  a ajuns din nou în poziția de echilibru avînd viteza  $v$ , ș.a.m.d. După cum se vede din figură, în cazul undelor elastice longitudinale au loc apropieri și depărtări succesive ale particulelor una în raport cu alta, astfel că în mediu apar regiuni de comprimări și respectiv dilatări. În procesul de propagare a undeii au loc deplasări ale acestor regiuni în direcția de propagare.

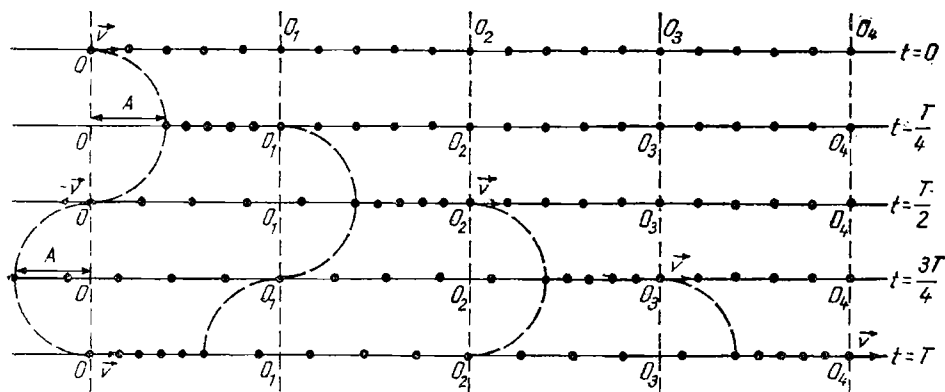


Fig. I.11.2

În figura I.11.3 este reprezentată schema de propagare a unei unde transversale. În acest caz particula  $O$  a capătat la momentul  $t = 0$  o viteză  $v$  în sus, la momentul  $t = T/4$  ea va avea elongația maximă și particula  $O_1$  aflată încă în poziția de echilibru primește viteza  $v$  în același sens cu precedenta, ș.a.m.d. Discuția se poate continua în aceeași manieră ca mai înainte ținând însă seama de faptul că oscilațiile au loc într-o direcție perpendiculară pe cea de propagare. În exemplele menționate la începutul paragrafului avem de-a face cu unde transversale. Unde longitudinale pot fi produse în aerul dintr-un tub liber la un capăt și avînd în celălalt un piston care poate fi mișcat brusc.

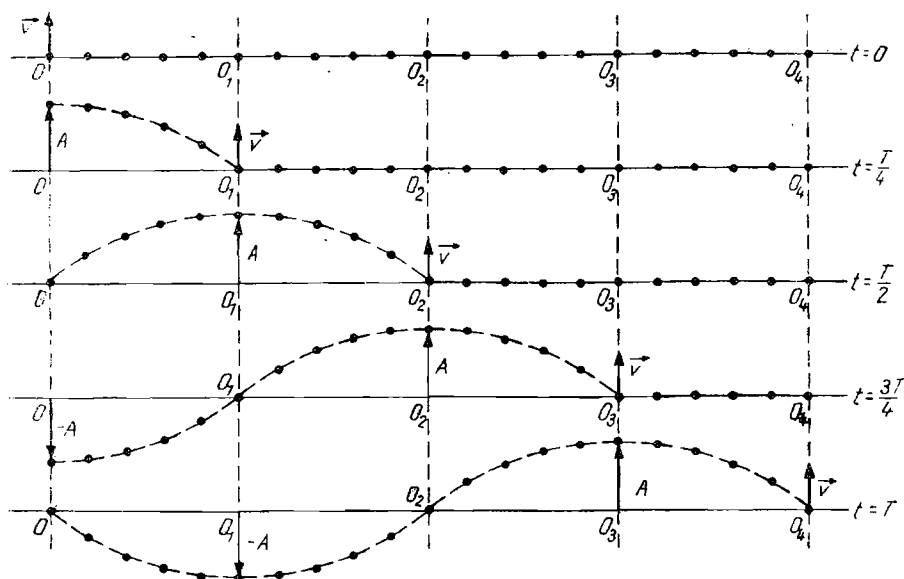


Fig. I.11.3

Proprietățile elastice ale mediului favorizează propagarea unuia din cele două tipuri de unde. Astfel în gaze și lichide\* nu se pot propaga decât unde longitudinale, în timp ce în mediile solide se pot propaga atât cele longitudinale cât și cele transversale.

*Viteza de propagare* a undelor în medii elastice depinde de proprietățile acestora. Astfel, pentru undele longitudinale se poate demonstra teoretic că viteza  $v$  este dată de relația, cunoscută sub numele de formula lui Newton:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11.1)$$

unde  $E$  este modulul lui Young, iar  $\rho$  densitatea mediului prin care se propagă. Pentru undele transversale există o relație asemănătoare în care în locul modulului Young de elasticitate apare modulul de forfecare. Din această cauză vitezele de propagare în solide pentru cele două tipuri de unde sînt diferite.

Se numește *lungime de undă* ( $\lambda$ ) distanța pe care se propagă mișcarea oscilatorie într-o perioadă. Am văzut că deoarece mișcarea oscilatorie se propagă în mediu din aproape în aproape, între oscilațiile diferitelor puncte din mediu apare o diferență de fază. Punctele mediului care oscilează în aceeași fază (au elongații egale în mărime și de aceeași parte a poziției de echilibru) se spune că sînt în concordanță de fază. Astfel sînt de exemplu punctele  $O$  și  $O_4$  din figurile I.11.2 și I.11.3 (vezi ultima linie a figurii), distanța dintre ele fiind tocmai lungimea de undă  $\lambda$ . Punctele  $O$  și  $O_2$  (sau  $O_1$  și  $O_3$ ) care au tot timpul aceeași elongație și viteză însă în sensuri opuse, față de poziția de echilibru, sînt în opoziție de fază. Distanța dintre ele este egală cu  $\lambda/2$ . Să observăm că dacă am fi continuat schema de propagare din aceste figuri considerînd propagarea în continuare a oscilației, am fi găsit că punctul situat la o distanță egală cu  $\overline{OO_4}$  ( $\lambda$ ) este din nou în concordanță de fază, ș.a.m.d. Putem defini deci lungimea de undă altfel, ca fiind distanța cea mai mică dintre două puncte ale mediului care oscilează în concordanță de fază.

Din definiția lui  $\lambda$  rezultă relația dintre lungimea de undă  $\lambda$ , perioada  $T$  și viteza de propagare  $v$ :

$$\lambda = vT = v/\nu, \quad (11.2)$$

unde  $\nu$  este frecvența oscilației ( $T = 1/\nu$ ).

## 11.2. ECUAȚIA UNDEI PLANE

Pentru a găsi ecuația unei unde plane vom considera o undă care se propagă în lungul unei drepte (de exemplu un fir), punctul  $O$  fiind menținut în stare de oscilație. Dacă cunoaștem depărtarea de poziția de echilibru (elongația  $y$ ), a oricărui punct de pe dreapta pe care se propagă unda și la orice moment, mișcarea ondulatorie este perfect determinată.

Vom alege ca origine a coordonatelor chiar punctul  $O$  care constituie centrul de oscilație (sursa). Elongația sursei este dată de relația (2.71):

$$y = A \sin \omega t, \quad (11.3)$$

unde  $A$ ,  $\omega$  și  $t$  au semnificațiile cunoscute din studiul mișcării oscilatorii.

---

\* Afirmția nu se referă la undele de suprafață la lichide, care pot fi și transversale (vezi exemplul cu aruncarea unei pietre pe suprafața apei).



Într-un punct oarecare  $P$  situat pe dreaptă, la distanța  $x$  de  $O$ , oscilațiile vor ajunge la momentul  $t_1$  ( $t_1 > 0$ ), după ce au parcurs distanța  $\overline{OP}$ , adică

$$t_1 = x/v, \quad (11.4)$$

unde  $v$  este viteza de propagare a undei. Elongația punctului  $P$  va fi

$$y = A \sin \omega (t - t_1),$$

deoarece punctul  $P$  a început să oscileze cu  $t_1$  secunde în urma punctului  $O$ . Ea este egală cu cea pe care a avut-o punctul  $O$  la momentul  $t - t_1$ . Folosind (11.4) și (11.2) obținem:

$$y = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (11.5)$$

Relația (11.5) reprezintă *ecuația undei plane* care se propagă în direcția axei  $x$ . Aceasta este valabilă pentru unda plană deoarece în acest caz, frontul de undă fiind plan, toate punctele din acest plan au la un moment dat aceeași fază (și deci aceeași elongație), determinată doar de distanța de la plan la originea coordonatelor.

Folosind ecuația (11.5) putem înțelege mai bine semnificația noțiunii de puncte ale mediului care oscilează în concordanță sau în opoziție de fază. Într-adevăr, dacă ne fixăm atenția asupra unui anumit punct, situat la distanța  $x = x_0$ , mărimea  $\varphi = \omega x_0/v = 2\pi x_0/\lambda$  reprezintă faza inițială a oscilațiilor acestui punct, elongația sa fiind dată de:  $y = A \sin (\omega t - \varphi)$ . Pentru un punct situat la o distanță  $x = x' = x_0 + \lambda$ , faza va fi  $\varphi' = 2\pi x'/\lambda = 2\pi + \varphi$  astfel că între acesta și punctul  $x_0$  există o diferență de fază  $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = 2\pi$  (elongația punctului  $x'$  va fi egală cu cea a punctului  $x_0$ ). Astfel de oscilații sînt în concordanță de fază. În mod analog, un punct situat la distanța  $x'' = x_0 + \lambda/2$  va avea faza  $\varphi'' = \pi + \varphi$ , iar diferența de fază față de punctul  $x_0$  este  $\Delta\varphi = \varphi'' - \varphi = \pi$  și deci cele două puncte sînt în opoziție de fază.

În încheiere menționăm, fără demonstrație, că în cazul undei sferice amplitudinea scade invers proporțional cu distanța de la centrul de oscilație pînă la punctul din mediu luat în considerare. Notînd această distanță cu  $r$ , expresia elongației este

$$y = \frac{A}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{A}{r} \sin 2\pi \left( vt - \frac{r}{\lambda} \right). \quad (11.8)$$

O justificare a acestei relații va fi dată în § 12.2.

### 11.3. PRINCIPIUL LUI HUYGENS

Fizicianul și astronomul olandez Cristian Huygens a dat în 1690 o metodă practică pentru a construi frontul de undă. În acest scop el a formulat în „Tratatul despre lumină” un principiu, care acum îi poartă numele, valabil pentru propagarea undelor elastice. Conform acestui principiu *oricare punct al mediului, pînă la care a ajuns frontul de undă, poate fi considerat ca o nouă sursă de oscilație astfel încît propagarea să continue mai departe*. Perioada de oscilație a oricăruia din noile centre de oscilație este aceeași cu cea a sursei propriuzise (deci cu a undei care se propagă).

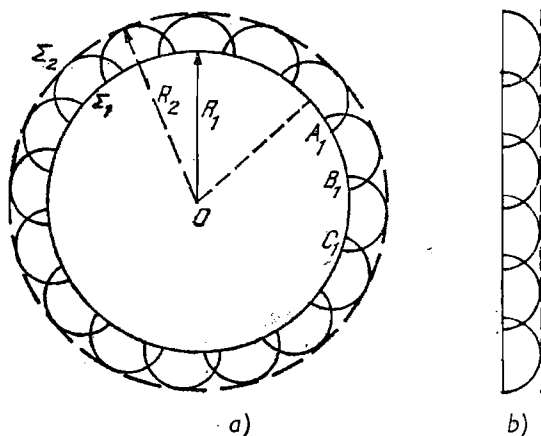


Fig. I.11.4

Acest principiu ne permite să construim frontul de undă la un anumit moment dacă este cunoscut frontul de undă în momentul precedent. Să considerăm de exemplu, undă sferică care se propagă din centrul de oscilație  $O$  (fig. I.11.4 a). La un moment dat  $t$  frontul de undă este suprafața sferică  $\Sigma_1$ , de rază  $R_1$ . Pentru a construi noul front de undă, care se obține după un timp  $\Delta t$ , considerăm fiecare punct de pe suprafața  $\Sigma_1$  ca un nou centru de oscilații, independent, și construim suprafețele de unde elementare. Acestea sînt suprafețele emisferice de rază  $r = v \cdot \Delta t$  avînd centrele în sursele secundare de pe suprafața  $\Sigma_1$  (de exemplu, punctele  $A_1, B_1, C_1$  etc). Suprafața  $\Sigma_2$  tangentă la toate aceste suprafețe elementare (numită, în geometrie, înfășurătoare) este o suprafață sferică de rază  $R_2 = R_1 + r = R_1 + v\Delta t$ , constituind frontul de undă după intervalul de timp  $\Delta t$  față de momentul anterior  $t$ .

Raționamentul este același și pentru o undă plană (fig. I.11.4 b), înfășurătoarea suprafețelor elementare fiind din nou un plan paralel cu cel considerat la momentul anterior. De fapt nici nu trebuie făcută o discuție separată deoarece raza suprafeței, reprezentînd frontul unei sfere, crește continuu în timp și după un timp suficient de lung o porțiune a acestei suprafețe poate fi considerată ca plană.

Discuția anterioară poate fi ilustrată printr-o experiență simplă referitoare la undele circulare care se formează la suprafața unui lichid. Pentru aceasta se ia o cuvă cu apă (sau mercur) împărțită în două printr-un perete avînd un orificiu  $O_1$  de dimensiuni mici în raport cu lungimea de undă  $\lambda$  (fig. I.11.5 a). Într-o jumătate a cuvei producem unde de suprafață cu ajutorul unui ac vibrator fixat, să spunem, de brațul unui diapazon. În jurul punctului  $O$ , în care acul atinge suprafața lichidului, se formează unde circulare care se propagă pe suprafață pînă la peretele despărțitor. Vom observa însă că și în cea de-a doua jumătate a cuvei apar unde circulare avînd însă centrul în orificiul  $O_1$ , ca și cum aici ar fi plasată o sursă de oscilații de aceeași perioadă cu cea din  $O$ .

În legătură cu această experiență vom menționa un fenomen important, caracteristic propagării undelor, numit *difracție*. Acesta constă în ocolirea de către unde a obstacolelor de dimensiuni mai mici sau comparabile cu lungimea de undă  $\lambda$ .

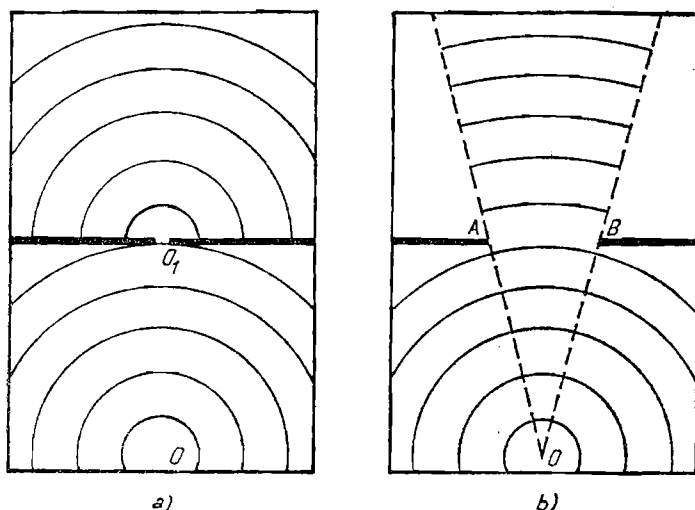


Fig. I.11.5

În cazul orificiului de dimensiuni mai mici decât lungimea de undă (fig. I 11.5a) am văzut că apare o undă care se propagă pe toată suprafața jumătății din dreapta a cuvei. Dacă în cuvă am fi așezat un obstacol de dimensiuni mici față de  $\lambda$ , să spunem că am fi înfipt un cui, am fi constatat că undele se propagă pe întreaga suprafață a cuvei, practic, nederanjate de prezența acestui obstacol.

Dacă efectuăm experiența anterioară practicînd însă în peretele care desparte cuva în două o deschizătură  $AB$  de dimensiuni mari în raport cu lungimea de undă (fig. I.11.5 b) vom constata că în jumătatea dreaptă a cuvei undele de suprafață nu se propagă, practic, decît în interiorul unghiului cu vîrful în  $O$  și ale cărui laturi trec prin marginile deschizăturii  $A$  și  $B$ . În mod analog, dacă așezăm un obstacol de dimensiuni mari în raport cu  $\lambda$ , vom constata că în spatele acestuia nu există unde în propagare; apare fenomenul de umbră. Cînd există deci obstacole de dimensiuni mari în raport cu lungimea de undă difracția devine neglijabilă.

Fenomenul de difracție prezintă o deosebită importanță în propagarea undelor luminoase și va fi discutat în amănunțime în capitolul de optică ondulatorie.

#### 11.4. REFLEXIA ȘI REFRACTIA UNDELOR ELASTICE

Cînd undele care se propagă într-un mediu ajung la o suprafață care-l separă de un alt mediu, are loc un fenomen de schimbare a direcției de propagare și anume, de întoarcere în primul mediu (reflexia undelor) sau de trecere în cel de al doilea mediu cu o schimbare a direcției de propagare (refracția undelor).

Întîlnim o reflexie a undelor și în cazul undelor circulare produse pe suprafața unui lac: se observă că după ce acestea ating malul apar unde circulare care se propagă de la mal spre mijlocul lacului.

Undele care se îndreaptă spre suprafața de separare a celor două medii se numesc *unde incidente*, cele care se întorc — *unde reflectate*, iar cele care trec în cel de al doilea mediu — *unde transmise sau refractate*.

Legile reflexiei și refracției pot fi explicate cu ajutorul principiului lui Huygens în modul următor:

Fie o undă plană care cade pe o suprafață plană de separare a cărei urmă în planul hîrtiei este linia  $(\Delta)$  (figura I.11.6). Direcția de propagare este dată

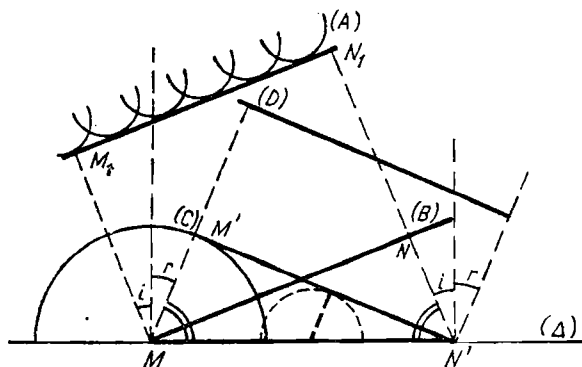


Fig. I.11.6

de perpendiculara pe frontul de undă (razele  $M_1M$  și  $N_1N$ ). Când frontul de undă ajunge în poziția (B), atinge suprafața  $(\Delta)$  în punctul  $M$  care devine sursa unor unde sferice care se propagă în același mediu. După un timp  $\Delta t$  frontul de undă atinge suprafața în  $N'$ . În acest timp frontul de undă (B) a parcurs distanța  $NN'$ , iar frontul unei sferice care a luat naștere în  $M$  este suprafața sferică de rază  $MM'$ . Deci în momentul în care punctul  $N'$  începe să oscileze, unda sferică produsă de  $M$  are raza  $MM'$  și frontul unei reflectate (C) va trece prin punctul  $N'$  (unda sferică produsă aici are raza zero) și va fi tangent la sfera de rază  $MM'$ . Unghiul dintre direcția de propagare a unei incidente și normala la suprafața  $(\Delta)$  se numește *unghi de incidență*, notat  $i$  pe fig. I.11.6, iar unghiul dintre direcția de propagare a unei reflectate și normala la suprafață — *unghi de reflexie*, notat  $r$ . Din figură se observă că

$$i = \frac{\pi}{2} - \widehat{NN'M} \text{ iar } r = \frac{\pi}{2} - \widehat{M'MN'}.$$

Deoarece propagarea unei incidente și unei reflectate are loc în același mediu  $\overline{MM'} = \overline{NN'} = v \cdot \Delta t$  și deci triunghiurile dreptunghice  $M'N'M$  și  $NN'M$  care au ipotenuza comună  $MN'$ , sînt egale. Aceasta înseamnă că un-

ghiurile  $\widehat{NN'M}$  și  $\widehat{M'MN'}$  sînt egale și deci

$$i = r, \quad (11.7)$$

adică unghiul de reflexie este egal cu cel de incidență.

Să observăm că punctele dintre  $M$  și  $N'$  atinse succesiv de frontul undei incidente devin și ele sursele unor unde sferice, care au fronturile tangente la  $M'N'$  atunci când frontul undei incidente ajunge în punctul  $N'$ . Aceasta este o consecință a faptului că viteza de propagare a tuturor acestor unde sferice este  $v$ .

Vom menționa aici că, în funcție de raportul dintre densitatea mediului în care se propagă unda și cea a mediului pe care se reflectă, fenomenul de reflexie poate avea loc în două moduri. Astfel, dacă mediul reflectant este mai dens decât cel în care se propagă unda incidentă, reflexia are loc cu schimbarea sensului elongației, unda reflectată având fază opusă față de faza undei incidente. Deoarece (vezi discuția din § 11.2) faza se schimbă în cea opusă la o distanță egală cu jumătate din lungimea de undă, o astfel de reflexie cu schimbare de semn a elongației se mai numește și reflexie cu pierdere de  $\lambda/2$ . Reflexia

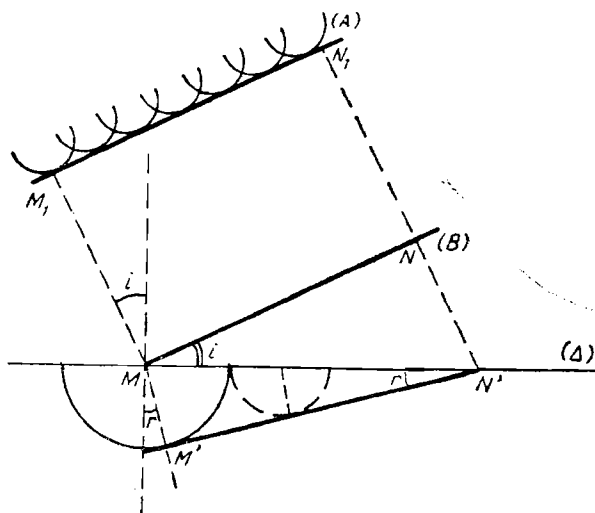


Fig. I.11.7

pe un mediu mai puțin dens nu produce schimbarea sensului elongației (unda reflectată are aceeași fază ca cea incidentă) și spunem că avem reflexie fără pierdere de  $\lambda/2$ . Demonstrarea acestor afirmații nu poate fi efectuată doar cu ajutorul principiului lui Huygens, fiind făcută în cadrul teoriei elasticității pe baza condițiilor generale care trebuie satisfăcute la suprafața de separare a două medii elastice.

O construcție analogă ne permite să obținem și legea refracției. În figura I.11.7 avem aceleași notații pentru unda incidentă. Să vedem ce se întâmplă cu unda transmisă în cel de al doilea mediu. În momentul când frontul undei incidente ajunge în punctul  $M$ , acesta devine sursa undelor sferice. După intervalul de timp  $\Delta t$  necesar frontului undei incidente să parcurgă distanța  $NN' = v\Delta t$ , frontul undei sferice, care a luat naștere în  $M$  și care se propagă în cel de al doilea mediu, este suprafața emisferică de rază  $MM' = v'\Delta t$ , unde

$v' (\neq v)$  este viteza undelor în cel de al doilea mediu. Ținând seama că viteza de propagare a tuturor undelor în mediul doi este aceeași ( $v'$ ), frontul undei refractate în momentul când unda incidentă a ajuns în punctul  $N'$ , va trece prin  $N'$  și va fi tangent la sfera de rază  $MM'$ . Notînd cu  $r$  unghiul de refracție (unghiul dintre direcția de propagare a undei refractate și normala

la suprafața de separare a celor două medii) și observînd că  $t = \widehat{MN'M'}$  și  $i = \widehat{NMN'}$  (unghiuri cu laturile perpendiculare) obținem

$$\sin r = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MN'}} = \frac{v' \Delta t}{\overline{MN'}} \text{ și } \sin i = \frac{\overline{NN'}}{\overline{MN'}} = \frac{v \Delta t}{\overline{MN'}}.$$

Raportul celor două expresii ne dă relația

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}, \quad (11.8)$$

care reprezintă legea refracției. Din această relație ca și din construcția făcută în figură se observă că unghiul de refracție este mai mic decît cel de incidență dacă  $v' < v$  și este mai mare decît cel de incidență în cazul  $v' > v$ .

## 11.5. INTERFERENȚA UNDELOR

Într-un mediu se pot propaga uneori, în același timp, mai multe unde care provin din surse diferite. În acest caz o particulă a mediului, fiind supusă concomitent acțiunii diferitelor oscilații, va efectua o mișcare care va fi rezultanta mișcărilor pe care le-ar efectua sub acțiunea separată a fiecăreia din undele care se propagă în mediu. Pentru fiecare punct al mediului va trebui să efectuăm compunerea a două sau mai multor oscilații care acționează simultan.

Ne vom ocupa de cazul foarte important în care oscilațiile surselor au frecvențe egale și diferența de fază constantă. Oscilațiile produse de astfel de surse se numesc *coerente*, iar fenomenul de suprapunere a două sau mai multor unde de aceeași frecvență se numește *interferență*.

Un mod de a obține surse coerente ar fi următorul. În fața unei surse  $O$  de la care se propagă o undă sferică punem un ecran cu două orificii punctiforme  $O_1$  și  $O_2$  așezate simetric față de sursa  $O$ . Conform principiului lui Huygens orificiile  $O_1$  și  $O_2$  acționează ca surse independente de oscilații cu aceeași frecvență (ca și sursa  $O$ ) și în fază (deoarece le-am dispus la distanță egală de  $O$ ). În spațiul delimitat de ecran se vor propaga deci două unde sferice provenind de la două surse coerente.

Să presupunem că într-un punct al mediului ajung oscilații produse de două surse coerente  $O_1$  și  $O_2$  care se propagă după aceeași direcție. Faza fiecăreia din cele două oscilații depinde de distanța ( $x$ ) de la sursa respectivă pînă la punctul considerat. Elongatiile mișcării oscilatorii imprimate punctului vor fi, conform (11.5),

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi (vt - x_1 / \lambda), \quad y_2 = A_2 \sin 2\pi (vt - x_2 / \lambda), \quad (11.9)$$

unde  $x_1$  și  $x_2$  reprezintă distanțele de la sursa  $O_1$ , respectiv  $O_2$  la punctul considerat iar  $A_1$  și  $A_2$  sînt amplitudinile oscilațiilor celor două surse. Fazele celor două mișcări oscilatorii sînt

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{x_1}{\lambda} \text{ și } \varphi_2 = 2\pi \frac{x_2}{\lambda}, \quad (11.10)$$

deci diferența de fază

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} \quad (11.11)$$

depinde de diferența de drum (diferența dintre distanțele parcurse de cele două oscilații).

Folosind mai departe ecuația (11.10) transcriem relațiile (11.9) sub forma (2.80) și putem prelua rezultatele calculelor efectuate pentru compunerea a două oscilații paralele.

În § 2.8 am arătat că amplitudinea oscilației rezultante depinde de diferența de fază  $\Delta\varphi$  dintre oscilațiile componente. Amplitudinea resultantă  $A$  avea valoarea maximă  $A = A_1 + A_2$  în cazul în care  $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) și minimă  $A = |A_1 - A_2|$  pentru  $\Delta\varphi = \pm(2k + 1)\pi$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

Deci condiția pentru ca în punctul considerat amplitudinea să aibă un maxim este

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = \pm 2k\pi,$$

adică

$$|x_1 - x_2| = k\lambda. \quad (11.12)$$

Altfel spus, amplitudinea resultantă va fi maximă în punctele pentru care diferența de drum este egală cu zero sau cu un număr întreg de  $\lambda$  (număr par de semiunde).

Dacă diferența de drum este un număr impar de semiunde,

$$|x_1 - x_2| = (2k + 1)\lambda / 2, \quad (11.13)$$

punctele respective vor corespunde unui minim al amplitudinii. Dacă amplitudinile componente sînt egale, mișcarea acestor puncte încetează (unde se „sting” reciproc), interferența avînd un caracter distructiv.

## 11.6. UNDE STAȚIONARE

Un caz particular de compunere a undelor îl constituie interferența a două unde de amplitudini egale, care se propagă în sensuri contrare, în urma căreia apar *unde staționare*.

Undele staționare se produc, în mod obișnuit, prin interferența unei incidente cu cea reflectată. Să ne ocupăm puțin de acest fenomen considerînd cazul incidenței normale. Fie deci o undă plană de amplitudine  $a$  care se

propagă de la sursa  $O$  în direcția  $OM$ , punctul  $M$  fiind pe suprafața reflectătoare (fig. I.11.8). Într-un punct oarecare  $N$  de pe dreapta  $OM$  sosesc la un moment dat două unde, cea directă (de la sursa  $O$ ) și cea reflectată în punctul  $M$ . Elongația punctelor  $N$ , sub acțiunea unei directe, este

$$y_1 = a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_1}{\lambda} \right),$$

unde  $x_1$  este distanța de la sursă la  $N$  ( $x_1 = \overline{ON}$ ). Dacă reflexia are loc fără pierdere de  $\lambda / 2$ , elongația punctului  $N$  sub acțiunea unei reflectate va fi

$$y_2 = a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_2}{\lambda} \right),$$

unde  $x_2$ , este distanța de la sursă la punctul  $M$  și înapoi la  $N$  ( $x_2 = \overline{OM} + \overline{NM}$ ). Elongația mișcării rezultante va fi

$$y = y_1 + y_2 = a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_1}{\lambda} \right) + a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_2}{\lambda} \right),$$

adică

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right).$$

Din fig. I.11.8 observăm că  $x_1 - x_2 = 2x$ , este dublul distanței de la punctul de reflexie  $M$  la punctul  $N$ , iar  $x_1 + x_2 = 2d$  este dublul distanței dintre sursă și punctul  $M$ .

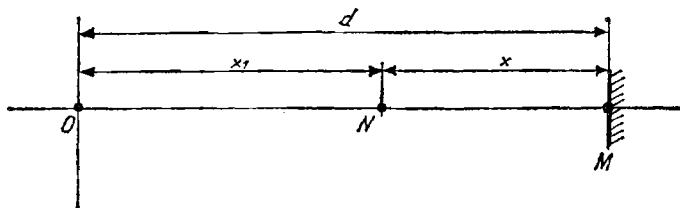


Fig. I.11.8

Relația precedentă devine

$$y = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left( vt - \frac{d}{\lambda} \right). \quad (11.14)$$

Ultima relație ne arată că toate punctele mediului oscilează cu frecvența  $\nu$  a sursei (factorul  $\sin 2\pi \left( vt - \frac{d}{\lambda} \right)$ ) însă cu amplitudini care diferă de la punct la punct (factorul  $2a \cos 2\pi x / \lambda$ ). Deoarece amplitudinea este, prin definiție, o mărime pozitivă, avem pentru oscilația rezultantă

$$A = 2a \left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|. \quad (11.15)$$



Punctele pentru care amplitudinea este maximă ( $A = 2a$ ) se numesc *ventre* și corespund valorilor lui  $x$  pentru care modulul cosinusului este unu, adică

$$2\pi x/\lambda = \pm k\pi \text{ sau } x = \pm k\lambda/2, \quad k = (0, 1, 2, \dots). \quad (11.16)$$

Distanța dintre două ventre vecine este

$$(k+1)\lambda/2 - k\lambda/2 = \lambda/2, \quad (11.17)$$

adică o semiundă. Punctele pentru care amplitudinea are valoarea minimă ( $A = 0$ ) se numesc *noduri* și corespund valorilor lui  $x$  pentru care cosinusul este zero, adică

$$2\pi x/\lambda = \pm (2k+1)\pi/2 \text{ sau } x = \pm (2k+1)\lambda/4, \quad k = (0, 1, 2, \dots). \quad (11.18)$$

Distanța între două noduri vecine este tot  $\lambda/2$ , iar distanța între un nod și ventrul cel mai apropiat este un sfert de undă

$$(2k+1)\lambda/4 - k\lambda/2 = \lambda/4. \quad (11.19)$$

Observăm că punctul  $x = 0$  corespunde unui maxim al amplitudinii deci în cazul reflexiei pe un mediu mai puțin dens (fără pierdere de semiundă) pe suprafața de separare (punctul  $A$ ) se formează un ventru al undei staționare.

În cazul reflexiei cu pierdere de semiundă, elongația punctului  $N$  sub acțiunea undei reflectate va fi

$$y_2 = a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x_2 + \lambda/2}{\lambda} \right) \quad (11.20)$$

și efectuând compunerea oscilațiilor obținem în locul relației (11.14), expresia

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left( vt - \frac{a}{\lambda} \right). \quad (11.14')$$

Punctele mediului oscilează și în acest caz cu frecvența sursei, dar cu amplitudini care diferă de la punct la punct, date de relația

$$A = 2a \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|. \quad (11.15')$$

Deoarece sinusul are maxime și minime acolo unde cosinusul are minime și respectiv maxime, nodurile undei staționare vor fi date, în acest caz, de relațiile (11.16) iar ventrele de relațiile (11.18). Observăm că acum suprafața reflectătoare corespunde unui nod al undei staționare. Acesta ne permite să înțelegem de ce reflexia pe un mediu mai dens decât cel în care se propagă unda incidentă se face cu pierdere de semiundă. Dacă presupunem de exemplu că punctul  $M$  se află pe un perete rigid (suprafața reflectătoare) amplitudinea rezultantă a acestui punct trebuie să fie nulă, adică unda staționară să aibă aici un nod. Aceasta corespunde relației (11.15') adică în cazul în care unda reflectată este dată de (11.20).

În încheiere, să observăm că faza undelor staționare nu este aceeași în toate punctele mediului așa cum ar rezulta, la prima vedere, considerând doar factorii  $\sin 2\pi (vt - d/\lambda)$  sau  $\cos 2\pi (vt - d/\lambda)$  din expresia elongației rezul-

tante. Într-adevăr, factorii  $\cos 2\pi x/\lambda$  din (11.14), respectiv  $\sin 2\pi x/\lambda$  din (11.14'), care determină amplitudinea, își schimbă semnul la trecerea prin nod. Aceasta înseamnă că dacă într-o parte a nodului elongația este pozitivă, în cealaltă parte în același moment va fi negativă.

## 11.7. ENERGIA UNDELOR

Deoarece unda elastică este o propagare a mișcării, ea se caracterizează și printr-un transport de energie. Pentru a găsi această energie vom considera o undă plană longitudinală care se propagă în lungul axei  $Ox$  și o porțiune a mediului de volum  $\Delta V = l\Delta S$  (latura  $l$  a paralelipipedului fiind așezată în lungul direcției de propagare (fig. 1.11.9)). Energia acestei porțiuni de mediu

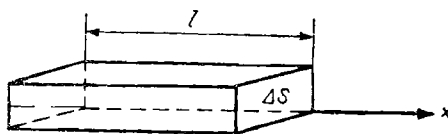


Fig. 1.11.9

prin care se propagă unda este dată de suma energiei cinetice  $\Delta W_c$  și potențiale  $\Delta W_p$ . Energia cinetică este

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} \Delta m v_p^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V v_p^2,$$

unde  $\Delta m$  este masa porțiunii de mediu de volum  $\Delta V$ ,  $\rho$  densitatea mediului iar  $v_p$  viteza particulelor sale. Dacă  $l$  este suficient de mic, folosind ecuația (11.5) avem

$$v_p = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

și deci expresia energiei cinetice devine

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (11.21)$$

Energia potențială este tocmai energia deformației elastice a corpului de lungime  $l$  și suprafață  $\Delta S$ , pe care am dedus-o în § 7.3:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \frac{E\Delta S}{l} \Delta l^2 = \frac{1}{2} E\Delta V \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2$$

Alungirea relativă  $\frac{\Delta l}{l}$  este dată de  $\frac{dy}{dx}$ , unde  $dy$  este deplasarea relativă a

particulelor din mediu care se află la distanța  $dx$  una de alta. Folosind din nou (11.5) obținem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A\omega}{v} \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

iar  $\Delta W_p$  devine

$$\Delta W_p = \frac{1}{2v^2} E \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Ținând seama de relația (11.1) avem  $1/v^2 = \rho/E$  și expresia energiei potențiale mai poate fi scrisă

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \Delta W_c. \quad (11.22)$$

Energia totală  $\Delta W$  a elementului de volum  $\Delta V$ , reprezentând energia porțiunii de undă cuprinsă în acest element de volum,

$$\Delta W = \Delta W_c + \Delta W_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad (11.23)$$

este proporțională deci cu densitatea mediului, cu pătratul amplitudinii și cu pătratul frecvenței undei.

Vom observa în continuare că bilanțul energetic în cazul unei porțiuni de undă este cu totul altul decât în cazul oscilației unui punct material izolat. Pentru punctul izolat, energia totală rămâne constantă, energia cinetică fiind maximă atunci când cea potențială este minimă și invers. Relațiile (11.23), (11.22) ne arată că energia totală a porțiunii de mediu nu mai este constantă, energia cinetică și potențială luând valorile maxime și respectiv minime în același moment. Aceasta se datorește faptului că, deoarece fiecare element al mediului este legat de mediul înconjurător, energia poate să treacă dintr-o porțiune a mediului în alta.

Se mai folosește și noțiunea de densitate de energie care este definită ca energia din unitatea de volum:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (11.24)$$

Deoarece densitatea de energie, ca și energia, este o mărime variabilă în timp, este mai util să folosim valoarea sa medie  $\tilde{w}$  într-o perioadă:

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (11.25)$$

deoarece valoarea medie a pătratului cosinusului într-o perioadă este  $1/2^*$ .

Această relație ne arată că densitatea medie de energie pentru un mediu omogen are aceeași valoare indiferent de punctul din mediu considerat. În realitate, din cauza viscozității care există în orice mediu mecanic, apare fenomenul de absorbție în mediu. O parte din energia mecanică a mișcării

---

\*  $\overline{\cos^2 \omega(t - x/v)} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega(t - x/v) dt = \frac{1}{2}.$

oscilatorii se pierde transformându-se în alte forme de energie. Din relația (11.25) rezultă că scăderea energiei (mediul fiind omogen,  $\rho = \text{const.}$ ) înseamnă micșorarea amplitudinii oscilațiilor. Legea de scădere a amplitudinii se poate deduce presupunând că micșorarea relativă  $-dA/A$  a amplitudinii unei unde care străbate un strat de grosime  $dx$  este proporțională cu această grosime, adică

$$-dA/A = \kappa dx$$

unde pentru un mediu omogen  $\kappa$  este o constantă care depinde de natura mediului. Integrând această ecuație diferențială obținem

$$\ln A = -\kappa x + C$$

și cum pentru  $x = 0$  amplitudinea trebuie să fie egală cu cea a oscilațiilor sursei  $A_0$ , rezultă valoarea constantei  $C$ ,  $C = \ln A_0$ . Introducând valoarea lui  $C$  se obține

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\kappa x \quad \text{sau} \quad A = A_0 e^{-\kappa x}. \quad (11.26)$$

Relația (11.26) ne arată că în cazul unui mediu absorbant ecuația undei plane nu va mai fi (11.5) ci

$$y = A_0 e^{-\kappa x} \sin \omega (t - x/v). \quad (11.27)$$

Notînd cu  $\tilde{w}_0$  densitatea medie de energie pentru  $x = 0$ , din (11.25) și (11.26) obținem

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0 e^{-2\kappa x} = \tilde{w}_0 e^{-kx}, \quad (11.28)$$

unde  $k$  se numește coeficient de absorbție.

## 11.8. EFECTUL DOPPLER-FIZEAU

După cum am arătat în § 11.1, particulele mediului prin care se propagă unda oscilează cu aceeași frecvență ca și frecvența proprie a sursei de oscilații. Aceasta înseamnă că un aparat (observator) plasat la o distanță oarecare de sursă înregistrează în unitatea de timp același număr de oscilații cu cel al sursei. Ce se întâmplă însă dacă sursa sau observatorul se deplasează unul față de celălalt? În 1842, Doppler a stabilit că frecvența determinată de observator se schimbă atunci cînd observatorul sau sursa sînt în mișcare. Acest fenomen a fost studiat și de Buys-Ballot în domeniul acusticii, iar de Fizeau în cazul undelor luminoase.

Fenomenul de modificare a frecvenței percepute de observator, față de frecvența proprie a sursei, în funcție de viteza de deplasare a sursei sau observatorului poartă numele de *efect Doppler-Fizeau*.

Să studiem pe rînd diferitele cazuri posibile presupunînd că mișcarea sursei sau observatorului are loc în lungul dreptei care unește sursa cu observatorul.

În primul rînd să considerăm că sursa de oscilații  $O$  se mișcă față de aparatul  $A$  cu viteza constantă  $u_1$ , apropiindu-se de acesta (fig. I.11.10a). Să notăm cu  $t$  momentul în care în  $O$  a început o oscilație care pleacă spre  $A$ . Aceasta ajunge în  $A$  la momentul

$$t_1 = t + \frac{\overline{OA}}{v},$$

î fiind viteza de propagare a oscilațiilor. O a doua oscilație a sursei începe în momentul  $t + T$  însă se va produce în punctul  $O_1$  în care a ajuns sursa între timp. Această oscilație va sosi în  $A$  la momentul

$$t_2 = t + T + \frac{\overline{OA} - \overline{OO_1}}{v} = t + T + \frac{\overline{OA} - u_1 T}{v},$$

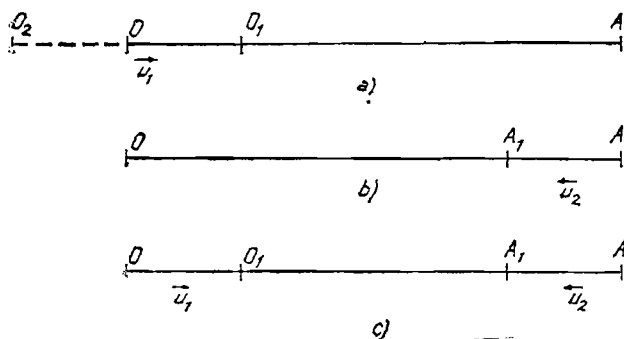


Fig. I.11.10

deoarece distanța  $\overline{OO_1}$  a fost parcursă de sursă în timpul  $T$  cu viteza  $u_1$ . Intervalul de timp  $t_2 - t_1$  între sosirea primei și a celei de a doua oscilații în  $A$  este tocmai perioada aparentă  $T'$  observată în  $A$ , deci

$$T' = t_2 - t_1 = T - u_1 \frac{T}{v} = \frac{v - u_1}{v} T. \quad (11.29)$$

Ținînd seama de relațiile între frecvență, perioadă și lungime de undă mai putem scrie

$$\nu' = \frac{v}{v - u_1} \nu \quad \text{și} \quad \lambda' = \frac{v - u_1}{v} \lambda. \quad (11.29')$$

În cazul în care sursa se depărtează de observator, distanța parcursă de a doua oscilație este mai lungă decît cea parcursă de prima, fiind  $\overline{O_2A} = \overline{OA} + \overline{OO_2} = \overline{OA} + u_1 T$ . Revăzînd calculele făcute anterior vedem că putem folosi formulele (11.29, 11.29') pentru ambele situații cu condiția de a lua  $u_1 > 0$  dacă sursa se apropie de observator și  $u_1 < 0$  dacă se depărtează.

Din (11.29') rezultă deci că frecvența percepută de observator este mai mare decît frecvența proprie a sursei dacă aceasta se apropie de aparat și mai mică în cazul contrar.

Să considerăm acum cazul în care observatorul  $A$  se mișcă spre sursa  $O$  cu viteza constantă  $u_2$  (fig. I. 11. 10b). Oscilația care a plecat din  $O$  la momen-

tul  $t$  va ajunge la observatorul  $A$  la momentul  $t_1 = t + \overline{OA}/v$ . Cea care a plecat la momentul  $t + T$  va întâlni aparatul deplasat în poziția  $A_1$  la momentul

$$t_2 = t + T + \frac{\overline{OA} - \overline{AA_1}}{v}.$$

Distanța  $\overline{AA_1}$  a fost parcursă de aparat tocmai în intervalul de timp  $t_2 - t_1$  care reprezintă din nou perioada aparentă  $T'$  percepută de observator. Vom avea deci  $\overline{AA_1} = (t_2 - t_1)u_2 = T'u_2$  de unde rezultă  $T' = t_2 - t_1 = T - u_2 T'/v$  sau

$$T' = \frac{v}{v + u_2} T \quad (11.30)$$

și mai departe

$$v' = \frac{v + u_2}{v} v \quad \text{și} \quad \lambda' = \frac{v}{v + u_2} \lambda. \quad (11.30')$$

Și aceste relații pot fi folosite atât în cazul în care observatorul se apropie de sursă cât și în cazul contrar, cu convenția  $u_2 > 0$  în prima situație și  $u_2 < 0$  în cea de a doua.

În sfârșit, să considerăm acum cazul general în care sursa  $O$  și aparatul  $A$  se mișcă unul spre celălalt cu vitezele  $u_1$  și respectiv  $u_2$  (fig. I.11.10c). Oscilația produsă în  $O$  la momentul  $t$  sosește la aparat la momentul  $t_1 = t + \overline{OA}/v$ . Oscilația produsă de momentul  $t + T$  va pleca din punctul  $O_1$  (pînă la care s-a deplasat sursa în timpul  $T$ ) și va întâlni aparatul în punctul  $A_1$  la momentul

$$t_2 = t + T + \frac{\overline{OA} - \overline{OO_1} - \overline{AA_1}}{v}.$$

Perioada aparentă  $T'$  va fi deci

$$T' = t_2 - t_1 = T - \frac{\overline{OO_1}}{v} - \frac{\overline{AA_1}}{v}$$

și ținînd seama că  $\overline{OO_1} = u_1 T$  iar  $\overline{AA_1} = u_2 T'$  putem scrie

$$T' = T - u_1 T/v - u_2 T'/v.$$

Rezultatul final va fi deci

$$T' = \frac{v - u_1}{v + u_2} T \quad (11.31)$$

și mai departe

$$v' = \frac{v + u_2}{v - u_1} v \quad \text{și} \quad \lambda' = \frac{v - u_1}{v + u_2} \lambda. \quad (11.31')$$

Convențiile de semne pentru  $u_1$  și  $u_2$  vor fi cele date mai înainte. În plus se vede imediat că relațiile (11.29) și (11.30) sînt cazuri particulare ale relațiilor generale (11.31).

Dacă aparatul se mișcă pe o direcție perpendiculară pe dreapta care unește sursa cu aparatul (de exemplu pe o circumferință avînd centrul în punctul în care se găsește sursa) frecvența percepută este aceeași cu frecvența proprie a sursei. Aceasta rezultă imediat din faptul că distanța dintre sursă și observator rămîne constantă în timp. La aceeași concluzie ajungem și în cazul în care sursa se mișcă pe o circumferință în jurul observatorului. În consecință, dacă vitezele  $u_1$  și  $u_2$  nu sînt îndreptate după dreapta care unește aparatul cu sursa, în formulele anterioare trebuie introduse componentele lor în lungul acestei drepte.

## 12. Acustica

### 12.1. PRODUCEREA ȘI PROPAGAREA SUNETELOR

Vibrațiile corpurilor materiale se propagă prin aer (și în general prin orice alt gaz) și ajungând la ureche produc senzația auditivă, pe care o numim *sunet*. Trebuie să menționăm însă că nu toate oscilațiile recepționate de ureche sînt percepute auditiv. Obiectul acusticii îl constituie studiul producerii și propagării sunetelor înglobînd aici nu numai vibrațiile auditive ci și pe cele care nu produc senzație auditivă, cum ar fi ultrasunetele.

După cum am văzut în capitolul anterior, vibrațiile produse într-un punct al unui mediu elastic se propagă în acel mediu din aproape în aproape sub formă de unde. În aer (ca și în orice alt gaz) sau în lichide avem de-a face cu unde longitudinale. Undele sonore fiind oscilații ale mediului, produse de vibrațiile unor corpuri materiale vor avea proprietățile undelor elastice. Astfel, după cum am arătat, viteza de propagare va fi  $v = \sqrt{E/\rho}$ . În cazul gazelor această relație devine

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (12.1)$$

unde  $M$  este masa unui mol de gaz,  $T$  — temperatura absolută,  $R$  — constanta gazelor, iar  $\gamma$  este raportul dintre căldura specifică a gazului la presiunea constantă și respectiv la volum constant ( $\gamma = C_p/C_v$ )\*. Această relație numită formula lui Laplace, ne arată că viteza de propagare a undelor sonore este proporțională cu rădăcina pătrată a temperaturii  $T$  și nu depinde de presiunea gazului. În realitate în afară de temperatură mai există și alți factori care influențează viteza de propagare a sunetului și care nu au fost luați în considerare în deducerea formulei (11.1). Astfel de factori sînt umiditatea aerului (viteza e mai mare în aerul umed decît în cel uscat), ionizarea aerului care duce la creșterea vitezei, curenții de aer precum și intensitatea sunetului.

Deoarece ne interesează îndeosebi propagarea sunetelor în aer, nu mai dăm formulele pentru viteza de propagare în alte medii prezentînd un tabel cu valorile vitezei pentru unele medii\*\* (pentru gaze și lichide este indicată și temperatura):

---

\* Semnificația mărimilor notate aici va fi discutată în II § 4.3 c.

\*\* Așa cum desigur cititorul știe, sunetele fiind vibrații ale particulelor materiale ale mediului, nu se pot propaga în vid unde nu există substanță.

TABELUL 1.5

Substanța	$v(\text{m/s})$	Temperatura (°C)	Substanța	$v(\text{m/s})$
Aer	331,8	0	Aluminiu	5 104
Bioxid de carbon	259	0	Fier	5 000
Hidrogen	1 261	0	Plumb	1 320
Apă curată	1 440	15	Lemn de brad	500
Apă de mare	1 503	15	Cupru	3 600
			Cauciuc	cca 50

Cînd izvorul sonor (presupus punctiform) este în repaus, undele sonore care pornesc din acest punct sînt unde sferice, fronturile de undă fiind suprafețe sferice concentrice. În cazul în care sursa sonoră se mișcă (să presupunem rectiliniu), centrele suprafețelor sferice se vor găsi pe linia care reprezintă traiectoria sursei. În funcție de viteza sursei în raport cu viteza de propagare a sunetului — avem trei situații:

a) **Viteza sursei sonore ( $u$ ) mai mică decît viteza ( $v$ ) a sunetului.** Undele sonore se înconjoară una pe alta fără să se întretaie, însă nu mai au același centru, îngrămădindu-se în direcția în care se mișcă sursa (fig. 1.12.1a). După cum se vede, punctul  $A$  spre care se îndreaptă izvorul sonor este străbătut de un număr mai mare de unde în unitatea de timp (frecvența crește — efectul Doppler-Fizeau). Situația este inversată pentru punctul  $B$  față de care izvorul se depărtează:

b) **Viteza sursei sonore ( $u$ ) este egală cu viteza sunetului ( $v$ ).** Undele sferice se ating în fiecare moment într-un punct comun  $O_6$  care este punctul în care se găsește sursa în acel moment (fig. 1.12.1b). Un observator așezat în direcția spre care se mișcă sursa primește deodată toate undele sub forma unui pocnet.

c) **Viteza sursei sonore ( $u$ ) mai mare ca viteza ( $v$ ) a sunetului.** În acest caz undele sferice se întretaie. Înfașurătoarea acestor unde este un con cu vîrfurile

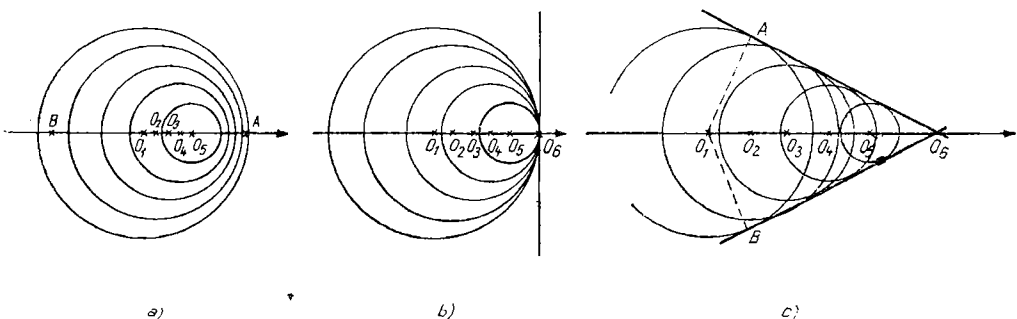


Fig. 1.12.1



în punctul în care se găsește sursa în momentul respectiv (fig. I.12.1c). Unghiul  $\varphi$  dintre generatoarea conului ( $\overline{AO_6}$ ) și direcția de deplasare a sursei ( $\overline{O_1O_6}$ ) este dat de relația

$$\sin \varphi = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1O_6}} = \frac{v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{v}{u}. \quad (12.2)$$

( $\Delta t$  este timpul în care sursa s-a deplasat de la  $O_1$  la  $O_6$  și respectiv unda sonoră excitată în  $O_1$  s-a propagat pe distanța  $\overline{O_1A}$ ). Situația apare ca și cum sursa sonoră ar trage după ea undele sonore. Un observator situat în partea înspre care înaintează sursa va primi undele sonore în ordine inversă în raport cu cea în care au fost produse.

Corpurile care se mișcă cu o viteză mai mare decât viteza sunetului (supersonice) produc, prin comprimarea aerului în direcția de înaintare, o undă care nu are caracter periodic, reprezentînd doar un domeniu de comprimare care se propagă cu viteza sunetului. O astfel de undă se numește *undă de șoc* sau *undă balistică*. Ele provoacă senzația unui șoc puternic. Aceste unde apar, de exemplu, în cazul mișcării proiectilelor sau al avioanelor cu reacție.

În încheierea acestui paragraf menționăm că deoarece undele sonore sînt unde elastice, și în cazul propagării sunetelor apar fenomenele caracteristice undelor ca reflexia, refracția, interferența, difracția. Unele din aceste fenomene, mai ales din punct de vedere al particularităților prezentate de sunete, vor fi discutate în paragrafele următoare.

## 12.2. CALITĂȚILE SUNETULUI

Sunetele pot fi caracterizate prin trei calități principale: înălțime, intensitate și timbru.

a) **Înălțimea sunetului** este proprietatea sa de a fi mai profund (grav) sau mai acut (ascuțit, subțire). Experimental s-a constatat că înălțimea sunetului depinde de frecvența oscilațiilor sonore. Astfel urechea apreciază două sunete ca avînd aceeași înălțime (sînt la unison) dacă au aceeași frecvență, iar în cazul în care au frecvențe diferite este mai înalt (acut) cel care are frecvența mai mare. Din această cauză înălțimea sunetului se exprimă numeric prin frecvența undei sonore.

Să observăm aici că vibrațiile libere ale corpurilor materiale au loc, în general, cu diferite pulsații proprii, spre deosebire de cazul oscilațiilor punctului material în care aveam o singură frecvență de vibrație determinată de masa punctului și constanta forței elastice ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , vezi § 3.10). Astfel, un corp material care vibrează va produce sunete de diferite înălțimi, de frecvențe bine determinate pentru fiecare corp. Sunetul emis de corp care are frecvența cea mai mică se numește *sunet fundamental*, iar cele corespunzătoare unor frecvențe egale cu multiplii întregi ai frecvenței sunetului fundamental se numesc *armonice superioare*.

În natură se întîlnesc foarte rar sunete „curate” care să aibă o frecvență bine determinată, sunetele naturale fiind de fapt compuse din sunete de diferite frecvențe.

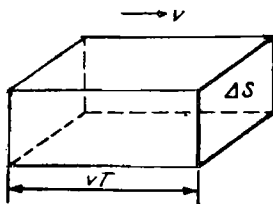


Fig. I.12.2

b) **Intensitatea sau tăria sunetului** într-un anumit punct din spațiu este determinată de cantitatea de energie pe care o transportă unda sonoră în unitatea de timp prin unitatea de suprafață așezată în acel punct, perpendicular pe direcția de propagare. Pentru a vedea care sînt mărimile de care depinde intensitatea, să considerăm un paralelipiped de secțiune  $\Delta S$ , perpendicular pe direcția de propagare a undei și de lungime  $vT$  (fig. I.12.2). Suprafața  $\Delta S$  va fi străbătută într-o perioadă  $T$  de energia medie  $\tilde{W}$  a undei sonore care se găsește în paralelipipedul considerat

$$\tilde{W} = \tilde{w} \cdot \Delta S \cdot vT, \quad (12.3)$$

unde  $\tilde{w}$  este dat de (11.25). Intensitatea va fi deci

$$I = \frac{\tilde{W}}{\Delta S \cdot T} = \tilde{w} \cdot v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v$$

sau

$$I = 2\pi^2 \rho A^2 v^2 \nu. \quad (12.4)$$

Se vede că intensitatea sunetului depinde atât de mărimi care caracterizează oscilația sonoră ( $A$ ,  $\nu$ ) cît și de mărimi care caracterizează mediul ( $\rho$ ,  $v$ ).

În cazul undei plane amplitudinea oscilației nu depinde de distanța de la izvorul sonor și în consecință intensitatea va fi aceeași în orice punct. Dacă însă sunetul se propagă prin unde sferice, amplitudinea scade invers proporțional cu pătratul distanței de la sursa sonoră și deci și intensitatea scade la fel. Pentru a înțelege aceasta să considerăm cantitatea de energie care străbate într-o perioadă o suprafață sferică de rază  $r$ , cu centrul în punctul în care se găsește sursa sonoră. Dacă considerăm propagarea într-un mediu omogen, fără absorbție, aceasta va fi, conform (12.3) și (11.25):

$$\tilde{W} = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho vT.$$

După un timp  $t + T$  frontul de undă va ajunge la distanța  $r_1 = r + vt$ , însă în timp de o perioadă suprafața sferei de rază  $r_1$  trebuie să fie străbătută de aceeași cantitate de energie, presupunînd că nu există absorbție în mediu. Deoarece  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $v$  și  $T$  sînt aceleași în toate punctele mediului, rezultă că amplitudinea trebuie să scadă invers proporțional cu distanța de la sursa sonoră, adică  $A = A_0/r$  unde  $A_0$  este amplitudinea oscilațiilor sursei. Pentru unda sferică putem deci scrie

$$I = I_0/r^2 \quad \text{cu} \quad I_0 = 2\pi^2 \rho A_0^2 v^2 \nu, \quad (12.4')$$

adică intensitatea undelor sonore sferice scade invers proporțional cu pătratul distanței de la sursă.

c) **Timbrul.** Între sunetele de aceeași intensitate și înălțime emise de instrumente diferite există o deosebire calitativă pe care o numim timbrul sunetului. Această deosebire este legată de faptul că un corp material emite în afara sunetului fundamental și o serie de sunete de frecvențe superioare, însă de intensități mult mai mici decât a celui fundamental. Timbrul este determinat tocmai de aceste sunete superioare care însoțesc sunetul fundamental. Experiența arată că timbrul sursei sonore depinde de numărul, înălțimea și intensitatea sunetelor superioare, dar nu depinde de diferența de fază dintre aceste vibrații. Asupra modului în care apar sunetele superioare și legătura cu timbrul instrumentelor muzicale vom reveni în § 12.6 (surse sonore).

### 12.3. PERCEPEREA SUNETELOR

Perceperea sunetelor de către om se realizează prin intermediul urechii. Descrierea anatomică a urechii și mecanismul audierii pot fi găsite de cititor în orice manual de anatomie. Aici vom menționa doar că vibrațiile auditive sînt transmise prin intermediul diferitelor părți ale urechii făcînd să vibreze așa-numitele fibre ale lui Corti. Sub acțiunea unui sunet de înălțime (frecvență) dată vibrează anumite fibre excitînd terminațiile corespunzătoare ale nervului auditiv care, la rîndul său, transmite excitația la creier.

În continuare ne vom ocupa de condițiile pe care trebuie să le îndeplinească o vibrație acustică pentru a fi percepută ca sunet, adică să discutăm limitele de audibilitate. Se constată că frecvența sunetelor audibile este cuprinsă aproximativ între 16 Hz și 20 000 Hz. Aceste limite variază însă de la persoană la persoană și în general cu vîrsta. Astfel, la o aceeași persoană limita superioară scade cu vîrsta. Vibrațiile de frecvență mai mică decât 16 Hz se numesc *infrasunete*, iar cele de frecvență mai mare decât 20 000 Hz se numesc *ultrasunete*.

Se constată de asemenea că și intensitatea sunetelor audibile este cuprinsă între anumite limite și anume, aproximativ între  $4 \cdot 10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup> și  $2 \cdot 10^{-2}$  W/cm<sup>2</sup>. Intensitatea minimă care excită senzația auditivă se numește *prag de audibilitate*. Dacă intensitatea sunetelor crește foarte mult, în ureche apare o senzație de presiune și apoi de durere. Intensitatea maximă peste care apare această senzație se numește *prag tactil* sau *pragul senzației de durere*. Limitele de intensitate depind de frecvența sunetului. Astfel se constată că pentru frecvențe cuprinse între cca 1000 Hz și 3000 Hz urechea este cea mai sensibilă, pragul de audibilitate este cel mai jos atîngînd valori de ordinul  $10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup>. Pentru frecvențe mai joase sau mai înalte urechea este mai puțin sensibilă, pragul de audibilitate fiind mai ridicat. În fig. I.12.3 sînt reprezentate schematic pragul de audibilitate și pragul senzației de durere (curbele pline). Regiunea dintre cele două curbe reprezintă suprafața intensităților audibile sau suprafața de audibilitate.

Intensitatea senzației auditive (intensitatea subiectivă a sunetului) nu este proporțională cu intensitatea sunetului fizic pe care am definit-o mai înainte. În general, pentru un sunet de o frecvență dată senzația auditivă crește (de la pragul de audibilitate) rapid cu creșterea intensității și apoi cînd ne apropiem de pragul senzației de durere intensitatea trebuie să crească foarte mult pentru ca urechea să perceapă o diferență. De fapt intensitatea subiectivă a sunetului nu poate fi măsurată cantitativ exact. O evaluare aproximativă este dată

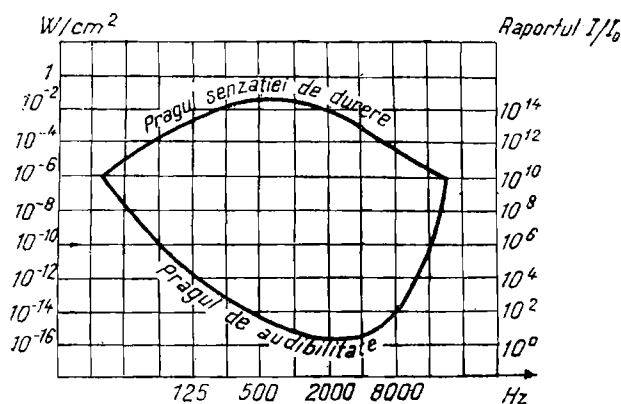


Fig. I.12.3

de legea psiho-fizică formulată de Weber și Fechner. Conform acestei legi, diferența dintre senzațiile auditive produse de două sunete este proporțională cu logaritmul raportului intensităților celor două sunete:

$$S_2 - S_1 = K \log I_2/I_1.$$

În această relație  $S_i$  reprezintă senzația auditivă (sau nivelul intensității sunetelor) produsă de sunetul de intensitate  $I_i$ . Deși ipotezele pe baza căreia s-a dedus această relație nu sînt exact satisfăcute, ea este foarte importantă deoarece sistemul de măsură a intensităților sonore (scara nivelelor de intensitate a sunetelor) se bazează pe această lege.

Dacă luăm ca nivel zero (senzația auditivă  $S_0 = 0$ ) pragul de audibilitate  $I_0$ ,  $I_0 = 10^{-16} \text{ W/cm}^2$ \*, nivelul intensității sunetului este dat de relația

$$S = K \log (I/I_0). \quad (12.5)$$

Dacă se ia  $K = 1$ , unitatea de măsură pentru nivelul intensității sonore se numește bel, iar dacă se ia  $K = 10$ , decibel (dbel). Unei intensități  $I = 10 I_0$  îi corespunde un nivel  $S = 10 \text{ dbel}$ , pentru  $I = 100 I_0$  avem  $S = 20 \text{ dbel}$  iar pentru o intensitate apropiată de pragul senzației de durere  $I = 10^{14} I_0$  (vezi fig. I.12.3) avem valoarea  $S = 140 \text{ dbel}$ .

În tabelul I.6 dăm nivelele intensității sunetelor pentru cîteva sunete obișnuite; valorile intensităților se referă la sunetul de 1000 Hz. Pentru a percepe o vibrație ca sunet, în afara condițiilor de frecvență și intensitate mai există și o condiție de durată. Astfel, pentru ca un om obișnuit să perceapă bine înălțimea unui sunet trebuie ca urechea sa să primească unde sonore cel puțin timp de aproximativ o sutime de secundă, adică cel puțin 5 vibrații pentru un sunet de 500 Hz, 10 vibrații pentru 1000 Hz, etc. Este evident că după mult exercițiu această limită coboară sensibil ajungînd, de exemplu, la două vibrații pentru a percepe destul de corect înălțimea unui sunet între 40 Hz și 3000 Hz.

\* Valoarea care s-a ales pentru  $I_0$  corespunde unui nivel puțin inferior pragului de audibilitate pentru 1000 Hz.

TABELUL 1.6

Sunet	Nivelul, decibeli	Intensitate sunet, W/cm <sup>2</sup>
Freemătul frunzelor	10	10 <sup>-15</sup>
Șoapte	30	10 <sup>-13</sup>
Pași, ruperea hirtiei	40	10 <sup>-12</sup>
Vorbirea obișnuită	50	10 <sup>-11</sup>
Vorbirea puternică	60	10 <sup>-10</sup>
Zgomotul străzii	70	10 <sup>-9</sup>
Zgomot de motor de avion (3 m depărtare)	130	10 <sup>-3</sup>

Din punctul de vedere al senzației auditive pe care o produc, sunetele pot fi împărțite în trei clase: sunete muzicale (simple sau compuse), zgomote și pocnete. Se arată experimental că sunetele muzicale sînt produse de mișcări periodice, zgomotele — de mișcări neregulate, iar pocnetul este rezultatul lovirii urechii de o variație bruscă și scurtă a presiunii aerului.

Pentru a caracteriza diferența între două sunete se introduce noțiunea de *interval*, care reprezintă raportul dintre frecvențele celor două sunete  $\nu_1/\nu_2$ . Dacă acest raport este egal cu raportul anumitor numere întregi avem un *interval muzical*. Astfel, principalele intervale muzicale sînt: unisonul (pentru  $\nu_1/\nu_2 = 1/1$ ), secunda ( $\nu_1/\nu_2 = 9/8$ ), terța ( $\nu_1/\nu_2 = 5/4$ ), cvarta ( $\nu_1/\nu_2 = 4/3$ ), cvinta ( $\nu_1/\nu_2 = 3/2$ ), sexta ( $\nu_1/\nu_2 = 5/3$ ), septima ( $\nu_1/\nu_2 = 15/8$ ) și octava ( $\nu_1/\nu_2 = 2/1$ ). Se mai fololesc și intervalele complementare: secunda minoră ( $\nu_1/\nu_2 = 16/15$ ) și terța minoră ( $\nu_1/\nu_2 = 6/5$ )\*.

Două sau mai multe sunete produse simultan, separate prin intervale muzicale, formează un *acord*. Senzația auditivă pe care o produc poate fi mai mult sau mai puțin plăcută. În funcție de aceasta, acordul se numește consonant sau disonant. Cele mai consonante acorduri sînt cele de octavă, terță majoră și cvintă, iar disonante cele de cvartă, sextă, secundă și septimă. În general acordul este cu atît mai consonant cu cît numerele care definesc raportul  $\nu_1/\nu_2$  sînt mai mici. Trei sunete formează un *acord perfect* dacă ultimele două sînt separate de primul (sunet fundamental) printr-o terță și respectiv o cvintă. Avem acord perfect major dacă terța este majoră (luînd pentru primul sunet unitatea, rapoartele sînt: 1, 5/4, 3/2) și acordul perfect minor (1, 6/5, 3/2).

Fără a insista asupra unor amănunte legate de teoria muzicii mai menționăm doar noțiunea de *scară muzicală*, care reprezintă o serie de sunete separate prin intervale muzicale. Sunetele din scara muzicală se reproduc periodic prin serii de cîte șapte sunete, fiecare serie fiind numită *gamă*. Cele șapte sunete care formează o gamă se numesc note și au denumirile cunoscute: do, re, mi, fa, sol, la, si. Raportul frecvențelor luînd pentru do unitatea este:

note:	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
raportul								
frecvențelor:	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
interval								
succesiv:		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Intervalul 9/8 se numește ton major, 10/9 — ton minor, iar 16/15 — semiton major.

\* Secunda și terța ca interval principal se mai numesc din această cauză — majore.

Pentru a ne situa într-o anumită gamă trebuie precizată frecvența sunetului corespunzător unei anumite note. De obicei este dată frecvența notei *la* (pentru obținerea acesteia se construiesc surse sonore de frecvență fixă cum sînt diapazoanele). De exemplu, sunetul notei  $la_1$  dat de cea de a șasea clapă din claviatura pianului, de la stînga la dreapta, are frecvența de 440 Hz. Acesta este luat de obicei ca bază de comparație pentru înălțimea sunetelor.

## 12.4. REFLEXIA SUNETELOR

Ajunghind la suprafața de separare dintre două medii, unda sonoră, ca orice undă elastică, este parțial reflectată, o altă parte fiind transmisă în cel de al doilea mediu. În acest fel intensitatea sunetelor reflectate este de obicei mai mică decît a sunetului incident. Legile reflexiei sunetelor sînt cele discutate în § 11.4.

Un fenomen natural foarte cunoscut, consecință a reflexiei sunetului, este *ecoul*. Acesta constă în faptul că producînd un sunet de durată scurtă în fața unui obstacol (perete, deal etc.), în anumite condiții se aude și sunetul reflectat de obstacol. Pentru ca sunetul reflectat să fie perceput distinct (ca ecou) el trebuie să ajungă la ureche după ce a încetat perceperea sunetului inițial.

Senzația auditivă produsă de sunetul inițial persistă în ureche cel puțin o zecime de secundă, astfel că sunetul reflectat va fi perceput ca ecou doar dacă ajunge la ureche după un interval de cel puțin  $1/10$  secunde față de primul. Pentru un sunet foarte scurt distanța pînă la obstacol trebuie să fie deci de cel puțin 17 m, deoarece sunetul care are viteza în aer de cca 340 m/s va parcurge distanța de 34 m (sursă — obstacol și înapoi) în aproximativ o zecime de secundă. Pentru sunete articulate distanța trebuie să fie cel puțin dublă. Astfel, vorbind în fața unui perete reflectător situat la 34 m distanță, ecoul va repeta ultima silabă, din care cauză se numește *ecou monosilabic*. Dacă distanța este de 68 m sau 102 m ecoul va fi disilabic sau trisilabic repetînd ultimele două, respectiv trei silabe. În cazul a doi pereți situați față în față se poate obține fenomenul de *ecou multiplu*, produs de reflexia succesivă pe fiecare din cei doi pereți reflectători. Se poate aminti aici castelul Simonetta de lîngă Milano unde un cuvînt pronunțat între cele două aripi ale clădirii este repetat de 40 de ori. Fenomenul de ecou are o serie de aplicații importante precum măsurarea adîncimii mărilor, descoperirea submarinelor în imersiune sau a unor mari bancuri de pește. Adîncimea mării se determină, de exemplu, măsurînd timpul după care sunetul produs pe un vas la suprafața mării se reîntoarce sub formă de ecou în urma reflexiei pe fundul mării.

În cazul cînd distanța la peretele reflectător este mai mică decît distanța minimă pentru producerea ecoului, sunetul reflectat va sosi înainte de încetarea senzației auditive a sunetului direct producînd o prelungire și o întărire a acestuia. Fenomenul poartă numele de *reverberație*. Dacă sunetul reflectat este perceput aproape concomitent cu cel direct, fenomenul de reverberație devine foarte util deoarece produce o întărire a senzației auditive fără a produce și deformarea (distorsionarea) sunetului direct.

Fenomenul de reflexie a sunetului trebuie luat în considerație la construcția încăperilor care cer condiții acustice speciale (săli de curs, de concert, de

teatru etc.). Atît fenomenul de ecou cît și cel de reverberație trebuie eliminate în astfel de încăperi. Pentru aceasta se folosesc mai multe soluții: draperii care absorb puternic sunetele, pereți cu tencuială zgrunțuroasă sau ornamentații care în locul reflexiei nete dau o difuzare a sunetului sau sala este astfel construită încît sunetele reflectate să nu se întîlnească cu cele directe (arcade, pereți înclinați etc.). Trebuie menționat că acustica arhitectonică caută să îmbîne cerința eliminării efectelor dăunătoare ale ecoului și reverberației cu cea a folosirii efectului de întărire fără distorsionarea sunetului.

## 12.5. INTERFERENȚA SUNETELOR

În cazul undelor sonore putem observa ușor fenomenul de interferență discutat în § 11.5. Acesta se poate pune în evidență cu ajutorul aparatului imaginat de Quincke. Acesta este compus din două tuburi în formă de U intrînd unul în altul și care pot culisa astfel că lungimea unuia din cele două tuburi poate fi variată (fig. I.12.4). Vibrațiile sonore produse în pîlnia  $S$  ajung la observatorul  $O$  pe două căi diferite,  $SAO$  și  $SBO$ , interferînd în acest punct. Dacă cele două tuburi au lungimi diferite, drumul  $d_1$  parcurs de sunet pe calea  $SAO$  este diferit de drumul  $d_2$  parcurs de sunet pe calea  $SBO$ . După cum am arătat în § 10.5, dacă diferența de drum este egală cu un număr par de semiunde,  $|d_2 - d_1| = 2k\lambda/2$ , amplitudinea unei sonore rezultante este maximă, iar dacă diferența de drum este un număr impar de semiunde,  $|d_2 - d_1| = (2k + 1)\lambda/2$ , amplitudinea rezultantă este minimă. Aceasta înseamnă că în primul caz intensitatea sunetului auzit de observatorul  $O$  este maximă, iar în al doilea caz este minimă. Mișcînd deci tubul  $B$  în sus și în jos sunetul auzit de  $O$  va fi cînd mai tare cînd mai încet.

Acest aparat poate fi folosit pentru determinarea lungimii de undă a sunetului emis de sursa  $S$ . Măsurînd cu ajutorul riglei  $R$  deplasarea  $x$  a tubului

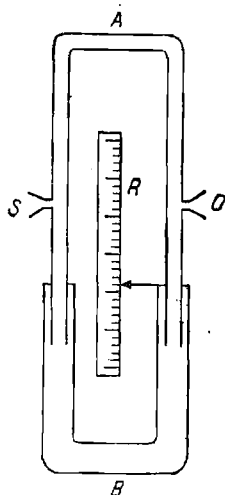


Fig. I.12.4

între două poziții succesive pentru care sunetul rezultat are intensitatea maximă, lungimea de undă va fi  $\lambda = 2x$  (înmulțim cu doi deoarece diferența de drum este dublul deplasării tubului).

Prin interferența dintre unda sonoră directă și unda reflectată apar unde staționare. Acest fapt poate fi pus în evidență cu ajutorul *tubului Kundt* care permite și determinarea vitezei sunetului fie în gazul cu care este umplut tubul, fie în solidul din care este făcută vergeaua. Acest dispozitiv (fig. I.12.5) este alcătuit dintr-un tub  $AB$ ; la capătul  $A$  se găsește pistonul  $C$  care poate varia lungimea camerei închise  $CD$  în interiorul căreia se află pulbere fină de plută iar la capătul celălalt se găsește o vergea metalică  $DE$  prinsă la mijloc în  $B$  și având în  $D$  un disc de diametru mai mic decât diametrul interior al tubului. Prin frecarea vergelei în lung se excită vibrații longitudinale, producându-se o undă staționară cu un nod în locul în care este fixată ( $B$ ) și cu ventru la capete. Discul  $D$  începe astfel să oscileze producând unde sonore



Fig. I.12.5

care se propagă de la  $D$  la pistonul  $C$  unde se reflectă întorcându-se înapoi. Dacă lungimea camerei  $CD$  a fost astfel aleasă încît să cuprindă un număr întreg de semiunde, prin interferența undei directe cu cea reflectată ia naștere o undă staționară avînd noduri la capete. Existența nodurilor și ventrelor undei staționare este pusă în evidență de pulberea de plută care fiind spulberată din ventre se acumulează în noduri.

Dispozitivul permite determinarea vitezei sunetului fie în bară fie în gazul din tub. Lungimea  $l_1$  a vergelei este  $\lambda_1/2$  ( $\lambda_1$  fiind lungimea de undă a sunetului în vergea) adică

$$l_1 = \lambda_1/2 = v_1 T/2,$$

unde  $v_1$  este viteza sunetului în vargă, iar  $T$  — perioada oscilațiilor (aceeași în vargă ca și în gazul din tub). Distanța dintre două noduri consecutive  $l_2$  este  $\lambda_2/2$  ( $\lambda_2$  fiind lungimea de undă a sunetului în gaz) adică:

$$l_2 = \lambda_2/2 = v_2 T/2,$$

unde  $v_2$  este viteza sunetului în gaz. Făcînd raportul obținem

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (12.6)$$

Deoarece  $l_1$  și  $l_2$  pot fi măsurate direct, cunoscînd una din viteze o putem calcula pe cealaltă.

## 12.6. SURSE SONORE

Orice corp material care vibrează poate servi ca sursă sonoră deoarece produce unde elastice în mediul înconjurător. Ne vom opri pe scurt asupra mecanismului de producere a sunetelor de către cîteva tipuri simple de surse



sonore în care vibrațiile sînt produse pe cale mecanică. Din această categorie fac parte coardele, tuburile sonore, vergile, diapazoanele, membranele și plăcile.

a) **Coarde.** Prin coardă înțelegem un fir perfect flexibil (care nu opune nici o rezistență deformărilor perpendiculare pe lungimea sa) fixat la ambele capete. Cînd excităm vibrații în această coardă (ciupire, frecare cu arcușul), perturbația produsă într-un punct se propagă în lungul coardei, ajungînd la unul din capete este reflectată propagîndu-se în sens contrar, apoi reflectîndu-se la celălalt capăt ș.a.m.d. Prin interferență ia naștere o undă staționară avînd noduri în locurile unde este fixată coarda. Condiția pentru ca să se formeze o undă staționară este ca două unde care interferă (directă și reflectată) să aibă aceeași fază. Aceasta înseamnă că în lungimea  $l$  a coardei este cuprins un număr întreg de semiunde.

$$l = n\lambda/2, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Altfel spus, o coardă de lungime  $l$  nu produce decît sunete avînd lungimea de undă

$$\lambda = 2l/n$$

sau frecvența

$$\nu = \frac{vn}{2l}, \quad (12.7)$$

unde  $v$  este viteza sunetului în coardă. Frecvența sunetului fundamental va fi deci  $\nu_1 = v/2l$ , iar armonicile superioare vor avea frecvențele  $\nu_2 = v/l$ ,  $\nu_3 = 3v/2l$  etc. În fig. 1.12.6 sînt reprezentate cîteva din undele staționare care se pot stabili într-o coardă fixată la capete.

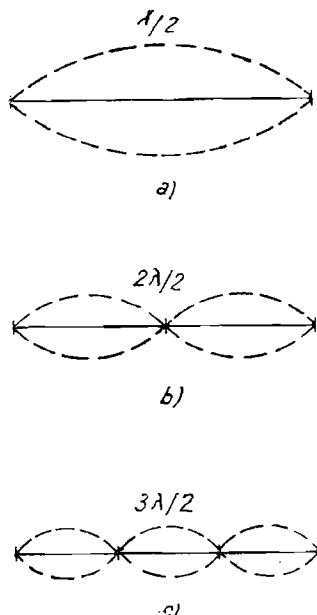


Fig. 1.12.6

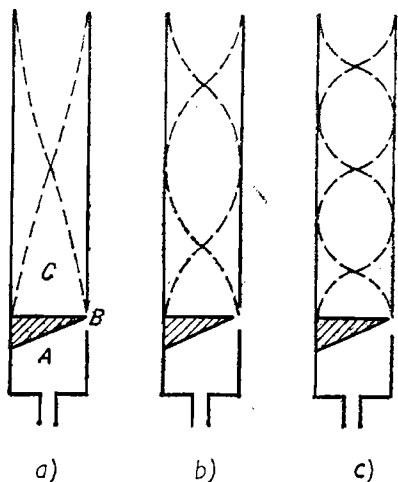


Fig. I.12.7

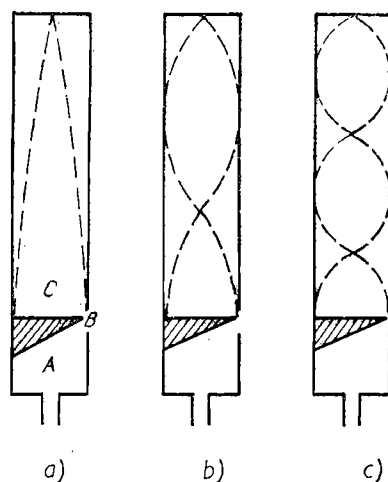


Fig. I.12.8

În general intensitatea sunetului fundamental este mult mai mare decât cea a armonicelor superioare. S-a constatat experimental că intensitatea relativă a armonicelor în raport cu cea a sunetului fundamental crește cu cât punctul de excitație se află mai aproape de un capăt al corzii. În plus unele armonice superioare nu vor mai fi produse, funcție de locul de ciupire al corzii, și anume acele armonice pentru care unda staționară ar trebui să aibă nod în locul de ciupire. Acest lucru se poate înțelege dacă ținem seama că în punctul în care este ciupită, coarda trebuie să vibreze și deci în acest punct se poate forma un nod. Astfel dacă ciupim coarda la mijloc nu mai pot apărea armonicile pare corespunzătoare lui  $n = 2, 4, 6, 8, \dots$  (în particular nu se formează unda staționară  $n = 2$  din fig. I.12.6b), dacă o ciupim la o treime de capăt nu apar armonicile cu  $n = 3, 6, 9, \dots$

b) **Tuburi sonore.** Prin tub sonor înțelegem un tub cu pereți rigizi care produce sunete dacă aerul din el este făcut să vibreze. În fig. I.12.7 și I.12.8 sînt desenate tuburi sonore simple cu buză (sau cu pană). Acestea sînt compuse din două părți: camera de compresiune  $A$  și tubul de rezonanță  $C$ . În camera  $A$  este suflat aerul printr-un mic tub, fiind apoi silit să iasă printr-un orificiu strîmt unde lovește buza ascuțită  $B$  punînd-o în vibrație. Se produce astfel un sunet care poate fi auzit chiar dacă lipsește tubul de rezonanță. Sunetul produs de buză este compus, rolul camerei de rezonanță fiind de a întări numai unele din acestea.

Pentru a înțelege mai bine rolul tubului de rezonanță să considerăm următoarea experiență. Două tuburi  $A$  și  $B$  (fig. I.12.9) sînt unite prin tubul de cauciuc  $C$  formînd două vase comunicante. Ridicînd sau coborînd tubul  $A$  nivelul apei din tubul  $B$  coboară sau se ridică astfel că înălțimea coloanei de aer din acest tub variază. Făcînd să vibreze un diapazon deasupra tubului  $B$  vom constata că pentru anumite înălțimi ale coloanei de aer sunetul diapazonului va fi întărit. Această întărire are loc deoarece unda sonoră se reflectă în extremitatea cealaltă a tubului (pe suprafața apei) suprapunîndu-se peste sunetul direct și dă naștere unei unde staționare. Dacă ajungem în fază cu cea de a

doua undă produsă de diapazon, ele se vor întări, în tub apărînd unde staționare forțate de rezonanță. Deoarece reflexia se face pe un mediu mai dens ca aerul (și anume apa), pe suprafața de reflexie trebuie să avem un nod al undei staționare și cum în capătul celălalt unde se produce excitarea vibrațiilor trebuie să avem un ventru, rezultă că fenomenul de rezonanță se va produce pen-

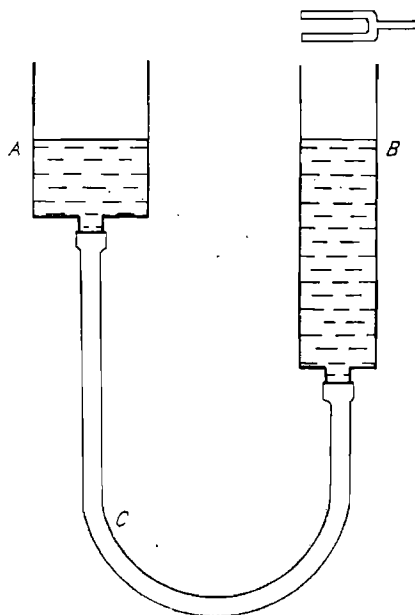


Fig. I.12.9

tru cazurile în care înălțimea coloanei de aer este egală cu un număr impar de  $\lambda/4$ . Dacă înălțimea de aer este fixă și înlocuim diapazonul cu o sursă de sunete compuse, rezonanța se va produce numai pentru acele sunete pentru care este satisfăcută condiția de rezonanță. În cazul tuburilor sonore rolul sursei de sunete compuse este jucat de buza vibratoare.

O situație asemănătoare apare în cazul unui tub (a cărui lungime poate fi variată) liber la ambele capete (deschis). Numai că în acest caz reflexia făcîndu-se pe aerul liber care poate fi considerat ca un mediu mai puțin dens, la ambele capete trebuie să avem ventru și deci condiția de rezonanță este ca lungimea tubului să fie egală cu un număr întreg de  $\lambda/2$  (vezi § 11.6).

Din discuția anterioară (cum de altfel s-a și dovedit experimental) rezultă că frecvența sunetului produs de vibrația aerului dintr-un tub sonor depinde doar de lungimea acestuia. Ea nu va depinde de forma axei tubului, de diametrul tubului sau de materialul din care sînt confecționați pereții (cel puțin dacă sînt suficient de groși pentru a nu fi deformați de vibrațiile aerului).

Un *tub sonor deschis* (fig. I.12.7) din punct de vedere al formării undelor staționare se comportă ca un tub liber la ambele capete. Trebuie deci să avem ventre atît la capătul în care avem buza vibratoare și orificiul, cît și la celălalt capăt unde sunetul se reflectă pe aerul liber. Vor fi întărite sunetele pentru care lungimea  $l$  a tubului cuprinde un număr întreg de semiunde:  $l = n\lambda/2$  cu  $n = 1, 2, \dots$ . Un tub sonor deschis va emite deci sunete de frecvență

$$\nu = \frac{vn}{2l}, \quad (12.8)$$

unde  $v$  este viteza sunetului în aer. Înălțimea sunetului fundamental este  $\nu_1 = v/2l$  iar armonicile superioare vor fi  $\nu_2 = v/l$ ,  $\nu_3 = 3v/2l$  etc.

Într-un *tub sonor închis* (fig. I.12.8) reflexia se face pe un mediu mai dens (peretele din capătul de sus al tubului) unde trebuie să fie un nod iar în capătul în care se găsește buza  $C$  să fie din nou un ventru. Acesta se comportă deci ca un tub închis la un capăt și deschis la celălalt (ca în situația din fig. I.12.9). Vor fi deci întărite sunetele pentru care

$$l = (2n + 1) \lambda/4 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

astfel că un tub sonor închis va emite deci sunete de frecvență

$$\nu = \frac{(2n + 1)v}{4l}. \quad (12.9)$$

Se observă că sunetul fundamental  $\nu_0 = v/4l$  emis de un tub închis are înălțimea egală cu jumătate din cea dată de un tub deschis de aceeași lungime. Mai facem o ultimă observație: la capetele tubului apar anumite perturbații care fac ca frecvența sunetului fundamental să fie mai mică decît cea dată de formulele anterioare. Noi am admis că la capătul tubului în care se găsește buza apare un ventru în timp ce în realitate, deoarece tubul nu este de fapt deschis complet (la acest capăt vibrația aerului fiind parțial stîmjenită), distanța pînă la primul nod este mai mică de  $\lambda/4$ . O situație asemănătoare avem în cazul tubului deschis și la celălalt capăt, produsă de faptul că reflexia nu se face chiar pe planul care trece prin marginile tubului ci ceva mai departe în mediul exterior. În acest fel apare o mărire aparentă  $\Delta l$  a lungimii geometrice a tubului. Pentru un tub deschis cu o secțiune circulară de diametru  $d$ , Helmholtz a arătat că putem lua  $\Delta l = 0,41 d$ . Frecvența sunetului emis va fi dată atunci tot de relația (12.8) în care în loc de  $l$  vom pune  $l' = l + \Delta l$ .

Caracterul vibrațiilor care apar în vergi, diapazoane, membrane sau plăci este în general mai complex ceea ce complică mult calculele. De aceea sursele sonore de acest tip nu vor mai fi descrise.

## 12.7. ULTRASUNETELE

Dintre vibrațiile sonore care ies din limitele de audibilitate ale urechii omenești, de un mare interes, din punct de vedere practic, sînt *ultrasunetele*, adică sunetele a căror frecvență este mai mare de 20 000 Hz.

Înainte de a discuta mai în amănunțime proprietățile ultrasunetelor amintim cititorului un fenomen cunoscut din natură: orientarea liliacilor se bazează pe faptul că aceștia emit semnale ultrasonore scurte de frecvențe între 30–60 kHz. Liliacul în zbor emite în medie cca 30 semnale pe secundă. O parte din acestea sînt recepționate de urechile mari ale liliacului sub formă de semnale ecou, după un timp cu atît mai scurt cu cît obstacolul este mai aproape. Pe măsura apropierii de obstacol liliacul emite din ce în ce mai multe semnale într-o secundă ajungînd ca de exemplu la un metru de obstacol să emită pînă la 60 semnale pe secundă. Aceasta permite liliacului să simtă precis poziția sa față de obstacole.

Importanța practică a ultrasunetelor este legată de lungimea de undă mică a acestora. Din această cauză, de exemplu, ultrasunetele pot fi emise și se propagă ca și razele de lumină sub formă de fascicule, spre deosebire de sunetele obișnuite care se împrăștiie în toate direcțiile. Astfel se constată experimental că dacă lungimea undei emise este mai mică decît dimensiunile liniare ale sursei unda se va propaga în linie dreaptă sub formă de fascicul. În afară de aceasta, datorită lungimii de undă mici, fenomenul de difracție (ocolirea obstacolelor) nu apare decît pentru obstacolele de dimensiuni foarte mici în timp ce sunetele obișnuite ocolesc practic aproape orice obstacol întîlnit în cale.

Ultrasunetele suferă reflexia și refracția la suprafața de separare a două medii diferite la fel ca undele luminoase. Folosind acest fenomen au fost construite oglinzi concave sau lentile speciale care să concentreze într-un punct fascicule de ultrasunete.

Deoarece intensitatea undelor sonore este proporțională cu pătratul frecvenței (relația 12.4) energia transportată de ultrasunete este mult mai mare decît energia sunetelor de aceeași amplitudine. Pe de altă parte în cazul ultrasunetelor fenomenul de absorbție care apare la propagarea tuturor oscilațiilor elastice devine foarte important. În paragraful § 11.7 relația (11.28) am arătat că intensitatea undei elastice scade cu distanța de la sursă după o lege exponențială  $I = I_0 e^{-kr}$ , fără a preciza complet de cine depinde coeficientul de absorbție  $k$ . Se poate arăta atît teoretic cît și experimental că acesta depinde atît de caracteristicile mediului (densitate, viscozitate, căldură specifică etc.) cît și de frecvența undei care se propagă crescînd cu pătratul frecvenței. Din această cauză practic nu putem obține propagarea ultrasunetelor, de exemplu în aer, la o distanță mai mare de 1 km. Mai mult, un ultrasunet de o frecvență de cca 3000 kHz este practic absorbit complet\*, la o distanță de cca 0,6 cm. În lichide coeficientul de absorbție este de 2–3 ordine de mărime mai mic decît în aer, iar în solide și mai mic, intensitatea ultrasunetelor fiind mult mai puțin atenuată.

---

\* Socotim sunetul complet absorbit dacă intensitatea sa scade la 0,01 din intensitatea sa inițială.

Un fenomen interesant care apare la propagarea ultrasunetelor în lichide este fenomenul de cavitație care constă în apariția unor bule care se ridică la suprafață și se sparg. Aceasta se explică prin faptul că dilatările și comprimările extrem de rapide care se succed în lichid duc la apariția unor mari tensiuni în anumite zone care fac să se „rupă” moleculele de lichid. Astfel iau naștere bulele care conțin vaporii și gazele dizolvate în lichid. Bulele mici se contopesc în bule mai mari care încep să vibreze și apoi se sparg dând naștere unor presiuni locale foarte mari care se manifestă sub formă de șocuri hidraulice în volume foarte mici. Deteriorarea paletelor turbinelor și a elicelor vapoarelor se explică prin fenomenul de cavitație produs de ultrasunetele generate de vibrațiile mașinilor.

Înainte de a discuta câteva din aplicațiile practice ale ultrasunetelor să vedem cum pot fi produse. Vom trece peste procedeele mecanice (de exemplu fluier ultrasonor, sau sirena ultrasonoră) și termice (de exemplu cu ajutorul vibrațiilor unui arc electric) deoarece ultrasunetele produse de acestea au în genere amplitudini mici și sînt mai puțin importante practic. Să analizăm acum puțin generatorul *piezoelectric*. Efectul piezoelectric (vezi III § 1.8) constă în faptul că supunînd un cristal la deformări de tracțiune sau comprimare după anumite direcții, pe fețele sale apar sarcini electrice egale de semne contrare care își schimbă rolul dacă înlocuim tracțiunea prin comprimare și invers. Există și efectul piezoelectric invers sau electrostricțiunea, pe care se bazează producerea ultrasunetelor, care constă în dilatări și comprimări succesive ale cristalului sub acțiunea unui cîmp electric alternativ.

Partea esențială a generatorului constă dintr-o lamă piezoelectrică de obicei de cuarț pe fețele căreia sînt aplicate doi electrozi, sub forma unor straturi subțiri metalice, legați la o sursă de tensiune alternativă. Sub acțiunea cîmpului electric alternativ lama începe să vibreze cu o frecvență egală cu cea a tensiunii aplicate. Vibrațiile lamei sînt transmise în mediul înconjurător sub formă de ultrasunete. Cu astfel de generatori se poate ajunge pînă la frecvențe de cca 150 000 kHz și la intensități ale radiației ultrasonore de la cîteva zeci de wați pe  $\text{cm}^2$  pînă la cîteva sute de wați pe  $\text{cm}^2$ .

Se pot produce ultrasunete și cu ajutorul efectului magnetostrictiv care constă în deformarea corpurilor feromagnetice (fier, nichel, cobalt) sub acțiunea unui cîmp magnetic. Introducînd o bară dintr-un astfel de material (Ni) într-un cîmp magnetic, paralel cu lungimea ei ( produs de exemplu de o bobină în care e introdusă bara), aceasta se scurtează. Cînd cîmpul magnetic variază periodic (curentul care străbate bobina este alternativ) bara se va scurta periodic. În cazul unor frecvențe mari ale cîmpului alternativ vibrațiile capetelor barei dau naștere la unde ultrasonore. Pentru a obține amplitudini mari se aleg dimensiunile barei astfel ca să avem rezonanță între vibrațiile elastice proprii și frecvența curentului alternativ excitator. Generatorul magnetostrictiv este avantajos pentru producerea ultrasunetelor de frecvență joasă (de la 20–60 kHz) și energii considerabile

Datorită frecvenței mari și a energiei mari pe care o transportă, ultrasunetele produc o serie de efecte fizico-chimice dintre care menționăm: distrugerea stărilor labiale de echilibru; încălzirea mediului; formarea de sisteme disperse (emulsii și suspensii) și distrugerea de astfel de sisteme (coagulări); influențarea potențialelor electrochimice și a pasivității metalelor; voalarea plăcilor fotografice; creșterea vitezei unor reacții chimice; explozia substanțelor puțin stabile (de exemplu iodura de azot) etc.

Proprietățile ultrasunetelor permit folosirea lor într-o mare varietate de aplicații practice.

Ultrasunetele produc încălzirea și redistribuirea substanței din celulele vii ceea ce duce la folosirea lor în terapeutică (încălzirea anumitor țesuturi și masajele adânci) precum și la conservarea alimentelor (prin folosirea unor ultrasunete de frecvență și intensitate potrivită care distrug microorganismele).

O altă aplicație a ultrasunetelor este legată de măsurarea adâncimii mărilor. În esență procedeul este același ca și în cazul folosirii sunetelor obișnuite, prezentând însă avantajul fasciculelor dirijate. De asemenea se pot produce semnale foarte scurte ceea ce mărește precizia măsurării intervalului de timp dintre producerea semnalului direct și înregistrarea celui reflectat.

Ultrasunetele se folosesc în diferite procese tehnologice cum ar fi: spălarea, curățarea, uscarea sau sudarea unor corpuri și de asemenea pentru prelucrarea unor piese. În principiu, prelucrarea cu ajutorul ultrasunetelor constă în următoarele: se introduce piesa (sau porțiunea de piesă) care trebuie prelucrată într-un lichid în care se găsesc în suspensie particule de praf abraziv dur. Sub acțiunea unei surse de ultrasunete în lichid apare fenomenul de cavitație. Datorită șocurilor hidraulice particulele de abraziv sînt lovite cu putere de suprafața piesei smulgînd așchii din aceasta. Pe acest principiu se bazează construirea unor mașini-unelte care să taie filetele și dinții pinioanelor finite, care rectifică piese complicate, taie și găuresc plăci etc.

Dintre numeroasele aplicații ale ultrasunetelor nu vom mai menționa decît defectoscopia ultrasonoră. Controlul ultrasonor permite stabilirea existenței unor defecte (fisuri, goluri) în interiorul unor piese metalice masive. Principalele tipuri de defectoscoape ultrasonore utilizează transmisia sau reflexia.

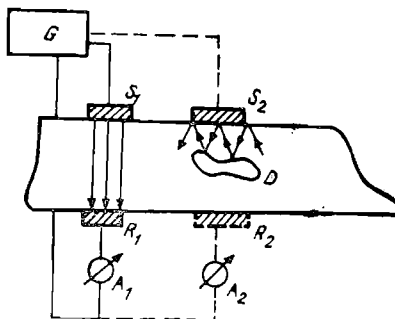


Fig. I.12.10.

În defectoscopul prin transmisie emițătorul și receptorul de ultrasunete sînt situate de o parte și de alta a piesei de cercetat (fig. I.12.10). Dacă între emițător și receptor nu există nici un defect (de exemplu între sursa  $S_1$  și receptorul  $R_1$ ) semnalul ultrasonor transmis va trece neatenuat producînd o

anumită deviație a acului aparatului de înregistrare ( $A_1$ ). În cazul în care întâlnește un gol ( $D$ ) o parte a semnalului ultrasonor este reflectat pe suprafața de separare dintre metal și aerul din golul respectiv și semnalul este mult atenuat ceea ce se va observa la aparatul indicator ( $A_2$ ). Dispozitivul folosit practic are o singură pereche emițător-receptor care este plimbată în lungul piesei de cercetat. Această metodă are două inconveniente: în primul rînd ultrasunetele propagîndu-se prin piesă se reflectă pe fețele opuse ale acesteia îngreunînd observarea defectelor; în al doilea rînd acest procedeu nu permite stabilirea adîncimii la care se găsesc defectele.

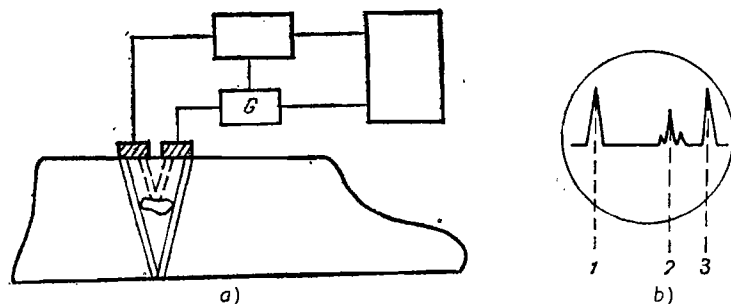


Fig. I.12.11

Aceste inconveniente sînt în bună măsură eliminate de defectoscoapele prin reflexie (sau în impulsuri). La acestea emițătorul și receptorul sînt situate de aceeași parte a piesei unul lîngă altul (fig. I.12.11a). Ultrasunetele se propagă prin piesă, ajung la fața opusă unde sînt reflectate și apoi revin la receptor. Dacă în piesă există un defect, semnalul ultrasonor se va reflecta de acesta și va ajunge mai devreme la receptor decît cel reflectat de fața opusă. Emițătorul generează impulsuri scurte la intervale lungi constante care împreună cu semnalul reflectat sînt marcate pe ecranul unui oscilograf. În fig. I.12.11b prin 1 și 3 am indicat locurile unde spotul luminos are devieri bruște care marchează momentele în care a fost emis semnalul ultrasonor și respectiv în care a fost receptat semnalul reflectat de fața opusă. Prin 2 am indicat locul unde este indicată primirea unui semnal reflectat de un defect. Poziția relativă a acestuia în raport cu 1 și 3 ne permite să determinăm adîncimea la care se găsește defectul.



## 13. Elemente de mecanică relativistă

### 13.1. SPAȚIUL ȘI TIMPUL ÎN MECANICA NEWTONIANĂ

După cum am văzut în capitolele anterioare, pentru descrierea unui fenomen mecanic (și aceasta este situația pentru orice fenomen fizic), trebuie să cunoaștem punctul din spațiu și momentul de timp la care acesta are loc. Pentru aceasta am introdus noțiunea de sistem de referință față de care raportăm mișcarea mecanică, stabilind totodată modul de măsurare a distanțelor și duratelor. Am făcut toate acestea fără a da însă o definiție a spațiului și timpului, bazându-ne doar pe practica noastră cotidiană.

Am văzut că în univers nu există un corp absolut nemișcat față de care să putem stabili repausul sau mișcarea absolută a altor corpuri (§ 1.1). Aceasta înseamnă că nu există un sistem de referință absolut. Deoarece noțiunea de spațiu este strâns legată de noțiunea de sistem de referință, din acest punct de vedere noțiunea de spațiu este relativă.

Constatarea practică a succesiunii unor fenomene sau evenimente ne dă posibilitatea să apreciem scurgerea timpului. De fapt pentru a măsura durata unui fenomen ne servim de alte fenomene cunoscute ca avînd o mare regularitate (pulsul omenesc, oscilațiile izocrone ale unui pendul, succesiunea zilei și a nopții etc.).

Din discuția de mai sus rezultă că nu putem considera noțiunile de spațiu și de timp rupte de existența corpurilor materiale și a mișcării lor. Din acest motiv spațiul și timpul sînt noțiuni relative.

Principiile și legile mecanicii clasice așa cum au fost ele formulate de către Newton sînt atît de generale încît s-a presupus că pot fi aplicate tuturor corpurilor din univers. Pentru aceasta Newton a trebuit să postuleze anumite proprietăți ale spațiului și timpului care să asigure valabilitatea universală a acestor principii.

Cînd am discutat principiul inerției (§ 3.1) am arătat că în nici un sistem de referință legat de corpurile materiale nu sînt exact satisfăcute consecințele principiului inerției. Din acest motiv Newton a considerat că acest principiu nu poate fi exact valabil decît într-un sistem de referință care să existe în sine independent și în afara corpurilor materiale. Analog se prezintă situația și în privința timpului a cărui scurgere apare în mișcarea inerțială (rectilinie și uniformă). Pe de altă parte, deoarece în desfășurarea oricăror fenomene fizice intervin neregularități, introducerea unei măsuri exacte a timpului nu se poate realiza pe această bază. În acest mod Newton a ajuns la ideea existenței unui spațiu absolut și a unui timp absolut pe care le-a definit după cum urmează:

„*Spațiul absolut*, considerat în natura sa fără nici o legătură cu ceva extern, rămîne totdeauna asemenea și imobil. Spațiul relativ este o măsură sau o parte oarecare mobilă a celui absolut care se relevă simțurilor noastre prin poziția sa față de corpuri și de obicei se confundă cu spațiul imobil”.

„*Timpul absolut*, adevărat și matematic în sine și după natura sa, curge în mod egal și fără nici o legătură cu ceva extern, și cu un alt nume se cheamă și durată. Timpul relativ, aparent și comun, este acea măsură (precisă sau neegală) sensibilă și externă a oricărei durate determinate prin mișcare, care se folosește de obicei în loc de timpul adevărat cum ar fi ora, ziua, luna, anul”.

Dîndu-și seama că practic nu există posibilitatea de a lucra cu spațiul și timpul absolut Newton afirmă că noi sîntem constrînși să lucrăm cu spațiul și timpul relativ ceea ce, pe de altă parte, ne este de fapt suficient pentru descrierea completă a fenomenelor fizice. Revăzînd discuția anterioară și definițiile date de Newton constatăm că spațiul relativ coincide cu ceea ce am numit sistem de referință, iar timpul relativ este ceea ce se măsoară, de exemplu, cu ajutorul cronometrului.

Proprietăți importante ale spațiului sînt: omogenitatea și izotropia sa. Prin omogenitatea spațiului se înțelege că toate punctele sale sînt perfect echivalente, adică în aceleași condiții, fenomene de același tip au aceeași evoluție, în orice punct din spațiu. Analog se consideră că timpul este omogen, înțelegînd prin aceasta că toate momentele de timp sînt echivalente: indiferent de momentul în care sînt realizate condițiile un anumit fenomen se desfășoară identic, din acel moment. Prin izotropia spațiului înțelegem că toate direcțiile sînt echivalente sau nici o direcție nu este privilegiată.

Există o strînsă legătură între transformările lui Galilei și aceste proprietăți. Astfel prin faptul că aceste transformări sînt presupuse valabile pentru orice punct din spațiu și orice moment, fără nici o altă condiție restrictivă, se consideră implicit omogenitatea spațiului și timpului. De asemenea este implicată și izotropia spațiului deoarece formulele de transformare (3.12) se scriu la fel, indiferent de direcția după care se mișcă sistemul  $S'$  în raport cu sistemul  $S$  (vom conveni să alegem axa  $Ox$  după direcția vitezei relative dintre cele două sisteme). Este evident că asimetria primelor trei relații (3.12) nu este cauzată de proprietățile spațiului ci de direcția vectorului viteză relativă.

Aceleași proprietăți sînt conținute implicit și în formula (3.86) care exprimă legea atracției universale. Într-adevăr forța de atracție nu depinde decît de distanța relativă dintre cele două mase acționînd întotdeauna după direcția care le unește indiferent de poziția lor în spațiu.

Încă de la începutul secolului trecut s-a impus definitiv teoria ondulatorie a luminii. Propagarea luminii era asimilată cu propagarea unor unde elastice. După cum se știa (vezi și § 11), undele elastice reprezintă propagarea din aproape în aproape a deformărilor elastice ale unui mediu material. În consecință s-a presupus existența unui suport material și pentru undele luminoase, care a fost numit *eter*. Deoarece lumina se propagă atît în aer, corpuri materiale, cît și în vid, trebuie să considerăm că eterul umple întreg spațiul. Astfel, acest eter imobil care umple uniform spațiul ar putea fi indentificat cu spațiul absolut (reprezentînd o materializare a acestuia). Un sistem de referință legat de eter ar putea constitui acel sistem fix (absolut) față de care să putem stabili repausul absolut sau mișcarea absolută a corpurilor.

O serie întreagă de experiențe au căutat să pună în evidență efectele condiționate de existența eterului. Deoarece spațiul nu ne permite să descriem astfel de experiențe reținem doar faptul deosebit de important că rezultatele diferitelor tipuri de experiențe (a căror precizie este în afara oricărei discuții) nu au putut fi explicate decât atribuind eterului proprietăți total contradictorii. Prin aceasta experiența a dovedit de fapt inexistența eterului.

Infirmarea ipotezei eterului arată că modelul mecanic al propagării luminii bazat pe legile fundamentale ale mecanicii clasice este inconsistent punând, la urma urmelor, la îndoială însăși valabilitatea generală a acestor legi. De asemenea, inexistența eterului pune din nou în discuție dacă este sau nu principal posibilă punerea în evidență a mișcării absolute față de spațiul absolut.

### 13.2. EXPERIENȚA MICHELSON-MORLEY

Din punct de vedere istoric experiența Michelson-Morley a fost una din experiențele concepute pentru a pune în evidență proprietățile eterului. Deoarece, așa cum am menționat, ipoteza existenței eterului a trebuit să fie abandonată, să vedem la ce rezultat ne conduce interpretarea acestei experiențe dacă nu mai considerăm eterul.

Schema dispozitivului experimental este indicată în fig. I.13.1. O sursă monocromatică  $S$  trimite un fascicul luminos care ajungând pe oglinda semitransparentă  $O$  este desfăcut în două fascicule. Primul fascicul (1) este reflectat în  $O$ , ajunge la  $O_1$ , de unde este reflectat întorcându-se pe același drum în  $O$ ; o parte a acestuia străbate oglinda semitransparentă  $O$  ajungând la luneta  $L$ . Cel de al doilea fascicul (2) trece nedeviat prin  $O$ , ajunge la oglinda  $O_2$  pe care se reflectă reîntorcându-se în  $O$ ; o parte a acestuia este din nou reflectată în  $O$  fiind trimis către luneta  $L$ .

Presupunând corecte ecuațiile cinematicii newtoniene, în particular legea compunerii vitezelor, să calculăm intervalul de timp dintre momentele sosirii celor două fascicule la luneta  $L$ . Deoarece fasciculele pleacă odată de la sursă și drumurile  $SO$  și  $OL$  sînt comune, diferența de timp nu poate apare decât datorită parcurgerii drumurilor diferite  $OO_1O$  (pentru fasciculul 1) și respectiv  $OO_2O$  (pentru fasciculul 2). Să considerăm situația din fig. I.13.1a în care brațul  $\overline{OO_1}$  al aparatului este paralel cu direcția vitezei  $v$  de mișcare a Pămîntului și să calculăm timpul  $t_1$  necesar fasciculului 1 să parcurgă drumul  $OO_1O$ . În timpul  $t_1$  în care lumina ajunge de la oglinda  $O$  la oglinda  $O_1$ , aceasta din urmă (împreună cu întreg aparatul) s-a deplasat cu distanța  $vt'_1$ , adică lumina a străbătut distanța  $l - vt'_1$ ; avînd în vedere că viteza luminii este  $c$ , această distanță este totdeauna egală cu  $ct'_1$ . Rezultă  $ct'_1 = l - vt'_1$ , adică

$$t'_1 = \frac{l}{c + v}.$$

Pentru întoarcerea la  $O$  luminii îi trebuie timpul  $t''_1$ . În acest caz  $ct''_1 = l + vt''_1$  deoarece în acest interval de timp oglinda  $O$  s-a depărtat cu distanța  $vt''_1$ , de unde

$$t''_1 = \frac{l}{c - v}.$$

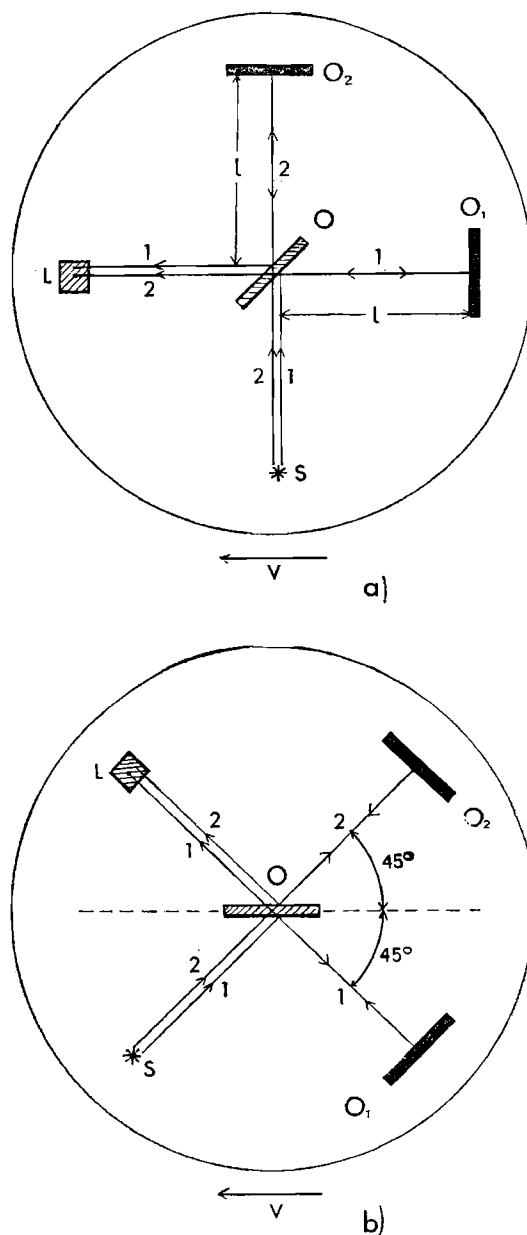


Fig. I.13.1

Totul se petrece ca și cum în primul caz viteza relativă a luminii față de aparat este  $c + v$  iar în cel de al doilea caz  $c - v$ .

Așadar timpul  $t_1$  este

$$t_1 = t'_1 + t''_1 = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$

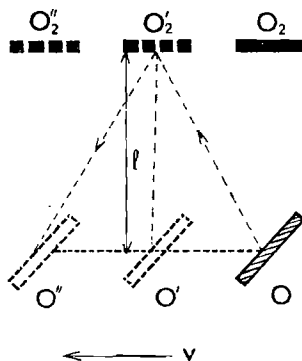


Fig. I.13.2

sau

$$t_1 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (13.1)$$

Să calculăm acum timpul  $t_2$  în care este parcurs drumul de la oglinda  $O$  la  $O_2$  și înapoi. Ținând seama ca și mai înainte de mișcarea aparatului, se vede din fig. I.13.2 că după un interval de timp  $t'_2$  lumina se reflectă pe oglinda  $O_2$  în poziția  $O'_2$ . În acest timp lumina străbate distanța  $OO'_2 = ct'_2$ , iar aparatul se deplasează pe distanța  $OO' = O_2O'_2 = vt'_2$ . Din triunghiul dreptunghic  $OO'O'_2$  rezultă

$$(ct'_2)^2 = l^2 + (vt'_2)^2,$$

adică

$$t'_2 = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Un raționament analog ne arată că timpul  $t'_2$  după care lumina reflectată în  $O'_2$  reîntâlnește oglinda  $O$  în poziția  $O''$  este egal cu  $t'_2$ . Timpul  $t_2$  va fi

$$t_2 = 2t'_2 = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.2)$$

Comparând relațiile (13.1) și (13.2) se observă că  $t_1 - t_2$  este diferit de zero și anume

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} \left( \frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right),$$

de unde

$$\Delta t \approx \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}, \quad (13.3)$$

deoarece  $v$  ( $\approx 30$  km/s) este mult mai mic decât  $c^*$ .

\* Am folosit relațiile (valabile pentru  $v/c \ll 1$ , vezi tabelul A. 2):

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{v^2}{c^2} \text{ și } \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}.$$

Să presupunem acum situația din fig. I.13.1b în care brațele  $OO_1$  și  $OO_2$  ale aparatului fac același unghi de  $45^\circ$  cu direcția de mișcare a Pământului. Este evident că timpurile de parcurgere ale drumurilor  $OO_1O$  și respectiv  $OO_2O$  sînt egale între ele deoarece viteza relativă a luminii față de aparat este aceeași pentru ambele fascicule. Ne așteptăm deci ca în această situație să nu existe nici o diferență de timp între momentele sosirii celor două fascicule. Evaluînd numeric membrul drept din (13.3), ținînd seama că  $l$  este de ordinul metrului, întîrzierea dintre cele două fascicule ( $\Delta t$ ) era de așteptat să fie de ordinul a  $10^{-16}$  s. Desigur că o asemenea diferență de timp nu ar fi putut fi măsurată cu un cronometru.

Sistemul de măsurare conceput de Michelson se baza pe fenomenul de interferență care, după cum se știe, depinde de defazajul  $\Delta\phi$  dintre undele care interferă. Pentru situația din fig. I.13.1b cînd cele două fascicule ajung simultan ( $\Delta t = 0$ ), defazajul dintre ele este zero, pe cînd în situația din fig. I.13.1a unde  $\Delta t \neq 0$ , vom avea un defazaj  $\Delta\phi \neq 0$  între cele două fascicule care interferă. Experiența era atît de precisă încît defazajul obținut chiar pentru  $\Delta t$  de ordinul  $10^{-16}$ s ar fi trebuit să dea o modificare observabilă fenomenului de interferență.

Experiența a dovedit fără nici un dubiu că nu apare nici cea mai mică întîrziere între cele două fascicule indiferent de orientarea aparatului față de direcția de mișcare a Pământului. Aceasta constituie o indicație că legea de compunere a vitezelor dată de cinematica newtoniană nu mai este corectă.

### 13.3. PRINCIPIILE TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÎNSE

După cum am menționat o serie întreagă de experiențe efectuate la sfîrșitul secolului trecut (dintre care nu am descris decît experiența lui Michelson) nu au putut fi interpretate pe baza principiilor generale ale mecanicii newtoniene, evidențiind astfel caracterul limitat al acestora. A apărut necesitatea elaborării unei noi teorii capabilă să explice consecvent noile fapte experimentale acumulate.

Acest lucru a fost realizat în 1905 de Albert Einstein care a formulat două noi principii generale care stau la baza teoriei relativității restrînse.

**a) Principiul relativității.** Legile naturii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale.

**b) Principiul constanței vitezei luminii în vid.** În raport cu orice sistem de referință inerțial viteza luminii în vid are aceeași valoare.

Principiile teoriei se referă doar la cazul mai particular al sistemelor de referință inerțiale ( $SRI$ )\*, din care cauză se numește teoria relativității restrînse. Menționăm doar că Einstein a construit o teorie care se aplică și sistemelor neinerțiale numită *teoria relativității generale*.

Primul principiu constituie de fapt o generalizare a principiului relativității galileiene din mecanică (care se referă doar la legile mecanicii) pentru toate fenomenele fizice. El arată că în condiții identice un fenomen fizic se desfășoară la fel în  $SRI$  diferite. Aceasta înseamnă că prin nici o experiență de fizică nu poate fi pusă în evidență mișcarea rectilinie și uniformă a unui  $SRI$ .

---

\* Deoarece termenul sistem de referință inerțial va apare frecvent în discuția noastră vom întrebuința pentru acesta notația  $SRI$ .

Dacă primul principiu apare sugerat natural de mecanica clasică, cel de al doilea principiu, în mod evident, intră în contradicție cu aceasta. Într-adevăr dacă sursa luminoasă se apropie sau se depărtează de observator cu viteza  $v$ , conform legii de compunere a vitezelor dată de cinematica newtoniană viteza luminii față de observator ar trebui să fie  $c+v$  în primul caz și respectiv  $c-v$  în al doilea caz. Principiul al doilea al teoriei relativității restrânse afirmă însă că viteza luminii față de observator este aceeași în ambele situații și egală cu  $c$ .

Să observăm acum că, dacă considerăm valabil acest principiu, rezultatele experienței lui Michelson pot fi imediat explicate. În acest fel al doilea principiu poate fi considerat ca o generalizare a rezultatelor acestei experiențe.

### 13.4. TRANSFORMĂRILE LORENTZ

În capitolul 3 am văzut că transformările lui Galilei (3.12) care dau relațiile dintre poziția și timpul măsurate în *SRI* ( $S'$ ) în mișcare și respectiv în *SRI* ( $S$ ) considerat fix, exprimă matematic principiul relativității mecanice deoarece lasă neschimbate ecuațiile dinamicii. Ar părea plauzibil să considerăm că transformările lui Galilei ne dau, și în teoria lui Einstein, relațiile de trecere de la un *SRI* la altul, adică exprimă matematic și primul principiu al teoriei relativității restrânse. Problema esențială este de a vedea dacă aceste transformări nu contrazic principiul constanței vitezei luminii în vid. Pentru a putea răspunde la această întrebare să analizăm cu atenție consecințele acestui principiu.

Conform principiului lui Huygens, radiația luminoasă emisă de o sursă punctiformă se propagă sub forma unei unde sferice, înțelegând prin aceasta că frontul de undă este o suprafață sferică de rază  $R = ct$  unde  $c$  este viteza luminii în vid iar  $t$  — timpul necesar luminii să se propage de la sursă pînă la punctul din spațiu atins de frontul de undă. Considerînd sursa în originea sistemului de coordonate legat de *SRI* fix ( $S$ ) ecuația acestei suprafețe este (vezi A.12):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = c^2 t^2. \quad (13.4)$$

În fig. I.13.3 am reprezentat intersecția sferei cu planul  $xOy$  al sistemului

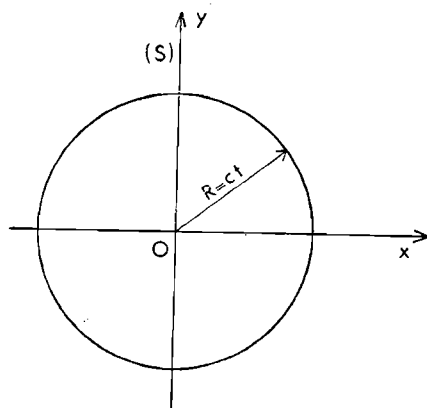


Fig. I.13,3

de coordonate ales. Fie acum SRI mobil ( $S'$ ) care se deplasează față de ( $S$ ) cu viteza  $v$  dirijată în lungul axei  $x$  (fig. I.13.4). Presupunem că la momentul  $t = t' = 0$  originile  $O$  și  $O'$  ale celor două sisteme de coordonate coincid. Pentru un observator care se află în repaus față de sistemul ( $S$ ) frontul unei emise la  $t = 0$  din  $O$  va fi după  $t$  secunde suprafața sferică cu centrul în  $O$  (fig. I.13.4a) de rază  $ct$  (ecuația 13.4). Pentru observatorul care se găsește în repaus față de sistemul ( $S'$ ) conform principiului relativității frontul de undă va fi tot o sferă cu centrul în punctul de unde a fost emisă lumina în acest sistem adică punctul  $O'$  (fig. I.13.4b) deoarece acesta coincidea cu  $O$  la momentul emisie ( $t = t' = 0$ ). Conform principiului al doilea al teoriei relativității restrânse după  $t'$  secunde raza  $R'$  a frontului de undă va fi  $ct'$  deoarece viteza luminii în vid nu depinde de mișcarea sistemului de referință. Prin urmare frontul de undă în acest sistem este reprezentat de ecuația

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2 = c^2 t'^2. \quad (13.5)$$

Dacă transformările Galilei descriu corect din punct de vedere matematic principiile teoriei relativității restrânse ele trebuie să transforme ecuația (13.5) în (13.4) și invers. Aceasta înseamnă că prin înlocuirea lui  $x', y', z'$  și  $t'$  conform relațiilor (3.12) ecuația (13.5) să treacă în ecuația (13.4) pentru orice punct din spațiu și orice moment de timp. Să efectuăm această înlocuire:

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

sau

$$x^2 - 2xvt + y^2 + z^2 = (c^2 - v^2)t^2. \quad (13.6)$$

După cum se vede imediat ultima ecuație nu poate să coincidă cu (13.4) pentru orice valoare a lui  $x, y, z$  și  $t$ . În concluzie, transformarea lui Galilei nu ne furnizează din punct de vedere al teoriei relativității restrânse relațiile corecte de trecere de la un SRI la altul. Să încercăm să modificăm relațiile

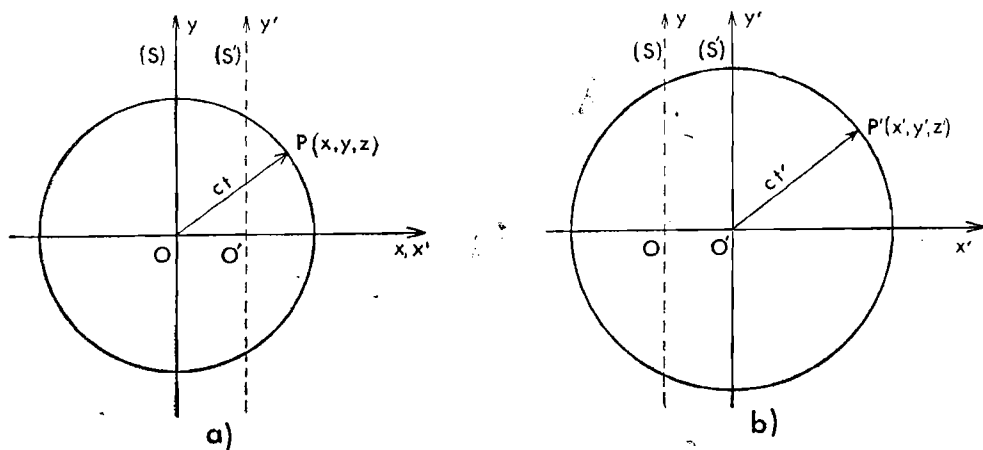


Fig. I.13.4



de transformare (3.12) așa încît ecuația (13.5) să fie transformată în (13.4). Vom admite în continuare că  $y' = y$ ,  $z' = z$  deoarece în relația (13.6) termenii în  $y^2$  și  $z^2$  coincid cu cei din (13.4). Comparînd ecuația (13.6) cu (13.4) apar două neconcordanțe: în primul rînd coeficientul lui  $t^2$  nu mai este  $c^2$  iar în membrul stîng apare termenul suplimentar  $(-2xvt)$ . Acest termen suplimentar se datorește faptului că  $x'$  se exprimă și prin  $x$  și prin  $t$ . Această dificultate poate fi eliminată doar dacă admitem că și  $t'$  se exprimă prin  $x$  și  $t$ , astfel încît  $t'^2$  să introducă la rîndul său un termen proporțional cu produsul  $xt$  care să compenseze termenul suplimentar din (13.6). Vom căuta  $t'$  de forma:

$$t' = ft - gx,$$

unde constanta  $f$  trebuie să fie pozitivă deoarece în orice sistem de referință evoluția în timp trebuie să se desfășoare de la trecut spre viitor. Observînd că  $t'^2$  conține și termeni în  $x^2$  va trebui să modificăm puțin și expresia lui  $x'$  luînd

$$x' = h(x - vt)$$

( $f$ ,  $g$ ,  $h$  sînt constante care trebuie determinate). Introducînd în (13.5) se obține

$$(h^2 - c^2g^2) x^2 - 2(h^2v - c^2fg) xt + y^2 + z^2 = (c^2f^2 - v^2h^2)t^2,$$

care coincide cu (13.4) pentru orice punct din spațiu și orice moment dacă  $f$ ,  $g$ ,  $h$  satisfac ecuațiile:

$$\begin{aligned} h^2 - c^2g^2 &= 1, & (a) \\ vh^2 - c^2fg &= 0, & (b) \\ c^2f^2 - v^2h^2 &= c^2. & (c) \end{aligned} \tag{13.7}$$

Înmulțind (13.7a) cu  $v$  și înlocuind pe  $vh^2$  în (13.7b) obținem

$$c^2g(f - vg) = v.$$

Înmulțind apoi (13.7b) cu  $v$  și înlocuind  $v^2h^2$  în (13.7c) rezultă

$$c^2f(f - vg) = c^2.$$

Raportul ultimelor două ecuații ne dă

$$g/f = v/c^2 \text{ sau } g = vf/c^2.$$

Înlocuind pe  $g$  în (13.7b) rezultă  $h = f$ . Din relația (13.7c) obținem atunci

$$f = h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ adică } g = \frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Cu aceste valori pentru constantele  $f$ ,  $h$  și  $g$  obținem relațiile

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13.8}$$

cunoscute sub numele de transformările lui Lorentz. Este evident că a afirma că  $SRI (S')$  se mișcă față de  $SRI (S)$  cu viteza  $v$  este echivalent cu a spune că  $SRI (S)$  se mișcă față de  $SRI (S')$  cu viteza  $(-v)$ . Deoarece relațiile (13.8) sînt valabile pentru viteza constantă  $v$  oarecare, relațiile de trecere de la  $SRI (S')$  la  $SRI (S)$  se obțin din (13.8) înlocuind pe  $v$  prin  $-v$  adică

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.8')$$

Expresiile (13.8) trec aproximativ în transformările lui Galilei dacă viteza  $v$  dintre cele două sisteme de referință este mică în raport cu viteza luminii (dacă  $v/c \ll 1$  putem considera  $\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 1$ ). Aceasta justifică faptul că transformările lui Galilei conduc la rezultate practic corecte pentru viteze uzuale, înțelegînd prin aceasta chiar și rachetele care se mișcă cu a doua viteză cosmică (11,2 km/s) sau Pămîntul în mișcarea pe ecliptică (30 km/s).

### 13.5. CONSECINȚELE FIZICE ALE TRANSFORMĂRILOR LORENTZ

a) **Contractia lungimilor.** După cum se știe, măsurarea unei distanțe revine la a determina de cîte ori o lungime aleasă ca etalon este cuprinsă în aceea distanță.

Să considerăm o riglă, care se află în repaus față de  $SRI (S')$ , așezată în lungul axei  $Ox$  și care are lungimea  $l_0$  în acest sistem. Notînd cu  $x'_1$  și  $x'_2$  punctele în care se găsesc cele două capete ale riglei avem  $l_0 = x'_2 - x'_1$ . Să vedem acum care este lungimea riglei pe care o măsoară un observator situat în  $S$ . Pentru aceasta trebuie determinată poziția capetelor riglei în sistemul  $S$  la același moment de timp în acest sistem. Pentru aceasta trebuie să cunoaștem simultan (la momentul  $t_1 = t_2$ ) coordonatele capetelor riglei  $x_1$  și  $x_2$ . Conform relațiilor (13.8) avem

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Scăzînd aceste relații și avînd în vedere că  $t_1 = t_2$  obținem

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ținînd seama că  $(x_2 - x_1)$  reprezintă lungimea  $l$  a riglei în sistemul  $S$ , rezultă

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.9)$$

Deoarece  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  este mai mic decît unu, rezultă că pentru observatorul față de care rigla se mișcă cu viteza  $v$ , lungimea riglei este micșorată ( $l < l_0$ ). Din acest motiv relația (13.9) reprezintă contractia lungimilor. Atragem atenția că dacă am considera rigla de lungime  $l_0$  în repaus în  $S$  atunci pentru un observator din  $S'$  ea apare de asemenea contractată cu factorul  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Acest rezultat se obține printr-un raționament analog plecând de la relațiile (13.8') deoarece se poate considera de asemenea că  $S'$  se mișcă cu viteza  $(-v)$  față de  $S'$ .

Menționăm că această contracție apare numai după direcția de mișcare deoarece în demonstrație am folosit ipoteza că rigla este așezată în lungul acestei direcții. În cazul în care rigla este așezată perpendicular pe direcția de mișcare  $l = l_0$ , deoarece, conform relației (13.8),  $y' = y$  și  $z' = z$ .

Observăm că rigla are lungimea mai mare în sistemul față de care se află în repaus, denumit *sistem propriu*. Acestei lungimi i se mai spune *lungime proprie* sau *de repaus*.

Deoarece contracția Lorentz are loc numai după direcția de mișcare, un corp care are volumul  $V_0$  în sistemul propriu va avea un volum

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

în sistemul față de care corpul se mișcă cu viteza  $v$ .

Faptul că distanța dintre două puncte apare diferită după cum este considerată într-un *SRI* sau altul (în mișcare față de celălalt), face necesară revizuirea concepțiilor newtoniene asupra spațiului. Într-adevăr, spațiul relativ ca parte componentă a spațiului aparent nu mai poate fi în nici un fel confundat cu acesta limitându-se astfel realitatea fizică a spațiului absolut. Apare clar legătura strinsă între proprietățile spațiului și mișcarea corpurilor materiale. În afară de aceasta, deoarece, conform principiului relativității, prin nici o experiență fizică nu se poate pune în evidență mișcarea unui *SRI* față de altul (deci nici față de spațiul absolut!) rezultă că putem folosi mișcarea sistemelor inerțiale pentru marcarea succesivă prin mijloace fizice a punctelor din spațiu. Aceasta fără doar și poate limitează și mai mult noțiunea de spațiu absolut.

b) **Dilatarea duratelor.** Am văzut că distanțele spațiale au valori diferite în diferite sisteme inerțiale. Apare naturală întrebarea dacă nu cumva și cu duratele se întâmplă același lucru. Pentru aceasta să considerăm două evenimente care au loc în același punct din sistemul ( $S'$ ) la momentele  $t'_1$  și respectiv  $t'_2$  fiind despărțite de intervalul de timp  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ . Notînd cu  $t_2$  și respectiv  $t_1$  momentele corespunzătoare din *SRI* ( $S$ ), față de care ( $S'$ ) se mișcă cu viteza  $v$ , intervalul de timp măsurat în acest sistem va fi  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Conform relațiilor (13.8)

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

unde  $x_1$  și  $x_2$  sînt punctele în care se petrec cele două evenimente pentru un observator din sistemul ( $S$ ), la momentele  $t_1$  și respectiv  $t_2$ .

Scăzînd relațiile de mai sus, obținem

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.10)$$

Diferența  $x_2 - x_1$  o calculăm folosind din nou relațiile (13.8):

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

unde  $x_1'$  și  $x_2'$  sînt punctele din ( $S'$ ) în care au loc cele două evenimente. Deoarece am considerat că aceste evenimente se petrec în același punct din ( $S'$ ),  $x_1' = x_2'$ . Scăzînd ultimele două relații rezultă

$$0 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ adică } x_2 - x_1 = v\Delta t.$$

Introducînd pe  $x_2 - x_1$  în ecuația (13.10), obținem

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t - \frac{v^2}{c^2} \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t$$

sau

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.11)$$

Din formula (13.11) rezultă faptul că intervalul de timp  $\Delta t$  dintre cele două evenimente este mai mare în sistemul ( $S$ ) decît în sistemul ( $S'$ ) (care se mișcă cu viteza  $v$  față de  $S$ ) în care evenimentele au loc în același punct.

Desigur nu ne putem aștepta să putem pune în evidență dilatarea duratei prin efectuarea unei experiențe în sistemele de referință în mișcare rectilinie și uniformă față de Pămînt (automobil, tren, rachetă) care ne stau la dispoziție în mod obișnuit. Într-adevăr în aceste cazuri raportul  $v/c$  este mult mai mic decît unu și deci radicalul  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  poate fi foarte bine aproximat prin unu.

O confirmare experimentală a apărut însă în urma observațiilor efectuate asupra timpului de viață al mezonilor  $\mu$  din radiația cosmică, care se mișcă față de Pămînt cu viteze de aproximativ  $0,9998 c$ . Mezonii  $\mu$  sînt particule instabile care apar în urma ciocnirilor și dezintegrărilor altor particule. Intervalul de timp dintre apariția și dispariția (dezintegrarea) lor se numește timp de viață și poate fi determinat experimental.

Se poate produce mezonii  $\mu$  și în condiții de laborator. Timpul lor de viață măsurat în sistemul legat de Pămînt este aproximativ  $2 \cdot 10^{-6}$  s. Deoarece acești mezonii au viteze mici față de viteza luminii putem considera acest timp de viață ca fiind practic egal cu timpul de viață măsurat în sistemul propriu al mezonilor (sistemul în care acesta este în repaus).

Pe de altă parte se constată că mezonii din radiația cosmică parcurg drumuri de pînă la 30 km între producerea și dezintegrarea lor. Timpul lor de viață măsurat pe Pămînt este de aproximativ  $10^{-4}$  s. Aceasta este o consecință a faptului că, în acest caz, timpul de viață măsurat pe Pămînt nu mai coincide cu timpul propriu de viață. În adevăr punînd în relația (13.11),  $\Delta t_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  s și  $v/c = 0,9998$  obținem  $\Delta t = 10^{-4}$  s.

Pentru a da o interpretare mai intuitivă dilatării duratelor să ne imaginăm următoarea experiență: în sistemul ( $S$ ), în lungul axei  $Ox$ , plasăm mai multe ceasornice la distanțe egale, presupuse cunoscute. Considerăm că ceasurile din sistemul ( $S$ ) sînt sincronizate, adică la orice moment de timp acele

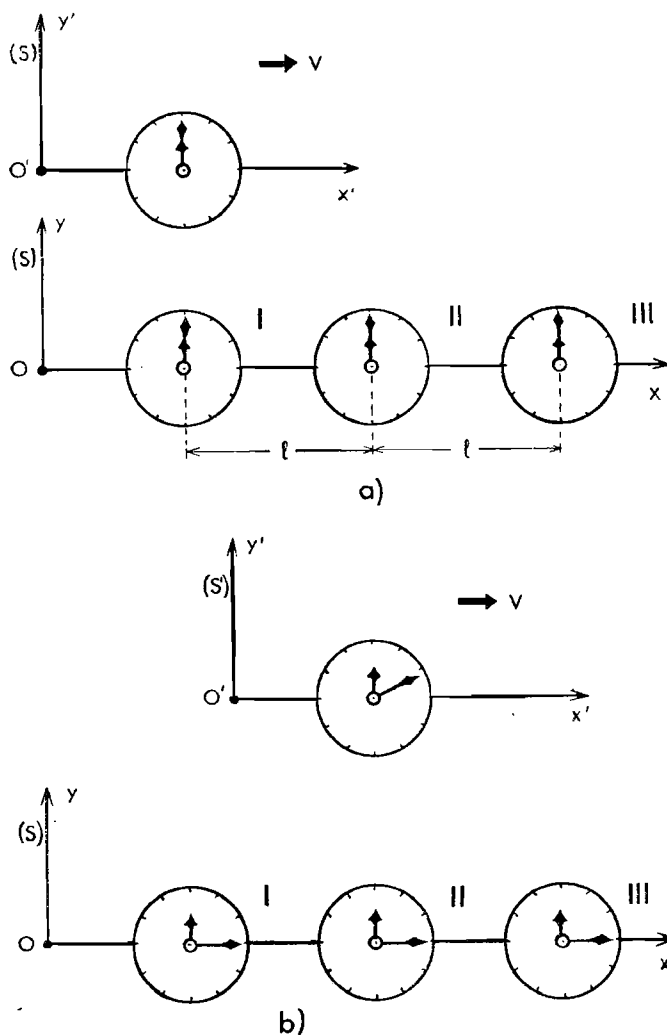


Fig. I.13.5

lor au aceeași poziție. Pentru a sincroniza două ceasuri situate la distanța  $l$  așezăm acele indicatoare ale primului ceas într-o poziție cunoscută, de exemplu ora 0, iar acele celui de al doilea în poziția corespunzătoare orei  $(0 + l/c)$ . În momentul în care pornim primul ceas, trimitem totodată un semnal luminos spre cel de al doilea ceas care va fi pornit în momentul în care este recepționat acest semnal. Atunci cele două ceasuri vor avea indicații identice deoarece luminii i-a fost necesar timpul  $t = l/c$  pentru a străbate distanța dintre cele două ceasuri. Considerăm că la momentul de timp  $t'_1 = t_1 = 0$  ceasornicul din  $(S')$  se găsește în dreptul ceasornicului I din  $(S)$ , ambele indicând ora 0 (fig. I.13.5 a). După un timp  $t'_2 > t'_1$ , ceasul din  $(S')$  ajunge în dreptul ceasului II din  $S$  (fig. I.13.5 b). Comparând indicațiile lor constatăm că ceasul din  $(S')$  a rămas în urmă față de ceasornicele din  $(S)$ .

În general prin ceasornic nu se înțelege neapărat ceasul uzual care funcționează prin destinderea unui resort ci orice fenomen a cărui evoluție periodică ne indică curgerea timpului (§ 13.1). Prin urmare experiența descrisă ne arată că pentru observatorul din sistemul ( $S$ ) fenomenul se desfășoară mai rapid (timpul curge mai repede) în sistemul său propriu, decât în sistemul ( $S'$ ) care se mișcă față de acesta cu viteza  $v$ .

Menționăm că dacă comparăm indicațiile unui ceasornic fix din sistemul ( $S$ ), cu mai multe ceasornice din ( $S'$ ), în repaus față de acesta din urmă, sincronizate după același procedeu ca și mai înainte, vom constata că ceasornicul din ( $S$ ) rămâne în urmă față de ceasornicul din ( $S'$ ). Rezultatul se poate obține printr-un calcul asemănător cu cel anterior, folosind relațiile de transformare (13.8') și condiția  $x_1 = x_2$  (ceasornicul din  $S$  este fixat!). Deci, în acest caz, pentru observatorul din ( $S'$ ) timpul curge mai repede în sistemul său propriu decât în sistemul ( $S$ ).

Punînd întrebarea care dintre cei doi observatori are dreptate rezultă o contradicție aparentă între punctele de vedere ale celor doi observatori cunoscută sub numele de paradoxul ceasornicilor sau paradoxul gemenilor. De fapt această contradicție nu există deoarece întrebarea pusă nu are sens în teoria relativității. Într-adevăr pentru a putea da un răspuns ar trebui să avem la dispoziție un ceas care să măsoare curgerea timpului absolut indicînd astfel care din cei doi observatori are dreptate.

Dacă renunțăm la conceptul de timp absolut ca reprezentînd o noțiune lipsită de conținut fizic (nu se bazează pe fapte reale), paradoxul dispare deoarece cele două puncte de vedere nu pot fi confruntate. Aceasta este o consecință a faptului că nu sînt create condiții echivalente de observații: de fiecare dată în sistemul propriu al observatorului am distribuit mai multe ceasornice, pe cînd în sistemul în mișcare față de observatorul respectiv nu am plasat decât un singur ceas. Pentru a putea compara efectiv rezultatele ar trebui să realizăm condiții echivalente de măsură în ambele sisteme. Aceasta ar însemna să comparăm un ceas dintr-un sistem ( $S'$ ) cu un același ceas din sistemul față de care ( $S'$ ) este în mișcare, adică ceasul din ( $S'$ ) să treacă de două ori prin fața aceluiași ceas din ( $S$ ). Acest lucru nu se poate realiza decât dacă sistemul ( $S'$ ) parcurge o traiectorie închisă, adică se mișcă accelerat, ceea ce înseamnă că ieșim din teoria relativității restrînse ( $S'$ ) nu mai este sistem inerțial). În acest caz problema se rezolvă în cadrul teoriei relativității generale și rezultatul este : ambii observatori, indiferent de sistemul de referință în care se găsesc, constată că timpul curge mai încet în sistemul accelerat ( $S'$ ) decât în sistemul inerțial ( $S$ ). Acum apare deosebit de clar faptul că este o absurditate să ne imaginăm timpul ca ceva rupt de mișcarea corpurilor materiale, conceptul de timp absolut pierzîndu-și orice semnificație.

c) **Legea relativistă de compunere a vitezelor.** În paragraful 3.3 a fost dedusă legea clasică de compunere a vitezelor folosind transformările galileiene. Pentru a găsi legea relativistă va trebui să folosim transformările Lorentz.

Să considerăm un punct material care are coordonatele ( $x, y, z$ ) în  $SRI$  ( $S$ ) și respectiv ( $x', y', z'$ ) în  $SRI$  ( $S'$ ) care se mișcă față de ( $S$ ) rectiliniu și uniform, în lungul axei  $Ox$ , cu viteza  $v$ . Dacă presupunem că punctul material se mișcă paralel cu axa  $Ox$  el va avea viteza  $u = \frac{dx}{dt}$  în sistemul ( $S$ ), respec-

tiv  $u' = \frac{dx'}{dt'}$  în ( $S'$ ).

Scriind transformarea Lorentz pentru coordonata  $x$  (13.8) la momentele de timp  $t$  și respectiv  $t + dt$  avem

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' + dx' = \frac{x + dx - v(t + dt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Scăzând prima relație din cea de a doua obținem

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.12)$$

Analog se obține o relație pentru timp:

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.13)$$

Împărțind membru cu membru relația (13.12) la (13.13) rezultă

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}.$$

Avînd în vedere relațiile de definiție ale lui  $u$  și  $u'$ , din ultima relație obținem legea relativistă de compunere a vitezelor paralele:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (13.14)$$

Se vede imediat că această relație satisface principiul constanței vitezei luminii în vid. Într-adevăr punînd în (13.14)  $u = c$  se obține  $u' = c$ .

### 13.6. DINAMICA RELATIVISTĂ

În paragrafele anterioare am văzut că teoria relativității impune noi concepții asupra spațiului și timpului, care mai departe au condus la o modificare a cinematicii (vezi de exemplu adunarea vitezelor). Deoarece există o strînsă legătură între cinematică și dinamică ne așteptăm ca noua dinamică relativistă să prezinte deosebiri față de dinamica newtoniană.

Aceasta înseamnă că trebuie să analizăm din nou teoria lui Newton pentru a vedea ce se poate menține în continuare și ce trebuie modificat.

Principiul inerției, așa cum a fost formulat de Newton, rămîne valabil. Aceasta rezultă din însuși modul în care am construit teoria relativității, deoarece ne-am folosit de principiul inerției pentru a defini sistemul inerțial.

În al doilea rînd, vom considera în continuare valabilă legea conservării impulsului. Folosind această lege împreună cu legea de compunere relativistă a vitezelor se demonstrează (noi nu o vom face) că masa unui corp nu

mai este o mărime independentă de starea de mișcare a acestuia, fiind dependentă de viteza  $v$  a corpului, după legea:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13.15)$$

unde  $m_0$  este masa pe care o are corpul în sistemul propriu (sistemul față de care se află în repaus). Valoarea  $m_0$  se numește *masă de repaus*, iar  $m(v)$  dat de relația (13.15), *masă de mișcare*.

Așadar impulsul  $p$  al unui corp care se mișcă cu viteza  $v$  este

$$p = m(v) \cdot v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.16)$$

După cum se vede din relația (13.16), spre deosebire de mecanica nerelativistă, impulsul crește cu viteza nu numai datorită factorului  $v$ ; mai mult, la viteze apropiate de viteza luminii, creșterea impulsului se datorește în special creșterii masei.

Legea a II-a a dinamicii așa cum de fapt a enunțat-o Newton rămâne în continuare valabilă, adică

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m(v) \cdot \vec{v}), \quad (13.17)$$

unde  $m(v)$  este dat de relația (13.15). Să observăm însă că în teoria relativității

relația  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$  nu mai este corectă. Într-adevăr deoarece masa  $m$  nu mai este constantă, relația (13.17) nu mai este echivalentă cu relația  $\vec{F} = m\vec{a}$  așa cum se întâmpla în mecanica newtoniană.

Relația (13.15) și următoarele arată de ce în experiența cotidiană nu constatăm abateri de la mecanica newtoniană; la viteze mici față de viteza luminii  $\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 1$  și deci masa de mișcare coincide practic cu cea de repaus. Și în mecanica relativistă masa constituie o măsură a inerției deoarece cu cât masa unui corp este mai mare cu atât este necesară o forță mai mare pentru a schimba starea de mișcare a corpului. Deosebirea față de mecanica clasică constă în faptul că inerția unui corp nu mai este constantă, crescând pe măsură ce crește viteza corpului. Din (13.15) se vede că dacă  $v$  se apropie de  $c$ , masa corpului, adică inerția sa tinde la infinit. Aceasta arată că nici un corp material nu poate avea o viteză mai mare ca viteza luminii și nici măcar nu o poate atinge deoarece în acest caz inerția sa tinzând la infinit ar trebui o forță infinit de mare care să o învingă. Rezultă așadar, că viteza luminii în vid este o viteză limită în univers.

Relația (13.15) ne arată că nu mai are sens să considerăm masa ca o măsură a cantității de materie conținută de corp. Dacă nu ar fi așa am ajunge la concluzia absurdă că un același corp ar avea o anumită cantitate de materie în *SRI* propriu și o altă cantitate de materie într-un *SRI* față de care corpul se mișcă cu viteza  $v$ .

Se știe că în cazul particulelor de lumină (fotoni) impulsul  $p$  al acestora este finit. Aceasta înseamnă că trebuie să considerăm masa de repaus a fotonilor ca fiind nulă deoarece în cazul  $m_0 \neq 0$  făcând  $v = c$  în relația (13.16)



am obține  $p = \frac{m_0 c}{0} = \infty$ . Deoarece am stabilit că masa nu reprezintă o măsură a cantității de materie, faptul că  $m_0 = 0$  pentru fotoni nu indică caracterul imaterial al acestora, cu atât mai mult cu cât conform principiului constanței vitezei în vid, față de orice SRI fotonul are viteza  $c$ , adică nu avem de-a face decât cu masa de mișcare a sa  $m(c)^*$ .

### 13.7. RELAȚIA DINTRE MASĂ ȘI ENERGIE

O altă consecință importantă a variației masei cu viteza este legătura care apare între inerția și energia unui corp.

Dacă  $v/c \ll 1$  atunci dezvoltând în serie obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (13.18)$$

și introducând în (13.15) obținem

$$m \simeq m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} + \dots \text{ sau } \Delta m = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{m_0 v^2}{2} + \dots$$

și înmulțind cu  $c^2$

$$\Delta m \cdot c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

În membrul stîng  $\Delta m$  reprezintă variația masei corpului cînd viteza sa a crescut de la zero la  $v$ , iar în membrul drept (conform mecanicii newtoniene) avem energia cinetică a unui corp de masă  $m_0$  și viteza  $v$  adică tocmai variația  $\Delta E$  a energiei corpului cînd acesta este scos din starea de repaus și accelerat pînă capătă viteza  $v$ . Putem deci scrie

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2. \quad (13.19)$$

Din această relație rezultă că dacă un corp primește energia  $\Delta E$  dinafară, masa sa crește cu cantitatea  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Trebuie observat că deși relația (13.19) a fost stabilită prin evaluarea variației energiei mecanice, ea este absolut generală fiind valabilă indiferent de natura energiei absorbită sau cedată de corp (mecanică, termică, electromagnetică etc.). Dacă prin cîntărirea unui corp înainte și după încălzirea sa nu vom observa o creștere a masei sale aceasta se datorește faptului că modificarea este atât de mică încît nu poate fi observată nici cu cele mai precise cîntare. Spre exemplu, încălzind 1 kg apă de la  $0^\circ \text{C}$  la  $100^\circ \text{C}$  energia calorică pe care o primește (vezi II. § 2.6) este  $100 \text{ kcal} = 4,18 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Împărțind aceasta cu  $c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ (m/s)}^2$  obținem  $\Delta m = 4,64 \cdot 10^{-9} \text{ g}$ , adică masa de 1 kg apă prin încălzire cu  $100^\circ \text{C}$  crește cu aproximativ 5 miliardimi de gram. De aceea în calorimetrie se con-

---

\* Faptul că  $m(c) = \frac{0}{0}$  (conform 13.15) este finit va fi arătat mai tîrziu.

sideră că energia apei a crescut în timp ce masa a rămas nemodificată. Bineînțeles aceasta nu este riguros adevărat însă este admisibil din punct de vedere practic.

Procese care au loc în reactori constituie o confirmare directă a acestei formule. Astfel la fisiunea unui gram de uraniu  $U^{235}$  apare un defect de masă (vezi V § 6.6), producându-se o energie egală cu cea care se obține prin arderea a 20 t de cărbune.

Relația (13.19) ne arată totodată că în teoria relativității nu este necesară postularea separată a legilor de conservare pentru energie și pentru masă ca în cazul nerelativist. Într-adevăr din faptul că pentru un sistem izolat de corpuri energia rămâne neschimbată ( $\Delta E = 0$ ) rezultă că nici masa sistemului nu se schimbă ( $\Delta m = 0$ ). În mod obișnuit se postulează legea conservării energiei care implică automat conservarea masei.

Din această cauză se poate afirma că energia  $E$  conținută de un corp de masă  $m$  este produsul dintre masa sa și  $c^2$ :

$$E = mc^2. \quad (13.20)$$

Relația (13.20) se poate deduce în felul următor: presupunem că asupra corpului de masă  $m$  acționează o forță  $\vec{F}$  pe care, pentru simplitate, o vom considera în lungul direcției ( $\vec{v}$ ) după care acesta se mișcă. Conform relației (4.19) variația energiei în unitatea de timp (puterea) este:

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v$$

Introducând aici  $F$  dat de relația (13.17) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= v \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] = \\ &= m_0 v \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{c^2 (1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \right] \end{aligned}$$

sau

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt},$$

adică relația dintre diferențiale este

$$dE = m_0 \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv.$$

Notînd cu  $E_0$  energia corpului în repaus (pentru  $v = 0$ ) și  $E_1$  energia corespunzătoare vitezei oarecare  $v_1$ , integrînd ultima relație între aceste limite avem

$$\int_{E_0}^{E_1} dE = m_0 \int_0^{v_1} \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv = m_0 c^2 \int_0^{v_1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)' dv.$$

sau

$$E_1 - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - m_0 c^2 = m(v_1) c^2 - m_0 c^2. \quad (13.21)$$

Observăm că variația funcției  $m(v) \cdot c^2$  ne dă variația energiei corpului. Vom numi deci energia totală a corpului care se mișcă cu viteza  $v$  chiar funcția  $m(v) c^2$  (relația 13.20). Termenul  $E_0 = m_0 c^2$  reprezintă energia totală a corpului în repaus și se numește *energie de repaus*.

Atragem atenția că relația (13.21) se poate scrie și sub forma  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$  ceea ce ne arată că relația (13.19) este corectă pentru orice viteză a corpului (mai mică decât  $c$ ).

Ridicînd la pătrat membru cu membru relația (13.20) și folosind (13.15) avem

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2}, \quad (13.22)$$

ridicînd apoi și relația (13.16) la pătrat și adunînd atît în membrul stîng cît și în membrul drept  $m_0^2 \cdot c^4$  obținem

$$p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} + m_0^2 c^4$$

sau

$$p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2}. \quad (13.23)$$

Comparînd relațiile (13.22) și (13.23) rezultă relația dintre energie și impuls:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (13.24)$$

În cazul fotonilor,  $m_0 = 0$  și deci se obține

$$E = pc. \quad (13.25)$$

Masa de mișcare a fotonilor va fi deci

$$m(c) = \frac{p}{c} = \frac{E}{c^2}.$$

După cum se știe din studiul efectului fotoelectric (vezi IV § 4.1) energia unui foton este  $h\nu$  unde  $h$  este constanta lui Planck, iar  $\nu$  frecvența luminii, adică  $m(c) = h\nu/c^2$ .

## PROBLEME

1. Un corp situat la înălțimea  $h$  este lansat cu o viteză inițială  $\vec{v}_0$  care formează un unghi  $\alpha$  cu orizontala. Să se calculeze: a) ecuațiile de mișcare; b) traiectoria; c) distanța  $x_{max}$  dintre verticala locului de lansare și punctul de

cădere pe sol; d) să se discute rezultatele, considerându-i pe  $\alpha$  și  $h$  drept parametri.

**R:** a), b) Se folosesc relațiile generale (2.44)–(2.46) cu  $a_0 = g$  și condițiile inițiale  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = h$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  și  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . c) Distanța  $x_{max}$  se obține intersectiind parabola, care reprezintă traiectoria, cu dreapta  $y = 0$ , de unde

$$x_{max} = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} v_0 \cos \alpha.$$

d) Se observă că pentru  $h = 0$  și  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  se obțin rezultatele din cazul aruncării după verticală, iar pentru  $h = 0$  și  $\alpha \neq 0$  avem cazul aruncării de pe sol sub un unghi  $\alpha$ . În sfârșit, în cazul  $h \neq 0$  și  $\alpha = 0$  obținem aruncarea după orizontală.

2. Să se calculeze accelerația gravitațională la suprafața Soarelui și respectiv a Lunii, neglijându-se mișcarea de rotație a acestora. Se va considera  $M_{Soare} = 324\,439 M_{Pământ}$ ,  $R_{Soare} = 108 R_{Pământ}$ ,  $M_{Lună} = 0,01255 M_{Pământ}$  și  $R_{Lună} = 0,273 R_{Pământ}$ , iar  $g_{Pământ} = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**R:**  $g_{Soare} = 272,84 \text{ m/s}^2$ ,  $g_{Lună} = 1,65 \text{ m/s}^2$ .

3. Un corp de masă  $m = 4 \text{ kg}$  este suspendat de cârligul unui dinamometru care, la rîndul său, este fixat de tavanul unui ascensor. Care vor fi indicațiile dinamometrului în următoarele situații: a) ascensorul urcă uniform accelerat cu  $a_0 = 0,75 \text{ m/s}^2$ ; b) ascensorul cade liber (cablul rupt); c) ascensorul se mișcă uniform. Să se explice de ce în acest ultim caz indicația dinamometrului nu depinde de viteza constantă a ascensorului. Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**R:** În sistemul neinertial legat de ascensor, asupra corpului acționează pe lângă greutatea  $G = mg$  și forța de inerție  $F_0 = ma_0$  (vezi relația (3.101)). Conform relației (3.100), dinamometrul va indica:

a)  $F = m(g + a_0) = 43 \text{ N}$ ; b)  $F = 0$ ; c)  $F = mg = 40 \text{ N}$ .

4. O drezină cu patru roți, avînd împreună cu pasagerii masa  $m = 1500 \text{ kg}$ , se mișcă pe o linie ferată orizontală cu viteza de  $72 \text{ km/h}$ . Să se calculeze: a) forța minimă cu care fiecare sabot de frînare trebuie să apese asupra roții respective pentru a o bloca; b) distanța parcursă prin alunecare, cu roțile blocate, pînă la oprirea drezinei; c) puterea medie consumată prin frecare. Se consideră  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , coeficientul de frecare roată-sabot  $\mu_1 = 0,2$ , iar coeficientul de frecare roată-șină  $\mu_2 = 0,1$ .

**R:** a) Roata se blochează atunci cînd momentele celor două forțe de frecare sînt egale, adică  $\mu_1 F_{min} = \mu_2 \frac{G}{4}$ , deci  $F_{min} = 1875 \text{ N}$ ; b) conform relației (4.36) se obține  $d =$

$$= v_0^2 / 2 \mu_2 g = 200 \text{ m}; \text{ c) } P_{med} = \mu_2 G v_{med} = \mu_2 mg \frac{v_0}{2} = 15 \text{ kW}.$$

5. Un pendul bate secunda la ecuator, la nivelul mării. a) Cîte oscilații complete face în plus în timp de  $24 \text{ h}$  la pol față de ecuator? b) La ce altitudine deasupra polului trebuie dus pendulul pentru a avea aceeași perioadă de oscilație ca la ecuator?

**R:** a) Numărul de oscilații complete  $N = \frac{24 \cdot 3600}{T_{pol}}$ , unde  $T_{pol} = \sqrt{g_{ec}/g_{pol}}$ , iar din relația (3.117a), cu  $g_{pol} = 9,831 \text{ m/s}^2$ , rezultă  $g_{ec} = 9,781 \text{ m/s}^2$  și deci  $\Delta N = N_{pol} - N_{ec} = 113$ ; b)  $h = 16,2752 \text{ km}$ .

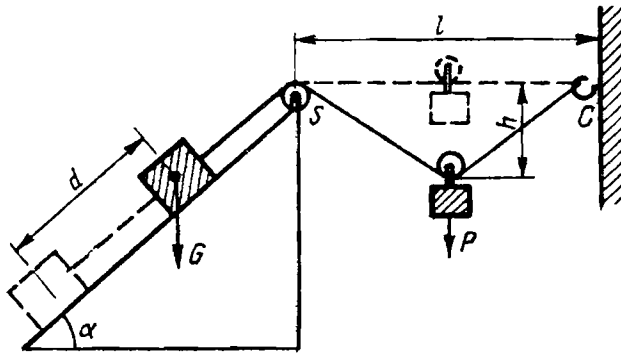


Fig. I.P.1

6. Pe un plan înclinat, care formează unghiul  $\alpha$  cu orizontala, se găsește un corp de greutate  $G$  (fig I. P.1). Corpul este susținut de un fir trecut printr-un scripete fix  $S$  și agățat de un cârlig  $C$  care se află la distanța  $l$  de scripetele fix și la aceeași înălțime cu el. La mijlocul distanței  $SC$  se găsește un scripete mobil de care se suspendă o greutate  $P$  sub acțiunea căreia sistemul mobil-corp se pune în mișcare. Considerând că coeficientul de frecare dintre corp și plan este  $\mu$ , să se găsească distanța  $h$  parcursă de  $P$  pentru stabilirea echilibrului.

**R:** Folosim relația (4.36) în care variația energiei totale a sistemului este  $W = -Ph + Gd \sin \alpha$  (energia cinetică este zero atât la suspendarea greutății  $P$ , cât și în poziția de echilibru,  $\Delta W_c = 0$ ), iar lucrul mecanic datorat frecării  $\mathcal{L}_f = -\mu Gd \cos \alpha$ . Din teorema lui Pitagora rezultă  $\left(\frac{l+d}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4} + h^2$  și eliminând pe  $d$  din cele două ecuații obținute se găsește

$$h = \frac{2 PG(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{4 G^2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)^2 - P^2} l.$$

7. Să se discute rezultatul problemei precedente în funcție de valorile raportului  $P/G$  (pentru  $\alpha$  și  $\mu$  fixați). Dacă  $P/G = 1$  și  $\alpha$  fixat, care este unghiul de frecare minim pentru care corpul se oprește pe plan?

**R:** Problema are sens pentru valori finite și pozitive ale lui  $h$ , adică pentru  $\frac{P}{G} < 2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$  în primul caz, iar în cazul  $P = G$  este necesar ca  $\mu > \frac{1 - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$ .

8. O ladă cu nisip, de masă  $M = 5$  kg, este suspendată cu un cablu formînd un pendul balistic. Să se determine viteza unui glonte de masă  $m = 20$  g, care, pătrunzînd în ladă, o ridică la o înălțime  $h = 12,8$  cm. Se consideră  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

**R:** Se scrie conservarea impulsului pentru ciocnirea inelastică glonte-ladă și apoi legea conservării energiei pentru pendul balistic:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 gh} \simeq \frac{M}{m} \sqrt{2 gh} = 400 \text{ m/s.}$$

9. O mașină Atwood (fig. I.3.13) are masele identice  $M = 100$  g, masa suplimentară fiind  $m = 10$  g. Scripetele are masa  $M' = 20$  g. Ținînd seama de

energia cinetică ce revine rotației scripetelui, să se calculeze accelerația  $a$  cu care se mișcă sistemul datorită masei suplimentare  $m$ .

**R:** Conform (3.25) și (5.18), momentul cinetic total va fi  $L_{tot} = 2MvR + mvR + \mathcal{J}\omega_- = \left[ (2M + m)R + \frac{\mathcal{J}}{R} \right] v$  ( $v = \omega R$  deoarece firul nu alunecă pe șanțul scripetelui). Momentul forței este  $\mathfrak{M} = mgR$  și, conform (3.30), avem  $\frac{dL_{tot}}{dt} = \mathfrak{M} \Rightarrow \left( 2M + m + \frac{\mathcal{J}}{R^2} \right) a = mg$

Momentul de inerție al discului scripetelui este  $\mathcal{J} = \frac{1}{2} M' R^2$ , deci

$$a = \frac{m}{2M + m + \frac{1}{2} M'} g = 0,45 \text{ m/s}^2.$$

10. Un pendul Maxwell este format dintr-un disc de masă  $M = 300 \text{ g}$  și rază  $R = 20 \text{ cm}$ , centrat pe un ax de masă  $m = 200 \text{ g}$  și rază  $r = 2 \text{ cm}$ . Considerînd că i se dă drumul de la înălțimea  $h = 100 \text{ cm}$  deasupra poziției de echilibru, să se calculeze viteza unghiulară cu care discul ajunge în poziția de echilibru.

**R:** La înălțimea  $h$  pendulul are  $W_p = (M + m)gh$  și  $W_c = 0$ . În dreptul poziției de echilibru  $W_p = 0$  și, conform (5.26),  $W_c = \frac{1}{2} (m + M)r^2\omega^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)\omega^2$ . Am ținut seama că, datorită derulării firelor, axa instantanee de rotație coincide cu o generatoare a axului de rază  $r$ , sistemul fiind compus din axul de moment de inerție  $\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2} mr^2$  și discul de moment de inerție  $\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} MR^2$ . Scriind legea conservării energiei se obține

$$\omega = \sqrt{\frac{4(m + M)gh}{M(2r^2 + R^2) + 3mr^2}} \simeq 40 \text{ rad/s}.$$

11. Să se dimensioneze o bară de oțel de lungime  $l = 100 \text{ m}$  și densitate  $7,85 \text{ kg/dm}^3$ , cu  $\sigma_a = 10^4 \text{ N/cm}^2$ , care are de suportat o forță de întindere  $F =$

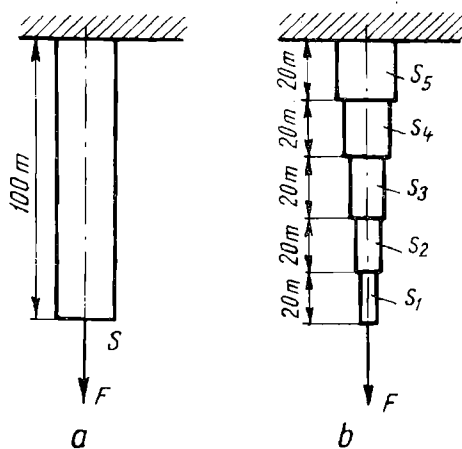


Fig. 1.P.2

$= 2 \cdot 10^5 \text{ N}$  în următoarele condiții (fig. I.P.2): a) se face de secțiune constantă; b) se face din 5 porțiuni de lungimi egale. Se ia  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**R:** Folosind formula  $S_{nec} = \frac{F}{\sigma_a - \rho g l}$  (§ 7.5) avem (vezi și figura):

a)  $S = 21,704 \text{ cm}^2$  și greutatea barei va fi  $G = 1703,76 \text{ kg}$ .

b) Se aplică succesiv relația începând cu porțiunea cea mai de jos a barei; pentru porțiunile următoare se adaugă la numărătorul  $F$  greutatea porțiunilor de bară aflate dedesubt. Se obține:

$S_1 = 20,319 \text{ cm}^2$ ,  $G_1 = 319,01 \text{ kg}$ ,  $S_2 = 20,643 \text{ cm}^2$ ,  $G_2 = 324,09 \text{ kg}$ .

$S_3 = 20,972 \text{ cm}^2$ ,  $G_3 = 329,26 \text{ kg}$ ,  $S_4 = 21,307 \text{ cm}^2$ ,  $G_4 = 334,52 \text{ kg}$ ,

$S_5 = 21,647 \text{ cm}^2$ ,  $G_5 = 339,86 \text{ kg}$ .

Greutatea totală a barei este în acest caz  $G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 = 1646,74 \text{ kg}$ , deci mai mică decât în primul caz.

12. Să se găsească în ce condiții cântărirea cu o balanță zecimală nu depinde de poziția corpului pe platforma  $DE$  (fig. I.8.5).

**R:** În tijele  $BD$ ,  $CF$  și în cuțitele  $E$  și  $G$  introducem forțele și reacțiunile  $Q_1$ ,  $Q_3$ ,  $Q_2$  și respectiv  $Q_4$ . Scriind condițiile de echilibru pentru momentele față de punctele  $G$ ,  $E$ ,  $D$  și respectiv  $O$ , obținem

$$Q_3 = Q_2 \frac{E'G}{FG}, \quad Q_1 = Q \frac{DE - d}{DE}, \quad Q_2 = Q \frac{d}{DE} \quad \text{și}$$

$$P = \frac{OBQ_1 + OCQ_3}{OA} = \frac{Q}{OA} \left[ OB + \left( \frac{OC}{DE} \cdot \frac{E'G}{FG} - \frac{OB}{DE} \right) d \right].$$

Condiția ca rezultatul cântării să nu depindă de  $d$  (distanța de la greutatea  $Q$  la capătul  $D$  al platformei), este

$$\frac{E'G}{FG} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow P = \frac{OB}{OA} Q.$$

13. Un om cu masa de  $70 \text{ kg}$  susține, cu ajutorul unui fir petrecut peste un scripete fix, o greutate  $R = 300 \text{ N}$  (fig. I.P.3). Presupunând discul scripetelui având diametrul  $D = 30 \text{ cm}$ , axul său  $d = 4 \text{ cm}$  și coeficientul de frecare cu axul

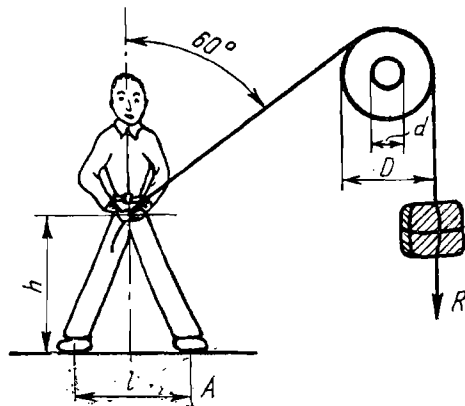


Fig. I.P.3

fiind  $\mu = 0,2$ , se cere: a) forța cu care omul apasă asupra solului când firul este în poziție verticală și respectiv, formează un unghi de  $60^\circ$  cu verticala; b) care este distanța minimă dintre tălpile omului în cel de-al doilea caz pentru ca să nu se răstoarne. Se consideră că firul și picioarele omului se află în același plan vertical și că firul întâlnește verticala care trece prin centrul de greutate al omului la înălțimea  $h = 1,2$  m.

**R:** a) În cazul firului vertical folosind relația (8.11) avem  $F = 316,5$  N și forța de apăsare  $F = G - F = 369,5$  N. În cazul în care firul formează un unghi de  $60^\circ$  cu verticala,  $(F - R)^2 D^2 = \mu^2 d^2 N^2$ , cu  $N^2 = F^2 + R^2 + 2RF \cos \alpha$ . Eliminând pe  $N$  rezultă  $F = 314,18$  N și deci  $F_a = 528,91$  N.

b) Scriind momentele de rotație față de punctul  $A$  avem condiția  $(G - F \cos \alpha) \frac{l}{2} \geq$

$$\geq Fh \sin \alpha \Rightarrow l \geq \frac{2 Fh \sin \alpha}{G - F \cos \alpha} \simeq 1,23 \text{ m.}$$

14. O drezină ajunge, cu o viteză  $v_0 = 36$  km/h, în vârful unei pante avînd o denivelare de 10 cm pe metru liniar. În acest moment oprește motorul și blochează roțile. Se cere: a) care este coeficientul de frecare  $\mu$  dintre roți și șine dacă drezina coboară panta cu viteza uniformă de 36 km/h; b) folosind  $\mu$  găsit mai înainte, să se găsească ce denivelare ar trebui să aibă panta pentru ca drezina să se oprească după ce parcurge distanța  $s = 100$  m în lungul pantei:

**R:** a) Notînd cu  $\alpha$  unghiul de înclinare al pantei, avem  $\tan \alpha = \frac{10 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0,1$ , deci

$\mu = \tan \alpha = 0,1$ ; b) accelerația de frinare este  $a = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$  și trebuie să avem  $v_0^2 = 2as$ , de unde rezultă  $\alpha \simeq 2^\circ 52'$ , deci  $\tan \alpha \simeq 0,05$ .

15. Care trebuie să fie pasul unui șurub cu diametrul  $d = 10$  mm pentru a nu se desface singur, dacă coeficientul de frecare dintre acesta și piuliță este  $\mu = 0,05$ ?

**R:** Din (8.26) se obține  $\mu \geq \tan \alpha$ , unde  $\tan \alpha = \frac{h}{\pi d}$ , deci  $h \leq \pi d \mu = 1,57$  mm.

16. Un corp de masă  $m = 1$  kg parcurge o distanță  $l = 20$  m alunecînd cu frecare pe un plan înclinat cu  $\alpha = 30^\circ$  față de orizontală. Știind că în punctul  $B$  energia cinetică a corpului este jumătate din energia sa potențială din  $A$ , să se calculeze coeficientul de frecare  $\mu$  dintre corp și planul înclinat, precum și viteza  $v_B$  cu care ajunge în  $B$  (fig. I.P.4).

Considerînd apoi că din  $B$  corpul cade într-un bazin cu apă și că densitatea sa este  $\rho_c = 500$  kg/m<sup>3</sup>, să se determine pînă la ce adîncime se poate cufunda corpul. Se dau densitatea apei  $\rho_a = 1000$  kg/m<sup>3</sup> și  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

**R:** Din (4.36) și din condiția  $W_c(B) = \frac{1}{2} W_p(A)$  rezultă  $\frac{1}{2} mgh = \mu lG \cos \alpha$ , deci

$\mu = \frac{1}{2} \tan \alpha = 0,288$ , iar  $v_B = \sqrt{gh} = 10$  m/s. Ținînd seama de forța arhimedică, se

scrie relația  $ma = mg - m'g = (\rho_c - \rho_a)Vg$ , deci  $a = -10$  m/s<sup>2</sup> și mișcarea este uniform încetinită cu viteza inițială  $v_{0y} = v_B \sin \alpha = 5$  m/s. Din relația  $v = v_0 - gt = 0$

se obține timpul  $t = v_0/g$  scurs pînă la oprire, deci  $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 1,25$  m.



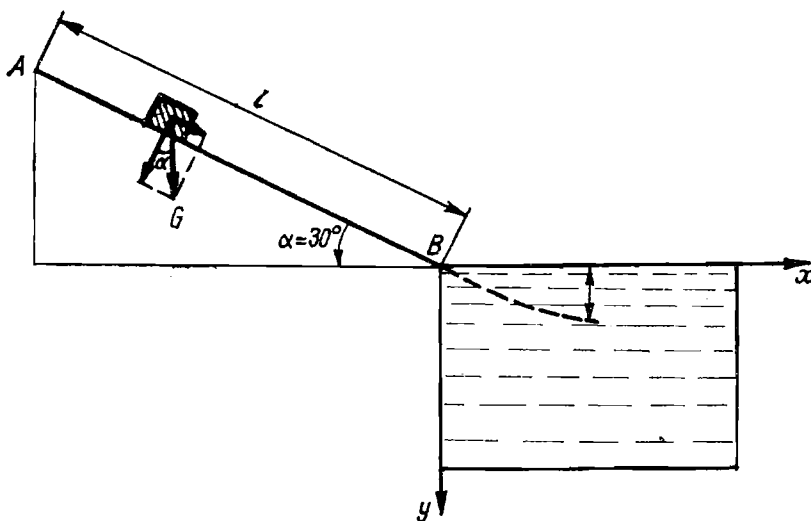


Fig. I.P.4

17. Să se determine diferența de masă dintre două sfere de raze  $R_1 = 0,2$  m și respectiv  $R_2 = 0,1$  m care, suspendate la capetele unei balanțe cu brațe egale, stau în echilibru în aer la  $0^\circ\text{C}$ . Se dă densitatea aerului la  $0^\circ\text{C}$ ,

$$\rho_{\text{aer}} = 1,3 \text{ kg/m}^3.$$

R: = Conform (9.19),  $m = m_1 - m_2 = 38,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \approx 38,22 \text{ g}$ .

18. Față de sistemul inerțial  $S$  o particulă se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza  $u$ . Componentele vitezei sînt  $u_x$  și  $u_y$ . Presupunînd că, față de un alt sistem  $S'$ , sistemul  $S$  se mișcă cu viteza  $v$  în lungul axei  $Ox$ , să se găsească componentele  $u'_x$  și  $u'_y$  ale vitezei particulei față de sistemul  $S'$ .

R: Alegînd axele de coordonate ale sistemului  $S'$  paralele cu cele ale sistemului  $S$ , se reproduc calculele care au condus la formula (13.14) și se obține

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Pentru componenta  $u'_y$ , perpendiculară pe  $\vec{v}$  se utilizează aceeași metodă. Avînd în vedere că  $dy' = dy$  și că  $dt'$  este dat de (13.13), obținem

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$



**II**

## **Căldură și fizică moleculară**



# 1. Bazele experimentale ale teoriei cinetico-moleculare

## 1.1. INTRODUCERE

Teoria atomistă afirmă că substanța are o structură granulară: corpurile sînt formate din particule foarte mici — *atomii* — care se află în continuă mișcare. Atomii se pot găsi fie izolați (cazul elementelor), fie asociați în formații mai complexe — *moleculele* (cazul substanțelor simple și al celor compuse). Moleculele sînt cei mai mici constituenți ai unei substanțe care-i păstrează proprietățile chimice.

Fizica modernă posedă mijloace de investigare directă a moleculelor și caracterizează o moleculă printr-un număr de mărimi denumite *constante moleculare*. Una dintre aceste constante este *masa moleculei*, egală cu suma maselor atomilor componenți; celelalte se împart în *constante geometrice* și *constante energetice*. Constantele geometrice caracterizează dimensiunile și forma moleculei, așezarea spațială a atomilor, distribuția sarcinilor electrice în cadrul moleculei. Principalele constante energetice sînt spectrele de radiație pe care le poate emite sau absorbi molecula și energiile (căldurile) de disociere.

Mișcarea permanentă și dezordonată a atomilor și moleculelor din interiorul corpurilor este denumită *mișcare termică* sau *agitație termică*. Existența ei se manifestă în majoritatea fenomenelor fizice. Astfel, chiar simpla deplasare a unui corp într-un mediu dat nu este un fenomen pur mecanic, ea fiind însoțită de fenomene termice.

Mișcarea termică se bazează pe mișcarea mecanică, însă reprezintă o formă calitativ diferită de mișcare, pentru care comportarea individuală a moleculelor este nesemnificativă, determinante fiind proprietățile medii ale ansamblului de molecule. Cunoștințele despre fenomenele termice sînt conținute în cîteva legi particulare, specifice stărilor de agregare (de exemplu, pentru gaze, legea Boyle-Mariotte) și în cele trei principii ale termodinamicii—legi generale, valabile pentru transformări diferite ale unor sisteme de naturi complet diferite.

## 1.2. LEGILE COMBINĂRII CHIMICE — DOVEZI ALE EXISTENȚEI ATOMILOR ȘI MOLECULELOR. IPOTEZA LUI AVOGADRO

Pînă în secolul al XIX-lea, concepția atomistă era în bună parte doar o ipoteză. La începutul secolului trecut, ea a fost folosită direct de fizicieni și chimiști pentru înțelegerea unor fapte experimentale. Este vorba în primul

rînd de experiențe de chimie al căror rod au fost *legea proporțiilor definite* și *legea proporțiilor multiple*. Prima lege evidențiază faptul că la formarea unui compus chimic substanțele se combină numai în proporții determinate. Legea proporțiilor multiple (legea lui Dalton, 1803) afirmă că atunci cînd două substanțe se combină în mai multe moduri, o cantitate  $x$  dintr-o substanță reacționează cu cantități determinate  $y_1, y_2, y_3$  din a doua substanță, care se raportează între ele ca numere întregi mici. Aceste legi au putut fi explicate admitînd că la baza reacțiilor chimice stă combinarea atomilor.

În relație directă cu legea lui Dalton se află *legea volumelor*, valabilă pentru gaze (Gay-Lussac, 1808): volumele gazelor care intră în reacție chimică și volumele gazelor care rezultă din reacție se află între ele ca rapoarte de numere întregi (1 : 1 sau 1 : 2 sau 2 : 3 etc.). Teoria atomistă a înregistrat un eșec în explicarea acestei legi pînă la adoptarea ideilor lui Avogadro conform cărora:

a) substanțele sînt formate din atomi sau molecule\*

b) volume egale de gaze diferite, aflate în condiții identice, conțin același număr de molecule (ipoteza lui Avogadro, 1811).

Pentru ilustrare să considerăm reacția simplă de formare a acidului clorhidric, în care dintr-un volum de hidrogen și un volum de clor rezultă două volume de acid clorhidric. Reacția, caracterizată deci prin rapoartele de volume 1 : 2, 1 : 2, poate fi înțeleasă pe baza ipotezei lui Avogadro, admitînd că gazele care intră în reacție sînt biatomice ( $H_2 + Cl_2 = 2 HCl$ ).

Legile reacțiilor chimice au putut fi deci explicate în totalitate de teoria atomistă, devenind astfel dovezi puternice în sprijinul ei. În plus, pe baza lor a devenit posibilă determinarea maselor relative ale atomilor.

### 1.3. MASE MOLECULARE RELATIVE. UNITATEA ATOMICĂ DE MASĂ. MOLECULA-GRAM. NUMĂRUL LUI AVOGADRO

Masele relative ale atomilor și moleculelor pot fi măsurate prin metode chimice și fizice\*\*. Prin convenție, *masa atomică (moleculară) relativă a unui atom (sau a unei molecule) este numărul care arată de cîte ori masa atomului respectiv (sau a moleculei respective) este mai mare decît a douăsprezecea parte din masa izotopului 12 al carbonului ( $^{12}_6C$ )*. Ca urmare, masa atomică relativă a izotopului 12 al carbonului este 12. Masa moleculară relativă a unei substanțe va fi notată cu  $\mu$ .

A douăsprezecea parte din masa izotopului 12 al carbonului se numește *unitate atomică de masă* — a.m.u. în notația internațională\*\*\*. Valoarea ei, exprimată în grame, este:

$$1 \text{ a.m.u.} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g.} \quad (1.1)$$

Evident, valorile numerice ale maselor moleculare absolute exprimate în a.m.u. coincid cu valorile maselor moleculare relative. Avem deci relația: masa (absolută) a unei molecule exprimată în grame =  $\mu \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$  (1.2)

\* Pînă la Avogadro nu se făcea distincție între atomi și molecule.

\*\* Pentru măsurători absolute ale maselor atomilor vezi partea a V-a.

\*\*\* a.m.u. = atomic mass unit (în limba engleză).

Este avantajos adeseori să se lucreze cu cantități din substanțe diferite care conțin același număr de molecule. Îndeplinim acest deziderat dacă luăm substanțele în cantități ale căror mase să fie proporționale cu masele moleculare relative. Într-adevăr, fie două substanțe  $A$  și  $B$ , în cantități  $M_A$  și  $M_B$ , astfel încît  $\frac{M_A}{M_B} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$ . Numărul de atomi conținut în fiecare cantitate de substanță este  $N_A = \frac{M_A}{m_A}$  și  $N_B = \frac{M_B}{m_B}$ , unde  $m_A$  și  $m_B$  sînt masele absolute ale moleculelor din cele două substanțe. Avem deci  $\frac{N_A}{N_B} = \frac{\mu_A}{\mu_B} \cdot \frac{m_B}{m_A}$

și, pe baza relației (1.2),  $N_A = N_B$ . În particular, proprietatea anterioară este îndeplinită dacă din fiecare substanță luăm *un mol* (moleculă-gram), adică o cantitate de substanță a cărei masă exprimată în grame este numeric egală cu masa moleculară relativă a ei. Dacă notăm cu  $\mathcal{M}$  masa unui mol într-o substanță (masa molară), rezultă că

$$\mathcal{M} \text{ exprimat în grame} = \text{masa moleculară relativă } \mu. \quad (1.3)$$

Orice cantitate de substanță poate fi exprimată în moli. Între masa ei  $M$  și numărul de moli  $n$ , conținut, există evident relația:

$$M = n\mathcal{M}. \quad (1.4)$$

Reținem deci că *moleculele-gram ale diferitelor substanțe conțin același număr de molecule*.

Cunoscînd valoarea  $m_0$  a unității atomice de masă exprimată în grame [ $m_0 = 1,66 \cdot 10^{-24}$ , conform (1.1)], se poate calcula valoarea numărului  $\mathcal{N}$  de molecule dintr-un mol. Avem relația:

$$m = \mathcal{N} \cdot \text{masa unei molecule}. \quad (1.5)$$

Dacă cele două mase din (1.5) le exprimăm în grame, atunci pe baza relațiilor (1.3) și (1.2) găsim

$$\mu = \mathcal{N} \mu \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \rightarrow \mathcal{N} \approx 6,02 \cdot 10^{23}. \quad (1.6)$$

Numărul  $\mathcal{N}$  de molecule dintr-un mol se numește *numărul lui Avogadro* și este una din constantele fundamentale ale lumii microscopice. Numărul lui Avogadro are dimensiunea inversului masei, deoarece reprezintă un număr de molecule dintr-o masă anumită de substanță. Unitatea în care se măsoară este  $\text{mol}^{-1}$ .

Observăm că (1.6) se poate scrie și în forma  $\mathcal{N} = \frac{1}{m_0}$ , fiind o relație directă între valoarea numărului lui Avogadro și valoarea unității atomice de masă, exprimată în grame. Cunoașterea uneia din mărimi dă informații despre cealaltă.

Numărul lui Avogadro a fost determinat prin metode foarte diferite, care au dus la rezultate concordante. Valoarea general acceptată pentru numărul lui Avogadro este

$$\mathcal{N} = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (1.7)$$

Numărul  $N$  de molecule dintr-o cantitate formată din  $n$  moli de substanță este  $N = n\mathcal{N}$ .

Molii diferitelor substanțe ocupă, în general, în condiții date, volume diferite, condiționate mai ales de starea de agregare în care se află substanța. Volumul ocupat de un mol de substanță se numește *volum molar*.

*Pentru substanțe aflate în stare gazoasă experiența arată că volumul molar este independent de natura substanței.* Ținând seama de faptul că moleculele-gram conțin același număr de molecule, rezultă *legea lui Avogadro: volume egale de gaze diferite, luate în aceleași condiții de presiune și temperatură, conțin același număr de molecule.* La temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$  și presiunea de 1 atm (condiții normale) volumul molar al substanțelor gazoase are valoarea  $v_g = 22,4 \text{ l/mol}$ . În aceleași condiții, un mol de gheață ocupă doar aproximativ  $18 \text{ cm}^3$ . Numărul de molecule dintr-un centimetru cub de gaz în condiții normale se numește numărul lui Loschmidt, se notează cu  $n_0$  și are valoarea

$$n_0 = \frac{\mathcal{N}}{v_g} \approx 2,7 \cdot 10^{19} \text{ molecule/cm}^3. \quad (1.8)$$

În condițiile date, într-un centimetru cub de apă se află aproximativ  $3,34 \cdot 10^{23}$  molecule.

Cunoașterea numărului lui Avogadro ne permite să ne facem o idee despre dimensiunile moleculelor. Un mol de apă (18 g de apă) la  $4^{\circ}\text{C}$  și presiune normală ocupă un volum de  $18 \text{ cm}^3$ . Fiecărei molecule îi revine un volum de

$$\frac{18}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ cm}^3 \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3. \text{ Presupunînd că molecula ocupă efectiv}$$

acest volum, rezultă că dimensiunile liniare ale moleculei sînt de ordinul

$$\sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23}} \text{ cm} \cong 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ \AA}.$$

#### 1.4. DIFUZIA ȘI MIȘCAREA BROWNIANĂ — DOVEZI ALE MIȘCĂRII MOLECULARE

*Difuzia moleculară* constituie una din dovezile cele mai simple ale existenței agitației termice. Fenomenul constă în amestecarea, fără intervenție din afară, a unor substanțe inițial separate, puse apoi în contact. La gaze și lichide difuzia are loc rapid, la contactul a două solide ea se produce incomparabil mai lent. În urma difuziei a două gaze de mase moleculare apropiate, care nu reacționează chimic și se află la aceeași temperatură, se ajunge la un amestec gazos omogen. Difuzia moleculară se explică prin întrepătrunderea moleculelor diferitelor substanțe, datorită agitației termice. Faptul că amestecarea gazelor, a lichidelor și a solidelor se produce cu viteze diferite ne dă o idee despre particularitățile agitației termice în cadrul celor trei stări de agregare.

*Mișcarea browniană.* În 1827 Brown a observat la microscop mișcarea continuă și foarte vie a unor particule de polen suspendate în apă. El s-a convins repede că această mișcare se produce independent de cauze externe. Traectoria unui grăunte de polen este foarte neregulată, viteza lui schimbîndu-se aproape continuu. De fapt nu se poate urmări traectoria grăuntelui punct cu punct, ci se poate doar aproxima traectoria reală cu o traiectorie în zig-zag, obținută prin măsurarea pozițiilor particulei la intervale de timp egale. Cea mai importantă caracteristică a mișcării observate de Brown este:



*universalitatea ei: mișcarea se întâlnește la orice fel de particule de dimensiuni suficient de reduse, suspendate în gaze sau lichide. Sub denumirea de mișcare browniană este cuprinsă mișcarea dezordonată a particulelor de dimensiuni foarte mici (de ordinul a  $10^{-4}$  —  $10^{-3}$  cm) aflate în suspensii lichide sau gazoase. Necondiționată de factori exteriori, mișcarea browniană este cu atât mai intensă, cu cât particulele suspendate sînt mai mici și cu cât temperatura suspensiei este mai ridicată.*

Explicarea calitativă a mișcării browniene a fost dată abia la sfîrșitul secolului trecut, iar descrierea cantitativă în 1905, de către Einstein. Particulele suspendate sînt mereu ținta ciocnirilor moleculelor substanței înconjurătoare. Particula browniană este suficient de mare față de dimensiunile unei molecule pentru ca ea să fie ciocnită de un număr foarte mare de molecule. În același timp, particula browniană este destul de mică pentru ca impulsul total, transmis ei în urma ciocnirilor, să fie în general diferit de zero, trădînd caracterul haotic al ciocnirilor suferite. Acest impuls este suficient pentru a produce deplasări observabile ale particulei suspendate. Traectoria particulei browniene este neregulată pentru că impulsul primit își schimbă necontenit în timp valoarea și orientarea. Mișcarea particulei browniene este însă foarte simplă dacă o comparăm cu traectoria unei molecule.

Cu ajutorul formulelor date de Einstein pentru descrierea cantitativă a mișcării browniene, Perrin a obținut, din datele experimentale privind această mișcare, o valoare destul de corectă pentru numărul lui Avogadro.

Max Born spunea, în legătură cu importanța teoriei lui Einstein a mișcării browniene: „Cred că aceste cercetări ale lui Einstein au contribuit mai mult ca toate celelalte să-i convingă pe fizicieni de caracterul real al atomului și al moleculelor, al teoriei cinetice a căldurii și de însemnătatea fundamentală a probabilităților în legile naturii“\*.

## 1.5. FORȚE INTERMOLECULARE

Între două molecule (sau între doi atomi), care se află la o distanță suficient de mică una de alta, se exercită forțe. Nu ne vom referi aici la forțele de interacțiune dintre atomi, care conduc la formarea moleculelor, ci la cele care se exercită între moleculele gata constituite ale unui corp. *Forțele de interacțiune dintre molecule se numesc forțe intermoleculare sau forțe Van der Waals.* Ele sînt de natură electrică: între nucleele unei molecule *A* și nucleele unei alte molecule *B* există forțe de respingere, ca și între electronii lor, dar nucleele moleculei *A* și electronii moleculei *B* se atrag, ca și electronii moleculei *A* și nucleele moleculei *B*. Mărimea și sensul forței de interacțiune rezultante depind în primul rînd de distanța dintre molecule, însă ele pot să depindă și de orientarea lor relativă. Spațiul din jurul unei molecule în care ea își exercită influența se numește *sferă de acțiune moleculară*. Raza acestei sfere, denumită și rază de acțiune moleculară, este foarte mică, de ordinul, a  $10^{-7}$  cm. Determinarea în detaliu a forței de interacțiune dintre două molecule este o problemă complexă. La distanțe mari de moleculă distribuția reală de sarcini a ei poate fi cu bună aproximație înlocuită cu o distribuție fictivă, formată din două sarcini egale, una pozitivă, alta negativă, plasate în puncte bine determinate ale spațiului, numite respectiv centrul sarcinilor pozitive și cen-

\* M. Born „Fizica în concepția generației mele“, pag. 114 — Ed. Științifică, 1969.

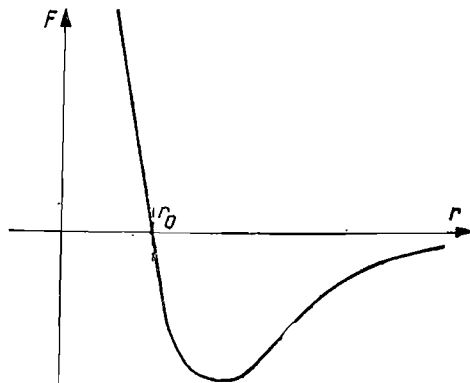


Fig. II.1.1

trul sarcinilor negative. Dacă cele două centre nu se află în același punct, molecula se numește polară, iar dacă cele două centre coincid, molecula este nepolară. Moleculele polare se caracterizează prin valoarea momentului lor dipolar. Numai aplicarea legilor mecanicii cuantice a făcut posibil studiul cantitativ al forțelor Van der Waals. Dintre rezultate menționăm doar pe acela care afirmă că două molecule nepolare se atrag la distanțe mari cu o forță invers proporțională cu puterea a 7-a a distanței dintre ele.

Ne vom rezuma la a da aici doar o descriere calitativă a forței dintre două molecule nepolare, considerându-le punctiforme. În acest caz forța intermoleculară va depinde doar de mărimea distanței  $r$  dintre molecule (forță centrală). Dependența aceasta are aspectul din figura II. 1.1. La distanțe foarte mari forța este practic nulă. În intervalul  $(r_0, \infty)$  forța este atractivă (negativă) la  $r_0$  se anulează, devenind apoi o forță de respingere în intervalul  $(0, r_0)$ . Forța de respingere crește foarte accentuat cu scăderea distanței dintre molecule. Forma curbei din figura II.1.1. este sugerată de unele date despre comportarea substanței, cum ar fi faptul că lichidele și solidele au volum propriu,

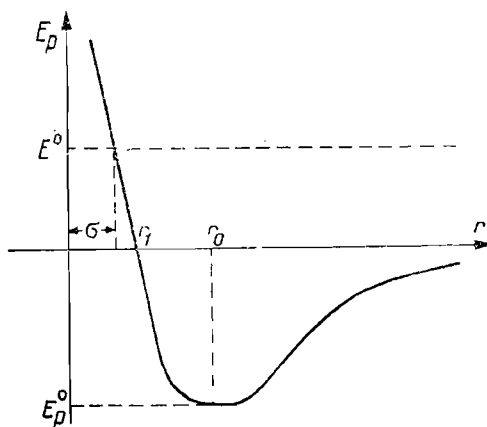


Fig. II.1.2

existența fenomenelor de adeziune la suprafața de contact a două corpuri, compresibilitatea tot mai mică a corpurilor dincolo de o anumită limită.

Cunoscînd forța de interacțiune dintre două molecule, putem deduce energia lor potențială

$$E_p = - \int_{\infty}^r F dr. \quad (1.9)$$

Conform relației (1.9), valoarea energiei potențiale, atunci cînd cele două molecule se află la distanță infinit de mare una de alta, este fixată la valoarea 0. În figura II.1.2 este prezentat graficul energiei potențiale. Pentru distanțe  $r > r_0$  energia potențială este negativă la  $r = r_0$  ea trece printr-un minim, deoarece acesta este punctul în care forța se anulează, pentru  $r < r_0$  energia potențială începe să crească anulîndu-se la  $r = r_1$ , devenind apoi pozitivă și crescînd foarte repede cu cît  $r$  se apropie de zero. În tabelul II.1 sînt date valorile lui  $r_0$  și ale energiei potențiale  $E_p^0$  în punctul  $r_0$ , pentru cîteva gaze monoatomice.

TABELUL II.1

Gazul	$r_0$ (Å)	$E_p^0 \cdot 10^{18}$ (erg)
He	2,56	1,41
Ne	2,76	4,90
Ar	3,41	16,5
Kr	3,66	22,9
Xe	3,95	30,3

Distanța pînă la care se pot apropia două molecule depinde de viteza lor relativă. Pentru a arăta acest lucru, să presupunem că molecula  $A$  este fixată în origine, iar molecula  $B$  se apropie de ea cu o viteză  $v_B$ , care la distanțe foarte mari are valoarea  $v_0$  și este dirijată de-a lungul axei care unește cele două molecule. La distanțe mari energia potențială a moleculei  $B$  este practic nulă, astfel încît energia totală va fi

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (1.10)$$

În figura II.1.2 este trasată dreapta de energie constantă  $E = E_0$ . Deoarece în cursul interacțiunii energia se conservă, la orice configurație avem

$$\frac{mv_{r_1}^2}{2} + E_p = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (1.11)$$

Cunoscînd dependența energiei potențiale  $E_p$  de distanța dintre molecule, putem urmări cu ajutorul relației (1.11) cum se modifică viteza moleculei  $B$  pe măsura apropierii ei de molecula  $A$ . Astfel, pînă la distanța  $r = r_0$  viteza crește, scade apoi pentru  $r < r_0$ , trece prin valoarea inițială  $v_0$  pentru  $r = r_0$  și se anulează la distanța  $r = \sigma$ , la care  $E_p = E_0$ . Aflată la distanța  $\sigma$  cu viteza nulă, sub influența unei puternice forțe de respingere, molecula  $B$  începe să se îndepărteze de molecula  $A$ , parcurgînd în sens invers mișcarea de apropiere. Distanța minimă  $\sigma$  la care s-au apropiat moleculele, determinabilă din condiția  $E_p = E_0$ , depinde de viteza  $v_B$ . Ca urmare, dintr-un proces ca cel descris (care este o ciocnire elastică) nu putem determina în mod strict dimensiunile moleculei. Ciocnirea elastică a două molecule decurge altfel decît ciocnirea a două bile elastice, din cauza faptului că între molecule se exercită forțe a căror valoare depinde de distanța dintre molecule.

Apropierea a două molecule nu decurge întotdeauna după tabloul prezentat. În special la energii mari, apropierea moleculelor poate fi urmată de modificarea stării lor interne: excitare, ionizare, disociere. În acest caz se spune că are loc o ciocnire inelastică. Procesul de ciocnire descris este idealizat și pentru că este ignorată existența celorlalte molecule din jur. În realitate, molecula  $B$ , ieșită din sfera de atracție a moleculei  $A$ , întâlnește alte molecule și interacționează cu ele. De asemenea, poate avea loc interacțiunea simultană a trei sau mai multe molecule; un asemenea proces este favorizat în condiții de densitate mare.

Din descrierea procesului de ciocnire elastică a două molecule, rezultă că două molecule inițial depărtate nu se pot uni într-un sistem stabil numai sub influența forțelor dintre ele. Cele două molecule ar putea forma un sistem stabil doar dacă ar avea loc o ciocnire triplă, în care o a treia moleculă  $C$  ar prelua o parte din energia moleculei  $B$ , făcînd-o incapabilă să părăsească vecinătatea poziției situate la distanța  $r = r_0$  față de molecula  $A$ . Dar un asemenea proces e puțin probabil. Moleculele mai complexe care ar putea apare teoretic din unirea moleculelor inițiale se numesc *molecule Van der Waals*. Ele apar cu probabilitate foarte mică și sînt foarte instabile.

## 1.6. TEORIA CINETICO-MOLECULARĂ ȘI UNELE PROPRIETĂȚI ALE SUBSTANȚEI

Concepția atomistă este reflectată în teoria cinetico-moleculară. Pornind de la existența moleculelor și a mișcării lor neconținute, teoria cinetico-moleculară permite în multe cazuri, un studiu cantitativ al comportării substanței. Pe baza teoriei cinetico-moleculară se pot înțelege: a) proprietățile specifice ale substanței în cele trei stări de agregare; b) semnificația mărimilor care caracterizează un corp macroscopic la echilibru (presiunea, energia internă, temperatura) și c) semnificația cantității de căldură.

Proprietăți specifice ale gazelor ca lipsa de volum determinat, tendința de expansiune, compresibilitatea mare pot fi explicate prin faptul că în interiorul unui gaz moleculele se află la distanțe foarte mari în comparație cu raza de acțiune moleculară. La gaze foarte rarefiate, forțele intermoleculare joacă un rol neglijabil în determinarea proprietăților sistemului și este de așteptat o comportare independentă de natura gazelor. Aceasta este cu atît mai adevărat, cu cît temperatura este mai ridicată. Comportarea gazelor rarefiate

la temperaturi relativ ridicate este bine redată de legile gazului perfect, legi ale unui model de gaz pe care teoria cinetico-moleculară îl poate aborda din punct de vedere cantitativ. Sub o anumită temperatură specifică — *temperatura critică* — prin comprimarea unui gaz se realizează lichefierea sa. În starea lichidă moleculele se află la distanțe mici unele de altele, încît forțele intermoleculare nu pot fi neglijate. Ca urmare, lichidele nu sînt expansibile ca gazele, totuși curg. La lichide, forțele intermoleculare nu determină deci pentru molecule o îngrădire puternică a libertății de mișcare, așa cum se înîmplă la solide, unde moleculele se mișcă doar în vecinătatea unor poziții fixe, denumite poziții de echilibru. Situația moleculei într-un corp solid explică de ce el are un volum propriu și o formă determinată, de ce el se deformează greu. Forțele care unesc moleculele unui corp se numesc *forțe de coeziune*.

Încă în 1738, mult înainte de fundamentarea experimentală a teoriei cinetico-moleculare, Daniel Bernoulli a explicat cu ajutorul ei presiunea gazelor și a interpretat legea Boyle-Mariotte. *Presiunea* exercitată de un gaz pe pereții recipientului în care se află se datorește ciocnirii lor de către molecule și poate fi evaluată pe această bază (vezi § 3.6). Dar presiunea gazului nu este singura mărime măsurabilă la scară macroscopică pe care o putem exprima cantitativ în funcție de atribute ale mișcării moleculare. Cel mai interesant este cazul *temperaturii*, care poate fi legată de agitația termică.

O mărime care caracterizează un corp macroscopic la echilibru (sau un corp macroscopic izolat) este *energia internă*, definită ca suma energiilor totale (cinetică + potențială) ale moleculelor care-l formează.

În cadrul teoriei cinetico-moleculare, la evaluarea energiei moleculei se ține seama de mișcarea atomilor în cadrul ei, dar se neglijează complet energia mișcării din interiorul atomilor.

Cînd un corp izolat de exterior suferă transformări, energia sa internă rămîne constantă. Atunci însă cînd două corpuri suferă transformări, influențîndu-se reciproc, ele schimbă energie. Teoria cinetico-moleculară ne ajută să înțelegem acest schimb de energie și în special conținutul mărimii de transformare denumită *cantitate de căldură* (vezi § 2.5).

## 2. Temperatură. Cantitate de căldură

### 2.1. ECHILIBRUL TERMIC. TEMPERATURA EMPIRICĂ

Obiectul unui studiu concret de fizică îl constituie totdeauna un număr limitat de corpuri macroscopice, care se influențează unele pe altele. Corpurile luate în considerație sînt cuprinse sub denumire de *sistem*, iar restul obiectelor înconjurătoare sub aceea de mediu exterior sau, pe scurt, *exterior*. Se spune că sistemul suferă *transformări* atunci cînd proprietățile sale macroscopice se modifică în timp și că se află la *echilibru* atunci cînd aceste proprietăți nu se mai modifică în timp. Un sistem aflat în stare de echilibru este caracterizat de valorile pe care le iau mărimi ca volumul și presiunea, valori care se obțin prin măsurători efectuate asupra sistemului. Mărimile cu ajutorul cărora se caracterizează starea de echilibru a sistemului se numesc *mărimi de stare* sau *parametri de stare*.

Între parametrii de stare un rol deosebit îl joacă *temperatura*. Primele cunoștințe despre temperatură le-au dat senzațiile de „rece” și „cald”. S-a constatat că: a) Dacă punem în contact un corp rece și unul cald, asistăm la modificarea proprietăților lor, care durează pînă la atingerea unei stări în care cele două corpuri devin la fel de „calde”. Se spune despre corpurile care au atins echilibrul în contact unul cu celălalt, că au aceeași temperatură sau că se află la *echilibru termic*. b) Două corpuri în echilibru termic cu al treilea sînt în echilibru termic între ele. c) Proprietățile unui corp depind de cît este el de „cald”. Pentru o verificare a imaginii create despre temperatură prin intermediul simțurilor se poate folosi un *termoscop* (fig. II.2.1) — dispozitiv format dintr-un mic balon prelungit cu un tub capilar, care conține un lichid oarecare a cărui dilatare se observă. Dacă se introduce termoscopul într-un corp la echilibru, se constată că lichidul din termoscop se ridică sau coboară pentru ca după scurt timp să se fixeze la un anumit nivel. Atunci cînd nivelul lichidului din termoscop nu se mai modifică, ansamblul corp + termoscop a atins starea de echilibru termic. Pentru ca termoscopul să dea indicații cît mai semnificative despre corpul studiat, este necesar ca modificarea proprietăților corpului, provocată de introducerea termoscopului, să fie minimă, de unde necesitatea unor dimensiuni cît mai mici pentru termoscop.

Termoscopul servește, mai bine decît simțurile, la a confirma egalitatea temperaturilor a două corpuri. Tot cu ajutorul său se poate da un sens mai precis afirmației „temperaturile a două corpuri sînt diferite”.

Vom admite în continuare că indicațiile termoscopului se referă la un parametru de stare al sistemelor la echilibru, denumit *temperatură*, despre care știm deocamdată că ia aceleași valori pentru două corpuri aflate în echilibru

termic. Atingerea echilibrului termic (egalizarea temperaturilor) are loc prin schimb de energie între sisteme.

Idealizarea relației sistem-termoscop, în care la atingerea echilibrului proprietățile sistemului se schimbă foarte puțin, iar ale termoscopului în general mult, a condus la noțiunea de *termostat* (sau sursă de căldură). Termostatul este un sistem idealizat, ai cărui parametri de stare nu se modifică de loc atunci când este pus în contact cu alte sisteme. Pentru ca un sistem să aibă o comportare apropiată de a unui termostat, el trebuie să fie un rezervor mare de energie, în așa fel încît energia pe care el o primește sau o cedează corpurilor cu care este pus în contact să fie o fracțiune mică din energia sa totală. Un exemplu simplu de termostat este dat în § 6.1.

Odată admisă existența temperaturii ca parametru de stare, definit pentru orice sistem la echilibru, se pune *problema măsurării temperaturii*. Operația se execută cu ajutorul termometrelor. În principiu, orice corp ale cărui proprietăți se schimbă în mod vizibil, după cum este el „mai cald” sau „mai rece”, poate servi drept termometru; se cere doar îndeplinirea *condiției de ordonare a temperaturilor*. Simplificat privind lucrurile, aceasta înseamnă că indicația — temperatura corpului *A* este mai mare decît temperatura corpului *B* — trebuie să corespundă senzației noastre: corpul *A* este mai cald decît corpul *B*. Condiția de ordonare a temperaturilor se formulează mai general astfel:  $t_A < t_B$ . Înseamnă că la contactul unui corp aflat la temperatura  $t_A$  cu un corp aflat la temperatura  $t_B$ , contact în care se interzice schimbul de lucru mecanic, corpul *B* cedează căldură corpului *A*. Această condiție de ordonare asigură proprietatea importantă: *cu cît temperatura unui corp este mai ridicată, cu atît energia sa internă este mai ridicată* — pe care o admitem fără demonstrație. Vom folosi de mai multe ori această proprietate în raționamentele ce urmează.

Conform celor de mai sus putem deci evalua temperatura unui corp prin valoarea înălțimii lichidului dintr-un termoscop aflat în echilibru cu corpul respectiv, înălțime măsurată față de un anumit reper fixat arbitrar. Din punct de vedere practic s-a procedat la restrîngerea, *prin convenție*, a arbitrarului existent în măsurarea temperaturii, urmărind simplificarea problemei. S-a procedat astfel: a) S-au ales două stări fizice ușor reproductibile și ușor de identificat și s-au atribuit prin convenție valori temperaturii acestor două stări. Cele două stări alese definesc *intervalul fundamental de temperatură*. b) S-au ales *termometre* cît mai adecvate diferitelor condiții fizice de lucru și s-a efectuat gradarea lor respectînd condiția privitoare la capetele intervalului fundamental.

Stările fizice alese, denumite *puncte fixe ale scării de temperatură*, au fost: starea în care gheața pură și apa sînt în echilibru la presiune normală (punctul de topire al gheții la presiune normală) și starea de echilibru între apă pură și vaporii ei la presiune normală (punctul de fierbere al apei la presiune normală). În notația *centigradă sau Celsius* (°C), punctului de topire al gheții i se atribuie valoarea 0°C, iar punctului de fierbere al apei valoarea de 100°C. A suta parte din intervalul fundamental se numește *grad Celsius*. În notația *Fahrenheit* (°F) valorile celor două puncte fixe sînt respectiv 32°F și 212°F.

Atribuirea de valori temperaturii diferitelor stări fizice se poate face cu diferite tipuri de termometre. Fiecare tip de termometru definește o *scară*



Fig. II.2.1

de temperatură proprie, adică un mod anumit de a atribui valori temperaturii. Să notăm cu  $X$  mărimea, specifică tipului de termometru, a cărei schimbare vrem s-o punem la baza măsurării de temperatură (vezi exemple în continuare:  $X$  poate fi înălțimea lichidului în termometrul cu lichid, presiunea unui gaz menținut la volum constant etc.). De obicei atribuirea de valori temperaturii în notația Celsius se face printr-o formulă simplă:

$$t = 100 \frac{X_t - X_0}{X_{100} - X_0} \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (2.1)$$

unde  $X_t$  este valoarea mărimii  $X$  la temperatura pe care o măsurăm, iar  $X_0$  și  $X_{100}$  valorile sale la punctele fixe alese. Toate scările centigrade de temperatură dau prin convenția adoptată indicații care coincid la punctele fixe, dar valorile atribuite temperaturii unei alte stări fizice diferă în general între ele.

Temperatura atribuită cu un termometru de tip oarecare, după un procedeu arbitrar, ca acel prezentat mai înainte, se numește *temperatură empirică în scara termometrului considerat*.

Vom discuta două exemple:

a) **Termometrul cu mercur.** Este cel mai simplu termometru, utilizat în condițiile mediului înconjurător. Mărimea care se măsoară este lungimea coloanei de mercur în tubul capilar care continuă rezervorul de mercur. Temperatura în grade Celsius, în scara termometrului cu mercur, este dată de formula

$$t = 100 \frac{l_t - l_0}{l_{100} - l_0} \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (2.2)$$

unde  $l_t$  este valoarea lungimii coloanei de mercur la temperatura de măsurat, iar  $l_0$  și  $l_{100}$  valorile ei la cele două puncte fixe. Formula (2.2) exprimă de fapt procedeul cunoscut de gradare a termometrului: împărțirea intervalului dintre nivelul mercurului la  $100^\circ\text{C}$  și nivelul mercurului la  $0^\circ\text{C}$  în o sută de părți egale.

Dacă în loc de mercur se folosește alt lichid și se procedează în acelaș mod la gradarea lui, temperatura atribuită de acest termometru unei stări fizice date va fi în general diferită de temperatura atribuită ei cu ajutorul termometrului cu mercur. Totuși diferențele între valorile atribuite de diferitele termometre cu lichid în intervalul de temperaturi  $0^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}$  sînt mici, nedepășind o zecime de grad.

b) **Termometrul cu rezistență de platină.** Rezistența metalelor pure crește cu temperatura. Temperatura în scara termometrului cu rezistență de platină,  $t_p$  — definită tot prin procedeul indicat:

$$t_p = 100 \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (2.3)$$

unde  $R_t$ ,  $R_0$ ,  $R_{100}$  reprezintă respectiv valorile rezistenței la temperatura necunoscută, la  $0^\circ\text{C}$  și la  $100^\circ\text{C}$  — diferă de temperatura în scara termometrului cu lichid.



## 2.2. TERMOMETRUL CU GAZ LA VOLUM CONSTANT

Experiența a relevat existența unui corp termometric mult mai interesant decât toate celelalte: un gaz la presiune foarte scăzută. Dacă volumul gazului este menținut constant, presiunea exercitată de el ia diferite valori, determinate de temperaturile diferite la care se poate afla gazul. În scara termometrului cu gaz la volum constant, temperatura se definește prin variația presiunii, conform formulei

$$t = 100 \frac{p_t - p_0}{p_{100} - p_0} \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (2.4)$$

unde  $p_t$  este valoarea presiunii gazului la temperatura de măsurat, iar  $p_0$  și  $p_{100}$  valorile ei la punctele fixe.

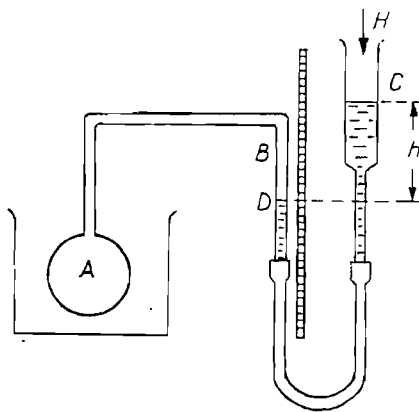


Fig. II.2.2

Pe principiul simplu descris este construit *termometrul cu aer la volum constant, al lui Jolly* (fig. II.2.2). Instrumentul constă dintr-un balon de sticlă  $A$  cu capacitatea de aproximativ  $100 \text{ cm}^3$ , care conține aer uscat și care comunică printr-un capilar cu un manometru cu mercur  $BC$ . Pe tubul capilar este marcată o diviziune  $D$  de volum constant, la care trebuie menținut mercurul din brațul  $B$  al manometrului. Când se realizează această cerință există în general un decalaj  $h$  între nivelul mercurului din cele două brațe  $B$  și  $C$  ale manometrului. Presiunea gazului exprimată în centimetri coloană de mercur, este dată de  $U + h$ , unde  $U$  este valoarea presiunii atmosferice în condițiile de lucru. Balonul de sticlă  $A$  este introdus pe rînd într-un vas cu apă și gheață și într-un vas cu apă care fierbe\*, apoi în mediul a cărui temperatură vrem s-o măsurăm. De fiecare dată se măsoară presiunea gazului în mediul indicat.

Termometrul Jolly are unele dezavantaje: 1) gazul nu este de fapt menținut la volum constant, deoarece sticla din care este făcut balonul  $A$  se dilată, 2) porțiunea de gaz din tubul capilar nu se află la temperatura de studiat.

\* La punctul de fierbere al apei trebuie procedat ușor diferit, deoarece acesta este destul de sensibil la valoarea presiunii externe (vezi § 6.5).

Se poate ține seama în principiu de aceste observații și corecta indicațiile termometrului, dar acest lucru nu se face ușor cu dispozitivul descris. Termometrul cu gaz la volum constant a fost perfecționat de Chappuis (vezi § 3.3).

S-a constatat experimental că *dacă gazul se află la presiune scăzută, indicațiile termometrului cu gaz la volum constant sînt aproape independente de natura gazului folosit*. Aceasta este proprietatea remarcabilă a termometrului

cu gaz la volum constant. Astfel raportul  $\frac{p_{100} - p_0}{p_0}$  este aproape același

pentru toate gazele și aproximativ egal cu  $100/273$ .

Ca remarcă de ordin general, să observăm că se poate totdeauna trece în mod empiric de la temperatura măsurată cu un tip de termometru la temperatura măsurată cu alt tip de termometru, comparînd indicațiile lor în aceleași condiții fizice. În principiu toate tipurile de termometre ar putea fi gradate după indicațiile unui tip anumit, ales prin convenție ca termometru standard. De fapt așa se și procedează practic (vezi § 4.10).

## 2.3. SCARA ABSOLUTĂ A TEMPERATURII TERMODINAMICE

Al doilea principiu al termodinamicii (vezi § 4.8) arată că se poate introduce o *scară absolută* de temperaturi, adică o scară de temperaturi independentă de proprietățile vreunui corp. Odată acest fapt cunoscut, problema importantă a termometriei devine măsurarea temperaturilor în scara absolută. Tot termodinamica ne arată cum, cunoscînd proprietăți ale corpului termometric, se poate stabili legătura între valoarea temperaturii termodinamice și cea a temperaturii empirice măsurată cu un termometru oarecare. Un termometru construit pe principiul termometrului cu gaz la volum constant și avînd drept corp termometric hidrogenul (vezi § 3.3) are scara cea mai apropiată de scara absolută de temperaturi. Indicațiile sale se pot corecta și deduce din ele valoarea temperaturii termodinamice. Uzînd de un arbitrar care există în definiția temperaturii termodinamice (vezi § 4.8), este posibil ca pentru scara acestei temperaturi să fie aleasă notația centigradă. Vom nota sistematic cu  $^{\circ}\text{C}$  valoarea temperaturii în scara termodinamică absolută în notația centigradă (în grade Celsius).

## 2.4. TEMPERATURA DE ZERO ABSOLUT

Energia internă a corpurilor este finită, și atunci cînd ea scade, temperatura scade. În situația limită în care un corp va fi cedat toată energia sa, el va fi ajuns incapabil să se mai răcească. Temperatura sa, cea mai joasă imaginabil, se numește *temperatură de zero absolut*. De fapt zero absolut nu poate fi atins niciodată. Valoarea temperaturii de zero absolut în scara termodinamică centigradă este aproximativ  $-273,15^{\circ}\text{C}$ .

Se utilizează adeseori măsurarea temperaturilor începînd de la zero absolut. Aceasta poate fi făcută în orice scară de temperaturi. Dacă  $t$  este valoarea temperaturii într-o scară centigradă oarecare, valoarea ei  $t_{abs}$  măsurată începînd de la zero absolut (temperatură absolută) este:

$$t_{abs} = t + 273,15. \quad (2.5)$$

Dacă temperatura în scara absolută termodinamică este măsurată începînd de la zero absolut, valoarea ei  $T$  este:

$$T = \theta + 273,15, \quad (2.6)$$

în care  $\theta$  este valoarea temperaturii în scara termodinamică absolută în notația centigradă. Valoarea numerică a temperaturii în scara termodinamică, măsurată de la zero absolut, este urmată de simbolul  $^{\circ}\text{K}$  (grade Kelvin). De fapt gradul Kelvin coincide ca mărime cu gradul Celsius al scării termodinamice; notarea lor diferită corespunde celor două moduri consacrate de alegere a punctului zero al scării termodinamice.

În încheiere, atragem atenția asupra faptului că adjectivul „absolut” apare în discuția despre temperatură în două locuri diferite, cu funcții diferite: o dată el însoțește denumirea scării de temperatură introdusă pe baza principiului al doilea al termodinamicii — scară absolută a temperaturii termodinamice — subliniind independența indicațiilor acestei scări de proprietățile vreunei substanțe, opunînd-o scărilor empirice care sînt arbitrare; a două oară, el apare în expresia „temperatură absolută” și se referă la temperatura măsurată într-o scară oarecare, începînd de la zero absolut. Temperatura în scara absolută poate fi dată atît în grade Celsius cît și în grade Kelvin, temperatura într-o scară oarecare poate fi dată în notație centigradă sau ca temperatură absolută prin (2.5).

Pentru unele convenții mai noi în problema măsurării temperaturii vezi § 4.8.

## 2.5. INTERPRETAREA CINETICO-MOLECULARĂ A TEMPERATURII

Știm că energia internă a corpurilor depinde de temperatura lor. Energia internă este legată de starea de mișcare a moleculelor. În fizica statistică\* se arată cum se poate corela temperatura de proprietăți globale (statistice) ale mișcării moleculelor unui corp. Fizica statistică ne arată că pentru a putea vorbi de temperatura unui sistem este necesar ca el să conțină un număr foarte mare de molecule așa cum conțin corpurile de dimensiuni macroscopice. Pentru a ilustra înțelesul cinetico-molecular al temperaturii prezentăm următorul rezultat, valabil în cazul gazelor monoatomice perfecte\*\*.

Pentru două gaze perfecte monoatomice  $A$  și  $B$ , aflate la echilibru în contact, există un atribut bine definit al mișcării moleculare care ia aceeași valoare în cele două gaze:

energia cinetică medie a unui atom  $\bar{\varepsilon} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$ \*\*\*. Avem deci

$$\frac{m_A \overline{v_A^2}}{2} = \frac{m_B \overline{v_B^2}}{2}. \quad (2.7)$$

Deoarece la echilibru termic temperaturile celor două gaze sînt egale, apare firească introducerea unei scări de temperaturi (ideală), în care temperatura să fie definită ca o

\* Fizica statistică este un capitol al fizicii, care întreprinde studiul proprietăților sistemelor pornind de la analiza structurii lor și a mișcării constituenților lor microscopici.

\*\* În fizica statistică, prin gaz perfect se înțelege un gaz ale cărui molecule sînt considerate punctiforme și nu interacționează între ele.

\*\*\* Bara de deasupra energiei  $\varepsilon$  a unui atom este notația pentru valoarea ei mijlocie  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$ , unde  $N$  este numărul de atomi din gaz,  $\varepsilon_i$  — energiile individuale ale atomilor. Analog se definește viteza pătratică medie  $\overline{v^2}$ .

funcție crescătoare de valoarea energiei medii  $\bar{\epsilon}$  a unui atom dintr-un gaz perfect monoatomic.\* Fizica statistică ne dă un rezultat și mai precis decât cel conținut în (2.7), anume relația de legătură dintre  $\bar{\epsilon}$  pentru gazul perfect monoatomic și temperatura absolută în scara temperaturii termodinamice:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (2.8)$$

$k$  fiind o constantă universală, numită constanta lui Boltzmann (v. § 3.5).

Rezultatul (2.8) este deosebit de simplu. Pentru sisteme fizice reale, mai complicate decât gazul perfect monoatomic, nu există o relație atât de simplă între temperatura termodinamică și mișcarea moleculară. Totuși fizica statistică permite în cazul general, al unui sistem fizic oarecare, corelarea temperaturii termodinamice de proprietăți statistice ale mișcării moleculelor care formează sistemul macroscopic.

## 2.6. LUCRU MECANIC ȘI CANTITATE DE CĂLDURĂ

În decursul unei transformări un sistem nu poate fi caracterizat cu ajutorul parametrilor de stare, deoarece aceștia nu sînt bine definiți. De exemplu, în timpul destinderii bruște a unui gaz presiunea are valori diferite în diferite regiuni ale gazului și se schimbă în timp, spre deosebire de cazul gazului în echilibru cu mediul exterior, la care presiunea este aceeași în toată masa sa și egală cu presiunea exterioară.

Transformările unui sistem pot fi caracterizate global cu ajutorul unor mărimi denumite *mărimi de transformare*. Principalele mărimi de transformare sînt *lucrul mecanic* și *cantitatea de căldură* schimbate de sistem cu exteriorul. Aceste mărimi se referă la două moduri distincte de schimb de energie între sisteme: schimb de lucru mecanic și schimb de căldură. Faptul că un sistem a efectuat un lucru mecanic sau că exteriorul a efectuat un lucru mecanic, cu repercusiuni asupra sistemului studiat, este relativ ușor de constatat experimental, prin deplasarea punctelor de aplicații ale unor forțe care intră în joc în interacțiunea sistem-exterior. Să luăm exemplul unui gaz aflat într-un cilindru plasat în atmosfera înconjurătoare și să presupunem că în starea inițială cilindrul este blocat și gazul se află în echilibru la o valoare a presiunii  $p$ , diferită de presiunea exterioară  $p_0$ . Dacă se deblochează pistonul, gazul nu se mai află la echilibru și pistonul se va deplasa pînă ce presiunea gazului va egala presiunea exterioară (pentru simplificare se neglijează greutatea pistonului). Asupra pistonului cilindrului (ca și asupra pereților lui), exteriorul acționează tot timpul cu o forță constantă, egală cu produsul dintre presiunea gazului și suprafața pistonului. Deoarece la sfîrșitul transformării pistonul și-a modificat poziția față de starea inițială, deci punctele de aplicație ale presiunii externe asupra sistemului s-au deplasat, înseamnă că s-a produs un lucru mecanic în decursul transformării. Se spune că sistemul și exteriorul au schimbat lucru mecanic, mai precis, dacă volumul gazului a crescut se spune că gazul a efectuat lucru mecanic și exteriorul l-a primit, iar dacă

---

\* Scara satisface criteriul de ordonare a temperaturilor.

volumul gazului s-a micșorat se spune că exteriorul a efectuat lucru mecanic și sistemul l-a primit.

Experiența a arătat că, pentru ca un sistem să-și modifice proprietățile nu este absolut necesar ca el să schimbe, lucru mecanic cu exteriorul. Exemplul cel mai simplu ni-l furnizează cazul a două corpuri solide, aflate la temperaturi diferite, puse în contact. Corpurile își modifică temperaturile pînă ce ating aceeași temperatură. În urma transformării suferite cele două sisteme și-au modificat deci energia internă. În acest caz, dacă diferența temperaturilor inițiale nu este prea mare, lucrul mecanic schimbat este neglijabil, volumele solidelor nemodificîndu-se mult cu temperatura.

Egalarea temperaturilor s-a produs prin alt mecanism decît schimbul de lucru mecanic: se spune că *sistemele au schimbat căldură*, că sistemul mai cald a cedat căldură sistemului mai rece.

*Schimbul de căldură este transfer de energie între sisteme, care nu se datorește schimbului de lucru mecanic.* În general însă, într-o transformare sistemele schimbă simultan și lucru mecanic și căldură.

Lucrul mecanic și căldura fiind mărimi de transformare, nu are sens expresia „lucru mecanic sau căldură într-o stare a sistemului“. În limbajul curent înțîlnim totuși expresia „căldură înmagazinată de un corp“, care poate induce în eroare. Căldura nu se înmagazinează, se modifică doar energia internă, această modificare nefiind sensibilă în nici un fel la modul în care a avut loc: prin schimb de lucru mecanic sau prin schimb de căldură.

Din punct de vedere cinetico-molecular schimbul de căldură între sisteme aflate în contact se efectuează prin intermediul ciocnirilor dintre moleculele celor două sisteme și peretele despărțitor. Deși în ciocnirile individuale energia poate fi cedată sau preluată atît de moleculele dintr-un sistem, cît și de cele din al doilea sistem, dacă s-ar face bilanțul energiilor schimbate într-un interval de timp microscopic (adică de durată decelabilă cu ajutorul simțurilor noastre), s-ar constata că la contactul celor două corpuri transferul efectiv de energie are loc într-un singur sens, de la corpul mai cald la cel mai puțin cald.

Schimbul de căldură dintre sistem și exterior se face mai repede sau mai încet, în funcție de proprietățile pereților despărțitori. Chiar dacă două corpuri sînt separate printr-un spațiu vid, ele se pot influența prin intermediul radiației electromagnetice.

Totuși, este posibilă izolarea aproape perfectă a unui corp de mediul înconjurător, de exemplu prin introducerea într-un vas Dewar. Vasul Dewar (fig. II. 2.3) are pereții dubli, spațiul dintre ei fiind vidat. Pereții sînt argințați pentru a reflecta radiația electromagnetică, împiedicînd astfel schimbul de energie între sistem și exterior prin intermediul ei. Învelișul ideal care nu ar permite schimbul de căldură între două corpuri se numește *înveliș adiabatic*.

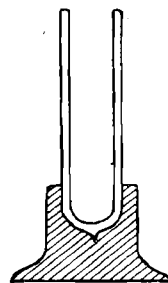


Fig. II.2.3

## 2.7. MĂSURAREA CANTITĂȚII DE CĂLDURĂ. CĂLDURA SPECIFICĂ

Faptul că schimbul de căldură nu este altceva decât schimb de energie între sisteme a fost unanim admis abia către mijlocul secolului trecut, după descoperirea principiului echivalenței lucrului mecanic și căldurii. Dar măsurarea cantității de căldură s-a făcut, în unități specifice, și înainte de cunoașterea echivalenței dintre lucru mecanic și căldură, prin studierea efectelor provocate: încălzirea corpurilor sau schimbarea stării lor de agregare (fierbere, topire etc).

Vom arăta cum a fost posibilă măsurarea cantității de căldură pe baza încălzirii corpurilor. În secolul al XVIII-lea au fost studiate cu atenție legile schimbului de căldură pentru solide și lichide puse în contact. Pentru aceste corpuri volumul se modifică destul de puțin cu temperatura, în intervale mici de temperatură, astfel încât atingerea echilibrului se face în mod net predominant prin schimb de căldură. Experimental s-a căutat expresia temperaturii finale de echilibru  $t_f$  pentru două corpuri de mase  $m_1$  și  $m_2$ , aflate inițial la temperaturi diferite  $t_1$  și  $t_2$ . Dacă temperaturile  $t_1$  și  $t_2$  nu diferă prea mult, situația nu este complicată. S-a constatat astfel că unitatea de masă din fiecare corp are nevoie de o anumită cantitate de căldură pentru a-și ridica temperatura cu un grad. Ca atare, s-a trecut la caracterizarea diferitelor substanțe printr-o mărime, numită *căldură specifică* (se notează cu  $c$ ), definită ca fiind *cantitatea de căldură necesară unității de masă dintr-o substanță pentru a-și ridica temperatura cu un grad Celsius*. Căldura specifică nu este o constantă, ea se schimbă cu temperatura și, pentru gaze, ea depinde sensibil și de modul în care decurge schimbul de căldură: la volum constant, la presiune constantă sau altfel (vezi § 4.3c). La temperatura camerei căldurile specifice sînt în general constante, însă la temperaturi joase ele scad cu temperatura. Pentru materiale feromagnetice și aliaje, se constată o creștere accentuată și bruscă a căldurilor specifice în vecinătatea temperaturilor la care are loc o schimbare a structurii interne.

Cantitatea de căldură necesară unui corp de masă  $m$  pentru a-și ridica temperatura cu un grad Celsius, se numește *capacitate calorică a corpului* și este dată de produsul dintre masa corpului și căldura sa specifică. Pentru intervale de temperatură  $\Delta t$  în care căldura specifică este practic constantă, cantitatea de căldură necesară pentru ca corpul de masă  $m$  să-și ridice temperatura cu  $\Delta t$  grade Celsius ( $\Delta t > 0$ ) este

$$Q = mc\Delta t. \quad (2.9)$$

La răcirea cu  $\Delta t$  grade Celsius ( $\Delta t < 0$ ), corpul cedează o cantitate de căldură egală cu cea primită la încălzire. În consecință, la atingerea echilibrului între două corpuri izolate de exterior, numai pe calea schimbului de căldură între ele, cantitatea de căldură cedată de unul este absorbită de celălalt (un corp cedează energie celuilalt) și deci există egalitatea

$$m_1 c_1 (t_1 - t_f) = m_2 c_2 (t_f - t_2), \quad (2.10)$$

unde  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  și  $t_f$  au semnificațiile indicațiile indicate mai sus, iar  $c_1$  și  $c_2$  sînt căldurile specifice ale celor două corpuri.

O asemenea relație permite în principiu determinarea raportului căldurilor specifice ale corpurilor în domeniul de temperaturi în care se lucrează ( $t_1$  și  $t_2$  nu trebuie să difere mult între ele, altminteri e nevoie să se țină seamă

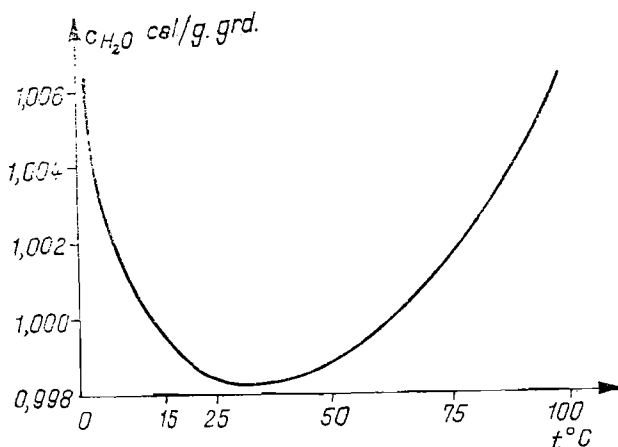


Fig. II.2.4

în calcule de dependența căldurilor specifice de temperatură). Rămânând în sfera cunoștințelor despre schimbul de căldură între corpuri, nu se poate măsura în mod „absolut” (adică în unități de energie) cantitatea de căldură. Se poate însă realiza o măsurare a cantităților de căldură în unități considerate azi tolerate: *caloria* și multiplul ei *kilocaloria*.

*Caloria este cantitatea de căldură necesară pentru a ridica temperatura unui gram de apă distilată de la 14,5°C la 15,5°C la presiune normală\**. Precizarea, în această definiție, a intervalului de temperatură oglindește existența dependenței căldurii specifice de temperatură. Alegerea apei ca substanță standard în acest caz se datorează și faptului că variația cu temperatura a căldurii ei specifice este foarte mică (fig. II. 2.4.).

Reamintind că schimbul de căldură este un schimb de energie, putem converti definiția caloriei în termeni energetici: o calorie este cantitatea de energie necesară pentru a ridica temperatura unui gram de apă distilată de la 14,5°C la 15,5°C, la presiune normală. Orice măsură a cantității de căldură în calorii indică de câte ori energia schimbată, sub formă de căldură, într-o transformare oarecare, este mai mare, respectiv mai mică, decât energia necesară încălzirii apei de la 14,5°C la 15,5°C, la presiune normală. Pentru a exprima cantitatea de căldură în unități de energie, trebuie să știm că  $1 \text{ cal} = 4,185 \text{ J}$  (vezi § 2.8).

În legătură cu cele discutate pînă acum, observăm că pentru măsurarea comodă a unei cantități de căldură în calorii putem aranja ca ea să fie cedată apei, producînd încălzirea ei. Aceasta se realizează în *vasele calorimetrice*, vase cu izolare cît mai bună față de mediul exterior, umplute cu apă. Trebuie avut în vedere că, în afară de apă, și calorimetrul participă la schimbul de căldură, deci capacitatea lui calorică trebuie cunoscută și luată în considerație. Unele detalii despre măsurarea cantităților de căldură se dau în § 2.10.

Studiul proprietăților căldurilor specifice ale corpului este interesant, deoarece comportarea căldurilor specifice în diferite zone de temperatură, în spe-

\* În ultima vreme este utilizată și „caloria de 20°C”, definită analog cu ajutorul intervalului de temperatură 19,5°C–20,5°C.

cial la temperaturi joase, reflectă ceva din legile de mișcare ale constituenților corpurilor macroscopice (vezi § 5.4).

Schimb de căldură cu exteriorul se produce sistematic și într-o altă categorie de procese fizice: schimbările de stare de agregare. Experiența arată că într-o asemenea transformare corpurile absorb sau cedează căldură din mediul înconjurător sau de la o sursă de căldură, fără a-și modifica temperatura pe toată durata respectivei transformări. Cantitatea de căldură schimbată de 1 kg de substanță pentru a trece dintr-o stare de agregare în alta, se numește *căldură latentă specifică de transformare*. Valoarea ei depinde de felul transformării (topire, vaporizare etc.), de natura substanței care suferă transformarea, de condițiile în care aceasta are loc. Cuvântul „latent” înseamnă „ascuns” și se datorește unei imagini inițiale despre schimbările de stare de agregare, conform căreia căldura latentă este înmagazinată de corp. De fapt, căldura latentă este folosită pentru a efectua lucrul mecanic necesar schimbării de stare de agregare (vezi cap. 6).

Schimb de căldură cu exteriorul se produce și în timpul unor reacții chimice (căldurile de reacție). Substanțele care ard degajând căldură se numesc *combustibili*. Combustibilii solizi și lichizi sînt caracterizați prin *putere calorică*, adică prin cantitatea de căldură produsă la arderea completă a unității de masă.

## 2.8. PRINCIPIUL ECHIVALENȚEI DINTRE LUCRU MECANIC ȘI CĂLDURĂ

Spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea și începutul secolului al XIX-lea problema căldurii era tratată prin teoria caloricului indestructibil. Căldura era considerată un fluid care nu poate fi nici creat, nici distrus și care poate circula de la o substanță la alta determinînd egalarea temperaturilor lor.

Teoria caloricului n-a putut explica fenomenul de *încălzire a corpurilor prin frecare*. Încălzirea prin frecare a fost studiată cu atenție de Rumford (1798), care a ajuns la concluzia că fenomenul nu poate fi explicat decît admitînd că schimbul de căldură este schimb de energie între corpuri.

Se obișnuiește să se spună că într-o experiență de frecare avem de-a face cu *transformarea lucrului mecanic în căldură*. Să explicăm sensul acestei afirmații printr-un exemplu simplu. Considerăm o roată care se poate mișca în jurul axei sale și asupra căreia acționează un sabot de frînare. Efectuînd lucru mecanic din exterior, putem menține sistemul în mișcare atîta timp cît dorim. Ca rezultat, ansamblul roată-sabot își ridică temperatura. Încălzirea sistemului s-a făcut fără ca acesta să fi primit căldură, sistemul a primit doar lucru mecanic (efectuat de exterior) și în urma procesului de frecare energia internă a sistemului a crescut, deci și temperatura. Același efect l-am fi putut obține punînd sistemul în contact cu un corp cu temperatură mai ridicată decît a sa. După ce sistemul a fost încălzit prin frecare, îl putem pune în contact cu un termostat avînd temperatura inițială a roții. Roata cedează o cantitate de căldură termostatului pînă ce ajunge la temperatura acestuia. Privind transformarea totală se poate afirma că lucrul mecanic s-a transformat în căldură, în înțelesul că roata a fost capabilă să cedeze energie sub formă de căldură termostatului, numai pentru că în prealabil primise energie sub formă de lucru mecanic din exterior.



Dacă sistemul roată-sabot l-am fi menținut permanent în termostat, atunci cele două efecte, primirea de lucru mecanic din exterior și cedarea de căldură termostatului, n-ar mai fi fost separate în timp, ci ar fi decurs concomitent.

Să notăm cu  $L$  lucrul mecanic primit de sistem (efectuat de exterior) și cu  $Q$  cantitatea de căldură cedată termostatului de către sistem, într-o experiență de tipul precedent, de transformare a căldurii în lucru mecanic. În experiență are loc o transformare integrală a lucrului mecanic în căldură, deoarece la sfârșitul ei sistemul se află în aceeași stare ca cea inițială.  $L$  se poate evalua în jouli, iar  $Q$  în calorii. Experiența arată că raportul  $\frac{L}{Q}$  are o valoare constantă  $J$ , independentă de orice particularități ale experienței. Raportul  $J$  se numește *echivalent mecanic al cantității de căldură*. Deci pentru un lucru mecanic  $L$  furnizat, cantitatea de căldură cedată în condițiile descrise (cu revenirea sistemului la starea inițială) are întotdeauna aceeași valoare bine determinată  $\frac{L}{J}$ . Se stabilește astfel o echivalență între un lucru mecanic efectuat și o anumită cantitate de căldură. Constatarea experimentală prezentată stă la baza primului principiu al termodinamicii (vezi § 4.2).

Valoarea echivalentului mecanic al cantității de căldură este

$$J = (4,1855 \pm 0,0004) J/cal. \quad (2.11)$$

Situația din cazul experienței de „transformare a lucrului mecanic în căldură” se generalizează în două moduri:

a) Dacă un sistem suferă o transformare ciclică (adică o transformare în urma căreia sistemul revine la starea inițială), schimbând cu exteriorul cantitatea de căldură de mărime  $Q$  și lucrul mecanic de mărimea  $L$ , atunci  $\frac{L}{Q} = J$ .

b) Ori de câte ori un sistem poate trece dintr-o stare inițială dată, într-o stare finală dată, pe următoarele două căi: o dată schimbând *numai* lucru mecanic de valoare  $L$ , altă dată *doar* căldură de valoare  $Q$ , raportul  $\frac{L}{Q}$  are valoarea  $J$ .

Experiența arată deci echivalența între căldură și lucru mecanic. Această echivalență este frapantă în cazul celei de a doua afirmații de mai sus, care arată că în anumite cazuri (depinzând de sistem), același efect asupra sistemului îl putem obține fie furnizându-i căldură, fie furnizându-i lucru mecanic. Lucrul mecanic și căldura reprezintă forme diferite în care se poate produce schimbul de energie între sisteme, ambele conducând la modificarea energiei acestora.

Echivalența dintre lucrul mecanic și căldură înseamnă, de fapt, conservarea energiei. În exemplul prezentat, energia cheltuită sub formă de lucru mecanic pentru învîrtirea roții nu s-a pierdut, ci s-a transformat în energie internă a moleculelor roții. Dacă n-am ști ce s-a întîmplat cu roata, n-am putea spune dacă ea și-a schimbat starea în urma unui lucru mecanic sau a unei călduri primite. Această observație scoate în evidență interesul de a studia relația sistem-exterior. Sînt cazuri în care numai „privind” în exterior putem ști sub ce formă a schimbat sistemul energia cu exteriorul. Și mai clar este în acest

sens exemplul unei transformări ciclice: privind numai sistemul am putea spune că nu s-a întâmplat nimic, însă în exterior se pot vedea de obicei diferitele efecte produse prin schimb de lucru mecanic sau căldură.

Considerațiile precedente arată încă o dată că n-au sens afirmații ca „lucrul mecanic în starea A”, „căldura în starea A”. Are sens numai „energia stării A”, la care este posibil să se fi ajuns prin schimb de căldură sau de lucru mecanic cu exteriorul, sau, de obicei, prin ambele schimburi. O dată ajuns în starea A, pentru sistem nu mai are nici o semnificație modul în care el și-a „procurat” energia.

Cunoscând echivalența lucru mecanic-căldură (valoarea lui  $J$ ) putem converti orice cantitate de căldură, măsurată în calorii, în unități de energie și în acest fel putem da un sens „absolut” măsurătorilor de cantitate de căldură și de călduri specifice prin metode în care nu se folosește această echivalență (metoda amestecurilor).

Valoarea lui  $J$  a fost determinată pentru prima oară de Joule, la jumătatea secolului trecut, printr-o celebră experiență care-i poartă numele.

## 2.9. DETERMINAREA ECHIVALENTULUI MECANIC AL CĂLDURII

Echivalentul mecanic al căldurii este independent de natura procesului prin care lucrul mecanic se transformă în căldură. Din această cauză determinarea echivalentului mecanic al căldurii se poate face prin foarte multe metode.

Prima metodă experimentală pentru determinarea echivalentului mecanic al căldurii a fost realizată de J.P. Joule (1843). Această metodă, în principiu, constă în următoarele: într-un vas calorimetric cu apă (fig. II.2.5) se rotește un ax prevăzut cu palete. De pereții calorimetrului sînt fixate o altă serie de lamele radiale, care împiedică rotația apei din calorimetru. Doarece lichidul se opune mișcării paletelor, se cheltuiește un lucru mecanic  $L$ , care duce la încălzirea apei din calorimetru. Pentru a învîrți axul cu palete, parte sa superioară este fixată într-un tambur pe care sînt înșirate în același sens două fire, care sînt trecute peste doi scripeți. De capetele firelor sînt prinse două plăci de plumb. Două rigle gradate măsoară spațiul parcurs de greutate. Ridicînd greutatea și lăsîndu-le să cadă liber, ele vor învîrți axul calorimetrului împreună cu paletele lui. Se ridică din nou greutatea, fără să se învîrtească axul, și se dă din nou drumul la greutatea să cadă liber. Se repetă operația de un număr de ori, după care se citește temperatura apei din calorimetru.

Se calculează cantitatea de căldură  $Q$  produsă în calorimetru, înmulțind capacitatea calorică a calorimetrului și a apei din calorimetru, cu diferența de temperatură obținută, făcînd în același timp și corecțiile datorite pierderilor de căldură în exterior.

Lucrul mecanic datorat căderii de  $n$  ori a celor două greutăți  $G$  de la înălțimea  $h$  este egal cu  $2nGh$ . Nu tot acest lucru mecanic se folosește la încălzirea apei din calorimetru. Deoarece greutatea ating solul cu o viteză  $v$ , ele au o energie cinetică  $2 \frac{G}{2g} v^2$  care se transformă în căldură în exteriorul calorimetrului și deci nu produce o încălzire a apei din el. De asemenea o parte din lucru mecanic se pierde pentru învingerea rezistențelor de frecare de la axele de rotație ale scripeților, pentru întinderea firelor etc., lucru mecanic pe care îl notăm cu  $L_f$ . Ținînd seama de aceste corecții, lucrul mecanic efec-

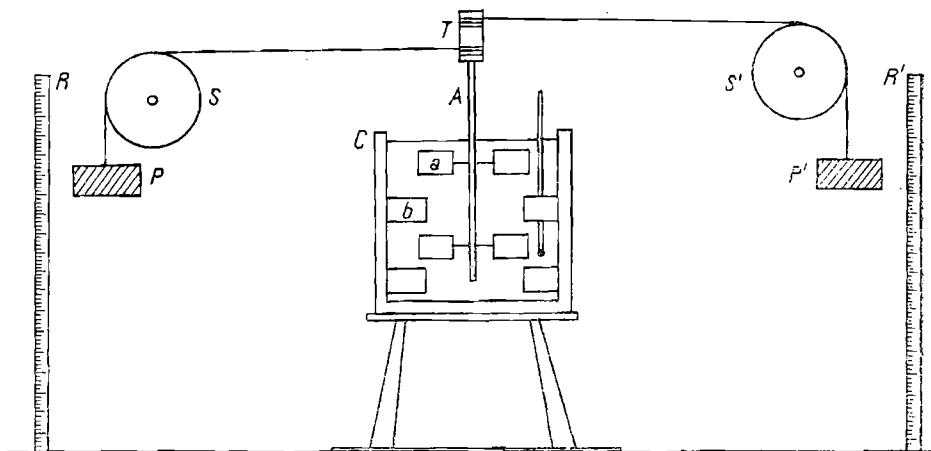


Fig. II.2.5

tiv care se transformă în căldură în calorimetru, la o cădere a greutateilor, este  $2Gh - \frac{G}{g} v^2 - L_f$ . Făcînd raportul dintre lucrul mecanic cheltuit și cantitatea de căldură produsă, Joule a obținut pentru echivalentul mecanic al căldurii valoarea 424,3 kgf·m/kcal.

O altă metodă pentru determinarea echivalentului mecanic al căldurii a fost realizată de fizicianul român C. Miculescu (1891), care a obținut rezultate deosebit de precise. Aparatul lui Miculescu pentru determinarea echivalentului mecanic al căldurii este format dintr-un suport de lemn 1 (fig. II.2.6.), pe care este fixat motorul electric 2. Suportul de lemn poate să oscileze avînd drept puncte fixe cuțitele 3 și 4. Dacă motorul este pus în funcțiune, suportul de lemn tinde să se încline în sens invers față de sensul de rotație al motorului (conform principiului acțiunii și reacțiunii). El poate fi readus în poziția de echilibru dacă se pun greutatea pe platanul 5. Motorul este deci propriul său dinamometru. Axul motorului este legat de un alt ax ce intră în calorimetrul 7, pe care sînt prinse 11 palete cu trei brațe fiecare. Calorimetrul 7 este învelit în trei cilindri metalici. Un curent continuu de apă circulă între pereții calorimetrului și ai primului cilindru protector

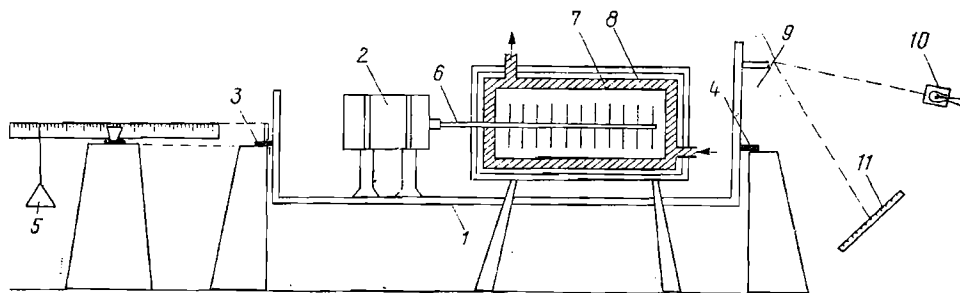


Fig. II.2.6

8. Pe suportul de lemn 1 este fixată o oglindă 9, pe care cade un fascicul luminos de la sursa 10, reflectându-se pe scara gradată 11.

Pentru a determina echivalentul mecanic al căldurii cu aparatul lui Miculescu, se procedează astfel: se stabilește poziția de echilibru a sistemului, prin fixarea spotului luminos pe o anumită diviziune a scării gradate. Se pune motorul în funcțiune, suportul 1 se înclină și spotul luminos se deplasează pe scală. Se pun greutatea  $G$  pe platan până ce sistemul revine în poziția inițială. La echilibru, cuplul rezistiv al forțelor determinate de rotirea paletelor în apă este compensat de cuplul exterior, determinat de greutatea  $G$ . Lucrul mecanic consumat este egal cu  $2\pi n l G$ , în care  $n$  este numărul de rotații efectuate de motor și  $l$  — distanța de la cușit la platanul cu greutatea.

Deoarece rotația paletelor întâmpină o rezistență din partea apei, motorul cheltuiește un lucru mecanic care se transformă în căldură, încălzind apa din calorimetru. Se reglează debitul de apă care circulă între calorimetrul 7 și vasul cilindric 8, în așa fel încât acesta să preia toată cantitatea de căldură care se produce în calorimetru. Din această cauză curentul de apă se încălzește, obținându-se în final o diferență de temperatură constantă între punctele de intrare și ieșire a apei. Dacă se colectează apa care circulă între cilindri într-un anumit interval de timp, atunci cantitatea de căldură care este preluată de curentul de apă (care este egală cu cantitatea de căldură produsă în calorimetru) este egală cu  $mc(t_2 - t_1)$ , în care  $m$  este masa de apă colectată,  $c$  căldura specifică a apei, iar  $t_2 - t_1$  diferența de temperatură a apei de la intrare și ieșire. Se calculează echivalentul mecanic al căldurii din relația  $J = \frac{2\pi n l G}{mc(t_2 - t_1)}$ .

Miculescu a găsit valoarea de 426,84 kgf·m/kcal.

## 2.10 CALORIMETRIE

*Calorimetria* este acea ramură a fizicii care se ocupă cu măsurarea cantităților de căldură. Aceste măsurători se fac cu scopul de a determina căldurile specifice ale substanțelor, căldurile latente, puterile calorice ale combustibililor. Măsurătorile se fac folosind dispozitive speciale, numite *calorimetre*.

Metodele de lucru ale calorimetriei se pot clasifica în două grupuri: metode în care, în esență, se măsoară o modificare de temperatură (*calorimetrie termometrică*) și metoda în care se măsoară masa unei substanțe de căldură latentă cunoscută care-și schimbă integral starea de agregare sub influența cantității de căldură necunoscute (*calorimetria căldurii latente*).

Descriem aici principiul de funcționare al *calorimetrului cu gheață Bunsen*, bazat pe calorimetria căldurii latente. Dispozitivul pune în evidență micșorarea de volum a gheții în urma topirii. Topirea unui gram de gheață dintr-un amestec de apă și gheață necesită căldură din exterior și este însoțită de o micșorare a volumului amestecului de  $\left(\frac{1}{0,92} - 1\right) \text{ cm}^3 \approx 0,087 \text{ cm}^3$ , deoarece densitatea apei la 0°C este de aproximativ 1 g/cm<sup>3</sup>, iar a gheții de 0,92 g/cm<sup>3</sup>. Calorimetrul Bunsen (fig. II.2.7) este format dintr-o eprubetă  $A$ , lipită într-un cilindru larg de sticlă  $B$ , care se continuă cu un tub de sticlă îndoit în formă de  $U$  și terminat cu un vas capilar orizontal  $T$ , calibrat. Tubul în formă de  $U$  și partea inferioară a cilindrului  $B$  sînt umplute cu mercur. În

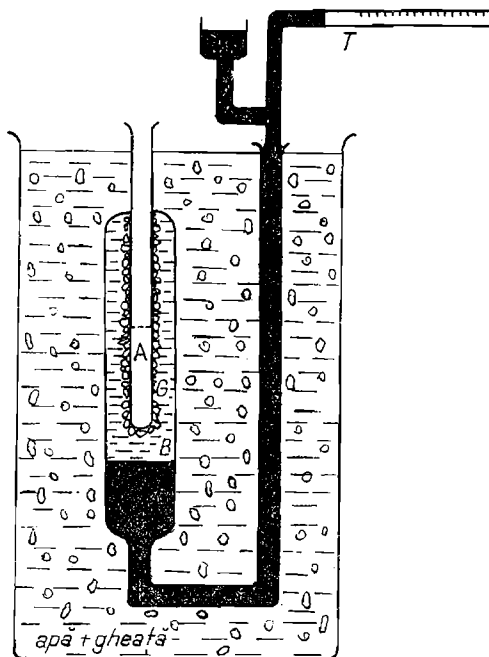


Fig. II.2.7

vasul  $B$ , deasupra mercurului se află apă. Tot în interiorul vasului  $B$ , în jurul eprubetei  $A$ , există o manta de gheață  $G$ , produsă evaporând rapid eter sau acid carbonic în eprubeta  $A$ . Tot aparatul, cu excepția capilarului, este introdus într-un vas în care se află amestec de apă și gheață pure: lucrul nu începe decât după ce avem garanția că întreg aparatul se află la  $0^{\circ}\text{C}$ . În eprubeta  $A$  se introduce puțină apă pură și se așteaptă pînă ce mercurul din vasul capilar se stabilizează la o anumită diviziune. La introducerea unui corp cald în eprubeta  $A$ , datorită apei prezente acolo, căldura este rapid condusă spre interiorul dispozitivului. Ca urmare, o parte din gheața mantalei  $G$  se topește, conținutul vasului  $B$  își micșorează astfel volumul, mercurul se ridică în vasul  $B$ , deci coloana de mercur din tubul capilar  $T$  se retrage. Dacă tubul capilar este în prealabil etalonat, se poate evalua direct din deplasarea mercurului în tubul capilar cantitatea de căldură cedată de corp calorimetrului. Să presupunem că tubul capilar este divizat inițial în mod arbitrar în părți egale. Etalonarea se poate face empiric introducînd în eprubetă o cantitate de apă  $m_0$ , aflată la temperatura  $t_0$ , și observînd numărul  $n_0$  de diviziuni cu care se retrage mercurul în capilar. Deoarece cantitatea de căldură este în acest caz  $m_0 t_0$ , rezultă că retragerea cu o diviziune este provocată de cedarea unei cantități de căldură  $q_0$  egală cu  $\frac{m_0 t_0}{n_0}$ . După aceea putem măsura orice cantitate de căldură cedată,  $Q$ , prin numărul de diviziuni  $n$  cu care s-a retras mercurul în cazul studiat:  $Q = n q_0$ . Căldura specifică necunoscută a substanței este dată de  $c = \frac{Q}{Mt}$ , unde  $M$  este masa

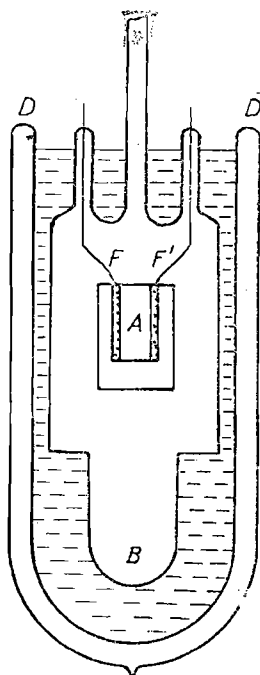


Fig. II.2.8

substanței introduse în eprubeta  $A$ , iar  $t$  este temperatura pînă la care a fost încălzită aceasta înainte de introducerea în calorimetru.

Calorimetrul Bunsen a fost folosit pentru determinarea căldurilor specifice ale unor substanțe existente doar în cantități mici.

Măsurătorile cele mai precise se fac astăzi prin *metoda electrică*. Aceasta se bazează pe faptul că trecerea în timpul  $\tau$  a unui curent electric de intensitate  $I$ , printr-un conductor de rezistență  $R$ , necesită cheltuirea unei energii (lucru mecanic) egală cu  $RI^2\tau^*$ . Conductorul prin care trece curentul cedează această energie mediului înconjurător aflat la o temperatură inferioară lui, sub formă de căldură. Cantitatea de căldură degajată este:

$$Q = \frac{1}{J} RI^2\tau \text{ cal.} \quad (2.12)$$

În limbajul curent spunem că într-o rezistență electrică are loc transformarea energiei electrice în energie calorică. Utilizarea metodei electrice prezintă avantajul cunoașterii precise a cantității de căldură furnizate de curentul electric [evaluată cu ajutorul lui (2.12)].

Pentru ilustrare descriem *calorimetrul Nernst* (fig. II.2.8), folosit în special la temperaturi joase. Pentru a măsura căldura specifică a unui corp se măsoară

\* Vezi III 2.5.

creșterea temperaturii acestuia datorită numai căldurii primite de la curentul electric. Căldura specifică este dată de relația

$$c = \frac{RI^2\tau}{JM\Delta t}, \quad (2.13)$$

$M$  fiind masa corpului, iar  $\Delta t$  creșterea temperaturii.

Aparatul se compune dintr-un bloc de argint,  $A$ , suspendat prin firele  $F$  și  $F'$  într-un vas  $B$  în care se face vid. Prin firele  $F$  și  $F'$  trece curentul electric. Vasul  $B$  este introdus într-un vas Dewar,  $D$ , umplut cu un lichid menținut la o temperatură constantă. Corpul de studiat este introdus în blocul  $A$ . Creșterea de temperatură poate fi măsurată cu un termocuplu.

### 3. Proprietățile termice ale gazelor

#### 3.1. PRESIUNEA GAZELOR ȘI MĂSURAREA EI. TEHNICA VIDULUI

Un gaz închis într-o incintă, la echilibru, exercită o apăsare (forță) continuă, constantă și uniformă asupra pereților incintei. Forța exercitată normal pe unitatea de suprafață a peretelui se numește *presiune*. Presiunea pe care un gaz la echilibru o exercită asupra pereților vasului în care se află închis este un parametru de stare al gazului, care poate fi interpretat simplu din punct de vedere cinetico-molecular. Pereții vasului sînt neconținți ȳinta ciocnirilor moleculelor de gaz și la fiecare ciocnire pereții primesc o cantitate de mișcare (un impuls). Dacă unul din pereții vasului ar fi mobil și în afara sa ar fi vid, atunci acest perete ar începe să se deplaseze sub influența ciocnirilor moleculare.

Aparatele cu ajutorul cărora se măsoară presiunea gazelor se numesc *manometre*. Principiul lor de construcție este diferit în funcție de intervalul de presiune pe care îl măsoară. Nu există manometre bazate pe un principiu unic, care să poată măsura întreg domeniul de presiune, deoarece acesta este extrem de larg, de la  $10^{-12}$  torr pînă la presiuni de ordinul a  $10^5$  atmosfere. Manometrele folosite pentru măsurarea presiunii atmosferice se numesc *barometre*, iar cele folosite pentru măsurarea presiunilor foarte joase se numesc *vacuumetre*. Manometrele pot fi absolute sau relative, după cum măsoară valoarea absolută a presiunii sau valoarea ei în raport cu presiunea atmosferică.

Pentru măsurarea presiunilor cuprinse între valori de ordinul torrului pînă la o atmosferă se folosesc manometre în formă de *U*, umplute cu lichid. Pentru presiuni relative mici, ca lichid se folosește apa, iar pentru măsurarea presiunilor absolute — mercurul, deoarece el are o tensiune de vapori mică la temperatura camerei.

Cu ajutorul unui manometru în formă de *U*, umplut cu mercur (fig. II.3.1), presiunea absolută se măsoară astfel: capătul deschis al manometrului, *A*, se pune în legătură cu incinta a cărei presiune vrem s-o determinăm; capătul *B* al manometrului este închis, iar deasupra mercurului este practic vid (în acest spațiu există vapori de mercur, dar în cantitate extrem de mică, deoarece tensiunea de vapori a mercurului este foarte mică, astfel încît ei pot fi neglijați). Presiunea *p* din incintă se exercită direct și asupra coloanei de mercur din brațul *A* al manometrului și se măsoară prin diferența de înălțime  $\Delta h$  dintre nivelele mercurului din cele două ramuri, după formula:

$$p = \rho g \Delta h, \quad (3.1)$$



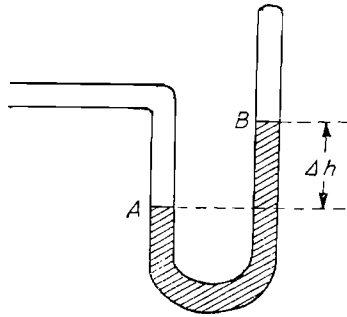


Fig. II.3.1

în care  $\rho$  este densitatea mercurului, iar  $g$  accelerația gravitațională din locul unde se face măsurătoarea. Dacă presiunea se exprimă în torri, atunci ea este egală cu diferența de nivel a mercurului  $\Delta h$ .

Manometrele relative au ambele capete deschise, unul din ele se leagă de incinta a cărei presiune vrem s-o determinăm, celălalt capăt fiind în legătură cu atmosfera. În figura II.3.2a este prezentat cazul în care presiunea de măsurat este mai mare decât presiunea atmosferică, iar în figura II.3.2b, cazul în care ea este mai mică decât presiunea atmosferică. Presiunea din incintă este dată de relația:

$$p = H \pm \rho g \Delta h. \quad (3.2)$$

semnul plus luându-se pentru primul caz, iar semnul minus pentru al doilea caz,  $H$  fiind presiunea atmosferică. După un principiu asemănător este construit și *manometrul diferențial* (fig. II.3.3), care măsoară diferența de presiune dintre cele două gaze închise în vasele A și B.

Pentru presiuni mari, pînă la  $10^4$  atmosfere, se folosesc manometre metalice (fig. II.3.4). Manometrul metalic este prins prin înșurubare de incinta în care măsurăm presiunea. Gazul din incintă pătrunde în tubul elastic 1 și îl deformează. Prin dispozitivul 2, care acționează acul indicator 3, este pusă în evi-

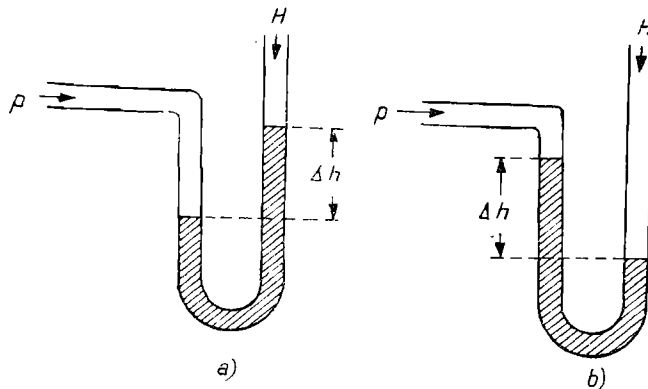


Fig. II.3.2

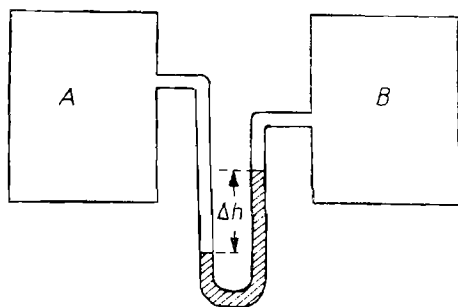


Fig. II.3.3

dență deformarea mecanică a tubului 1. Cu cât presiunea este mai mare, cu atât este mai deformat tubul elastic. Manometrul metalic se etalonează, astfel încât acul indicator 3 ne arată direct presiunea în atmosferă.

*Tehnica vidului.* Prin vid se înțelege o stare rarefiată a unui gaz dintr-o incintă, când presiunea lui este sub presiunea atmosferică. În funcție de această presiune vidul poate fi *redus*, *mediu* sau *înaintat* (înalt), vidul înalt ajungând astăzi până la  $10^{-21}$  torr și chiar mai mult.

Metodele de obținere a vidului ca și procedeele de măsurare a presiunilor joase și foarte joase sînt cuprinse în *tehnica vidului*. Ea are o importanță deosebită, deoarece lămpile cu incandescență, tuburile electronice, topirea și purificarea unor metale, ca și multe alte aplicații tehnice și științifice se bazează pe tehnica vidului. Obținerea vidului mediu se realizează cu ajutorul *pompei rotative* (fig. II.3.5). Ea este alcătuită dintr-un cilindru metalic în care se află un rotor excentric prevăzut cu două palete metalice, care împinse de un resort apasă etanș pe suprafața interioară a cilindrului. Cilindrul metalic este în legătură cu incinta care se videază și cu exteriorul (aerul atmosferic). Atunci cînd rotorul se învîrtește, spațiul  $V$  limitat de paletă se mărește și pătrunde în el gazul din incintă. Ulterior această cantitate de gaz este comprimată în spațiul  $v$  și evacuată în exterior. Operația se repetă pînă la evacuarea

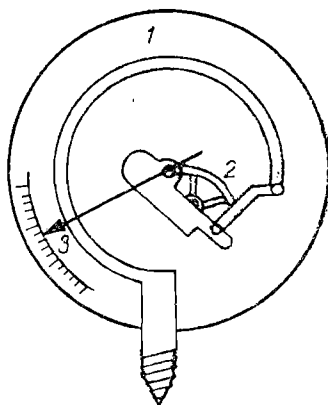


Fig. II.3.4

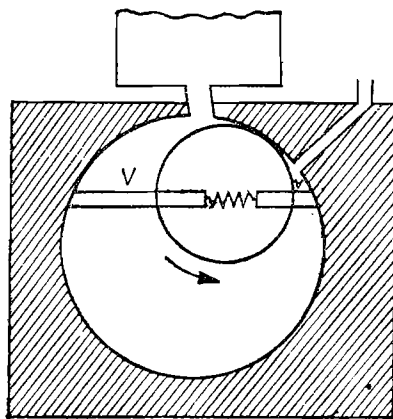


Fig. II.3.5

gazului din incintă. Pompa rotativă este introdusă în ulei pentru a se măări etanșeitatea, din care cauză se mai numește și *pompă cu ulei*. Cu ajutorul pompelor rotative cu ulei se pot atinge presiuni de ordinul a  $10^{-4}$  torr.

Pentru obținerea unui vid înalt, cuplate cu pompele rotative se folosesc *pompele de difuzie*, care pot elimina gazul dintr-o incintă prin antrenarea lui de către un curent de vaporii. Un model de pompă de difuzie este prezentat în figura II.3.6. Lichidul din balonul 1 (care poate fi mercur sau ulei) se încălzește pînă la fierbere. Vaporii respectivi pătrund în tubul 2, care este pus în legătură cu incinta de vidat 3 și cu o pompă rotativă cu ulei 4. Gazul din incintă care pătrunde prin difuzie în tubul 2 este antrenat de vaporii spre partea sa inferioară. Datorită curentului de apă care înconjoară tubul 2, vaporii se condensează și pătrund din nou în balon, iar moleculele de gaz sînt aspirate de pompa rotativă. Cu ajutorul pompelor de difuzie se pot obține presiuni joase pînă la  $10^{-7}$  torr, dar numai după ce în incintă s-a realizat un vid preliminar de circa  $10^{-2}$  torr.

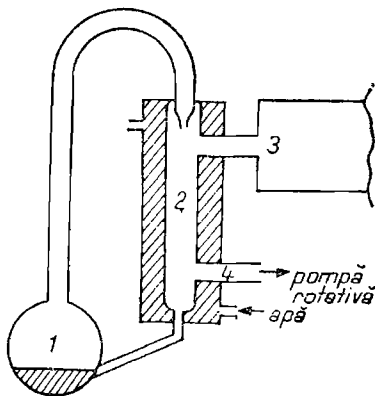


Fig. II.3.6

Presiunile joase, de la 1 torr pînă la  $10^{-5}$  torr, se pot măsura cu ajutorul *manometrului (joiei) Mac-Leod*, un manometru absolut care folosește la etalonarea celorlalte tipuri de manometre. Măsurarea presiunii cu ajutorul acestui manometru se bazează pe legea Boyle-Mariotte, care este foarte bine verificată la presiuni joase.

Un alt tip de manometru, folosit pentru presiuni joase, este *vacuumetrul termic*. Modul său de funcționare se bazează pe faptul că, la presiuni joase, conductibilitatea termică a gazelor scade liniar cu presiunea. Vacuumetrul termic este format dintr-un balon de sticlă în care se află un filament de sîrmă de platină, încălzit electric. Cînd presiunea scade, pierderile de căldură ale filamentului prin conductibilitate se micșorează, astfel încît temperatura lui crește, deci crește implicit și rezistența lui. Prin măsurarea rezistenței firului de platină se poate măsura presiunea dintr-o instalație, vacuumetrul termic fiind etalonat în prealabil cu ajutorul joiei Mac-Leod. El poate măsura presiuni din domeniul  $10-10^{-3}$  torr.

În fine, un alt aparat pentru măsurarea presiunilor foarte joase, care are un domeniu foarte întins, de la  $10^{-3}$  torr pînă la  $10^{-11}$  torr, este *manometrul de ionizare*. Funcționarea lui se bazează pe fenomenul de ionizare a moleculelor de gaz de către electronii care se mișcă foarte repede între două plăci. Manometrul de ionizare este un tub electronic cu trei electrozi, conectat la instalația de vid. Se arată că pentru presiuni suficient de joase, raportul dintre curentul ionic și cel electronic este direct proporțional cu presiunea. Măsurîndu-se acești doi curenți prin metode electrice, se pot determina presiunile joase.

### 3.2 LEGILE EMPIRICE ALE GAZELOR

Cei trei parametri care caracterizează la scară macroscopică o masă dată de gaz, aflată în echilibru, sînt presiunea, volumul și temperatura. Doar doi dintre acești parametri sînt independenți: valorile a doi dintre parametri determină univoc valoarea celui de al treilea. Relația care există între cei trei parametri ai unei mase de gaz aflate la echilibru se numește *ecuația termică de stare a gazului*. Experiențe inițial făcute cu gaze la presiuni de ordinul unei atmosfere și temperaturi situate nu mult în afara domeniului  $0^{\circ}\text{C}-100^{\circ}\text{C}$  au condus la o serie de observații referitoare la legătura dintre parametrii de stare. Numai unele dintre ele sînt adevărate și în alte domenii de presiune și temperatură. Situația de studiat se simplifică dacă unul din parametri este menținut constant și se observă corelația dintre ceilalți doi. În acest mod deci se studiază comparativ stările gazului care au aceeași temperatură, sau stările care au același volum, sau cele avînd aceeași presiune.

**a) Legea Boyle-Mariotte.** Boyle (1660) a studiat dependența de presiune a volumului unei mase de gaz menținut la temperatură constantă și a constatat (legea a fost redescoperită mai tîrziu de Mariotte) că *pentru o masă de gaz dată, aflată la temperatură constantă, produsul dintre presiunea gazului și volumul ocupat de acesta este constant*:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \dots = \text{const.} \quad (3.3)$$

Cu  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $p_2$ ,  $V_2$  s-au notat valorile presiunii și volumului respectiv pentru două stări 1 și 2 ale gazului, care au aceeași temperatură. Conținutul legii Boyle-Mariotte poate fi reprezentat grafic într-o diagramă ( $p$ ,  $V$ ) numită

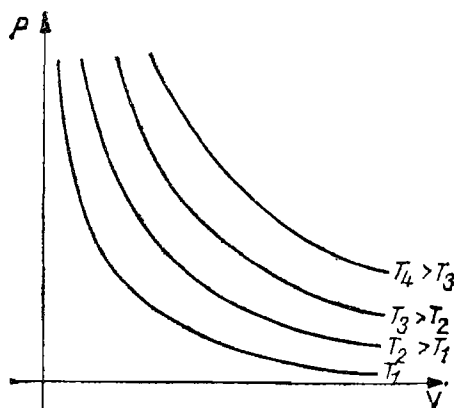


Fig. II.3.7

*diagramă Clapeyron.* Se folosește un sistem de axe carteziene, pe ordonată luându-se presiunea, iar pe abscisă volumul. Fiecărei stări a gazului îi corespunde un punct în acest plan. Conform legii Boyle-Mariotte, stările posibile ale gazului la o temperatură dată se plasează pe o hiperbolă echilateră. Figura II.3.7 prezintă patru hiperbole echilatre corespunzătoare la patru temperaturi  $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ . Hiperbolele sînt cu atît mai depărtate de originea axelor de coordonate, cu cît temperatura este mai ridicată. Curbele figurate se numesc *izoterme* pentru că punctele fiecărei curbe reprezintă stări de egală temperatură.

Măsurători mai precise decît cele inițiale, precum și extinderea domeniului de presiuni și temperaturi explorat au arătat că legea Boyle-Mariotte nu este riguros îndeplinită. S-a constatat experimental că:

- 1) la presiuni foarte joase legea este îndeplinită de toate gazele;
- 2) abaterile de la legea Boyle-Mariotte sînt mici dacă temperatura la care se lucrează este depărtată de temperatura de lichiefiere a gazului și dacă presiunile nu sînt foarte mari. Pentru ilustrarea influenței presiunii dăm tabelul II.2 în care figurează valorile produsului  $pV$ , pentru diferite gaze, la diferite presiuni, la temperatura de  $0^\circ\text{C}$ . Cantitatea de gaz cu care s-a lucrat a fost determinată în fiecare caz de condiția ca la  $0^\circ\text{C}$  și presiunea de 1 atm volumul ocupat de gaz să fie de un litru. Produsul  $pV$  este exprimat de în  $1 \cdot \text{atm}$ . Se vede că pînă la 100 atm abaterile de la legea Boyle-Mariotte sînt foarte mici, în timp ce, de exemplu, la 1000 de atm abaterile sînt foarte mari. Gazul care

TABELUL II.2

$p$ (atm)	$pV$ (l · atm)			
	$\text{H}_2$	$\text{N}_2$	$\text{O}_2$	Ar
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0690	0,9941	0,9265	0,9730
200	1,1380	1,0433	0,9140	1,0100
500	1,3565	1,3900	1,1560	1,3400
1 000	1,7200	2,0685	1,7355	1,9920

ascultă cel mai bine de legea Boyle-Mariotte este hidrogenul. Faptul că legea Boyle-Mariotte este bine verificată la presiuni joase (sub 1 atm) stă la baza unor metode de măsurare a presiunii.

Din punct de vedere cinetico-molecular abaterile de la legea Boyle-Mariotte sînt lesne de înțeles. Se poate arăta, în cadrul fizicii statistice, că un gaz ale cărui molecule n-ar interacționa de loc între ele și n-ar avea dimensiuni ar trebui să asculte de legea Boyle-Mariotte. Numai în acest caz ar fi posibil ca volumul ocupat de gaz să tindă la zero odată cu creșterea presiunii. Pentru gazele reale, prin creșterea presiunii se realizează o apropiere a moleculelor. Datorită forțelor de atracție dintre molecule, care încep să se manifeste în urma apropierii lor, trebuie să existe un domeniu de presiuni în care gazele să se comprime mai mult decît cere legea Boyle-Mariotte. Acest fapt este confirmat de experiență. O prea mare apropiere a moleculelor nu este însă posibilă, deoarece intervin forțe de respingere (vezi §1.5), deci la presiuni mari gazul se comprimă mai puțin decît cere legea Boyle-Mariotte. În nici un caz volumul ocupat de gaz nu poate fi redus la zero, deoarece moleculele au volum propriu.

Pentru prezentarea comportării gazelor, atunci cînd unul din parametri care variază este temperatura, este important să precizăm cu ce tip de termometru se măsoară temperatura. După descoperirea posibilității de a introduce o scară absolută de temperaturi (§ 2.3), problema asupra căreia atragem atenția aici nu se mai pune, deoarece toate termometrele cu care se lucrează în experiențe de precizie sînt gradate în scara temperaturilor termodinamice\*. Dar, deoarece noi nu am definit încă această scară, vom lucra deocamdată în scara unui termometru cu lichid, care folosește gradația Celsius, și vom formula legile gazelor cu ajutorul indicațiilor lui. De altfel legile gazelor, descoperite înaintea apariției termodinamicii, au fost stabilite cu ajutorul unor asemenea termometre.

**b) Legile Charles și Gay-Lussac.** Experiența a arătat că *pentru o masă de gaz menținută la același volum la diferite temperaturi, modificarea presiunii gazului față de valoarea avută la 0°C, raportată la valoarea ei la 0°C este direct proporțională cu temperatura și independentă de natura gazului:*

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \beta t, \quad (3.4)$$

unde  $p$  este valoarea presiunii gazului la temperatura  $t$ , iar  $p_0$  este valoarea ei la 0°C. Constanta de proporționalitate  $\beta$  se numește *coeficient de creștere a presiunii sub volum constant*. Legea empirică enunțată este cunoscută sub numele de legea lui Charles. Ea exprimă legătura dintre presiune și temperatură pentru stări caracterizate prin același volum al gazului.

Legea lui Charles, ca și legea Boyle-Mariotte, nu este o lege exactă. Ea este valabilă la presiuni foarte joase, unde pentru toate gazele se găsește  $\beta = \frac{1}{273,15}$ . Comportarea gazelor în alte domenii de presiune, pe intervale limitate de temperatură, poate fi încadrată aproximativ într-o formulă de tipul (3.4). Coeficientul  $\beta$  își schimbă atunci valoarea odată cu intervalul de temperatură și depinde de natura gazului. Dependența lui  $\beta$  de natura gazului și mai

---

\* Indicații asupra modului în care se face această gradare se dau în § 4.9.

ales de temperatură este însă destul de slabă (pentru dependența de natura gazului, vezi coloana doua a tabelului II.3).

Comportarea stărilor unei mase de gaz, în care presiunea exercitată de gaz are aceeași valoare, a condus la legea empirică a lui Gay-Lussac: *la presiune constantă, creșterea volumului unei mase de gaz față de valoarea avută la 0°C, raportată la valoarea volumului la 0°C, este direct proporțională cu temperatura și independentă de natura gazului*

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t \quad (3.5)$$

unde  $V$  este valoarea volumului la temperatura  $t$ , iar  $V_0$  este valoarea sa la 0°C;  $\alpha$  se numește *coeficient de dilatare sub presiune constantă*.

Între valorile  $V_1$  și  $V_2$  ale volumului la două temperaturi oarecare  $t_1$  și  $t_2$  există relația (consecință a lui 3.5)

$$V_2 = V_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \quad (3.6)$$

Ca și legile Boyle-Mariotte și Charles, legea Gay-Lussac este foarte bine verificată la presiuni foarte joase, unde se constată în plus că  $\alpha$  coincide numeric cu  $\beta$ . Pentru presiuni mai mari abaterile de la legea lui Gay-Lussac se pot reda printr-o ușoară dependență a lui  $\alpha$  de natura gazului și de temperatură. În tabelul II.3 sînt redată valorile lui  $\alpha$  și  $\beta$  pentru cîteva gaze.

TABELUL II.3

Gazul	$\alpha \cdot 10^7 \text{ (grd}^{-1}\text{)}$	$\beta \cdot 10^7 \text{ (grd}^{-1}\text{)}$
Hidrogen	36 600	36 613
Heliu	36 582	36 601
Azot	36 732	36 744
Bioxid de carbon	37 414	37 262
Aer	36 760	36 750

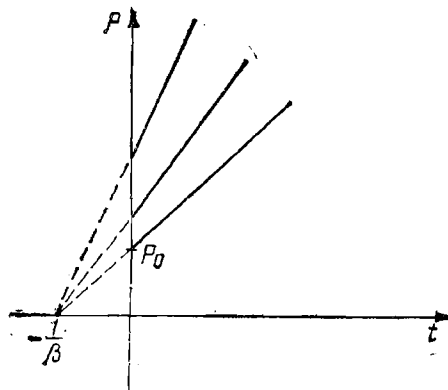


Fig. II.3.8

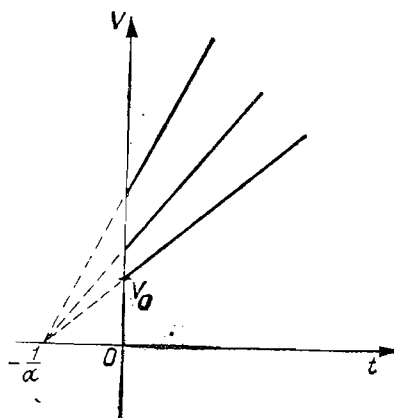


Fig. II.3.9

Pentru a reprezenta grafic diferitele stări ale unei mase de gaz, ar fi necesar un sistem de coordonate cu trei axe: una pentru presiune, una pentru volum și alta pentru temperatură. E mai comod însă să se utilizeze diagrame plane, în care sînt redată doar valorile a doi dintre cei trei parametri.

Am întilnit deja diagrama Clapeyron în care au fost reprezentate izotermele. *Izocorele*, curbe care unesc stări de același volum, se pot reprezenta într-o diagramă  $(p, t)$ . Dacă un gaz ar asculta riguros de legea lui Charles, izocorele sale ar fi niște drepte (fig. II.3.8), a căror înclinare ar depinde de mărimea masei de gaz considerate. *Izobarele*, curbele care unesc stări de aceeași presiune, se pot reprezenta într-o diagramă  $(V, t)$ . Ele sînt de asemenea drepte dacă legea Gay-Lussac este respectată (fig. II.3.9). Fiecare izobară din figura II.3.9. corespunde la o valoare determinată a presiunii. Se observă că dacă legile Charles, respectiv Gay-Lussac sînt respectate, izocorele prelungite spre temperaturi joase se întilnesc în același punct  $t = -\frac{1}{\beta}$  de pe axa absciselor a diagramei  $(p, t)$ , iar izobarele în același punct  $t = -\frac{1}{\alpha}$  de pe axa absciselor a diagramei  $(V, t)$ .

### 3.3. TERMOMETRUL NORMAL CU HIDROGEN

Faptul că gazele ascultă de o lege atît de simplă ca legea Charles a determinat folosirea lor ca substanțe termometrice. În § 2.2 a fost descris termometrul cu gaz la volum constant, la care temperatura era definită prin relația

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100. \quad (3.7)$$

Valabilitatea cu bună aproximație a legii Charles garantează că indicațiile termometrului cu gaz la volum constant nu diferă mult de ale termometrelor cu lichid, cu ajutorul cărora s-a studiat comportarea gazelor la volum con-



stant. Observăm că dacă gazul utilizat ascultă de legea lui Charles, atunci  $p_{100} - p_0 = 100\beta p_0$  și (3.7) se transcrie

$$t = \frac{p - p_0}{\beta p_0}. \quad (3.8)$$

În 1887 Comisia Internațională de măsuri și greutate a luat ca *scară standard de temperatură* (adică scara după care se etalonează celelalte termometre) — scara Celsius a termometrului cu gaz la volum constant, în care ca substanță de lucru se folosește hidrogenul. Presiunii hidrogenului la  $0^\circ\text{C}$  i s-a impus, prin construcție, valoarea de 1000 mm Hg. Termometrul care satisface această condiție se numește *termometru normal cu hidrogen*. Alegerea acestui termometru ca termometru standard a fost determinată de considerații practice, dintre care nu menționăm decât faptul că indicațiile  $t_H$  în scara sa diferă foarte puțin de indicațiile  $\theta$  ale unui termometru (fictiv) capabil să reproducă scara temperaturii termodinamice. Este important de știut că indicațiile termometrului cu hidrogen la volum constant,  $t_H$ , pot fi corectate și cu ajutorul lor se deduce valoarea lui  $\theta$  în fiecare caz. Corecțiile sînt foarte mici. După cum vom arăta în § 4.10, cu ajutorul termometrului normal cu hidrogen s-au dedus cu precizie mare valorile temperaturii termodinamice pentru cîteva stări fizice (puncte fixe), care să acopere un domeniu larg de temperaturi.

Primul termometru standard (fig. II.3.10) a fost construit de Chappuis. Hidrogenul este conținut într-o incintă  $I$ , confecționată din platină-iridiu, care are lungimea de 1,1 m și volumul de 1 l. El comunică printr-un tub îngust  $T$  cu un manometru. Incinta  $I$  este introdusă în mediul a cărui temperatură vrem s-o măsurăm. Tubul manometric conține reperul de volum constant  $r_1$ .  $B$  este un tub barometric care se deplasează solidar cu un vernier  $V$  de-a

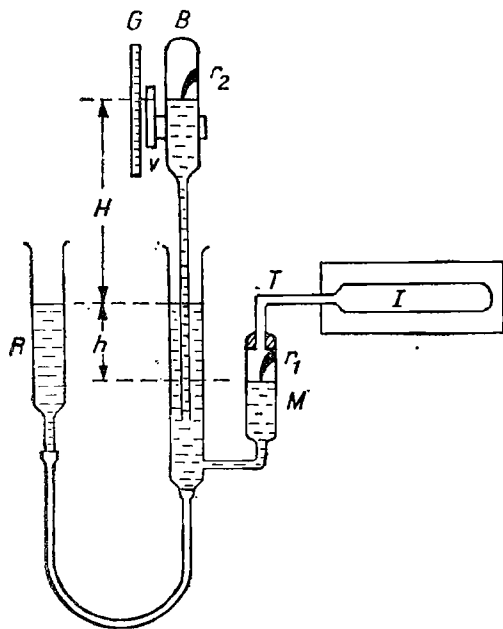


Fig. II.3.10

lungul unei scări gradate  $G$ . În „vidul barometric” din  $B$  există un al doilea reper  $r_2$ , la care trebuie adus mercurul din  $B$ . Pentru a măsura presiunea este mișcat mai întâi rezervorul  $R$  pînă ce mercurul atinge reperul de volum constant  $r_1$ , apoi este mișcat tubul barometric pînă cînd mercurul din el atinge reperul  $r_2$ . Presiunea în gaz (în mm Hg) este dată de distanța dintre cele două repere ( $H + h$  pe figură). Pentru a deduce  $t_H$  se fac corecții care țin seama de dilatarea incintei  $I$  și de faptul că hidrogenul din tubul de legătură  $T$  nu se află exact la aceeași temperatură cu restul hidrogenului.

În cele ce urmează vom înțelege prin valoarea temperaturii pe cea dată de un termometru etalonat în conformitate cu termometrul normal cu hidrogen.

### 3.4. LEGEA GAZELOR PERFECTE

Comportarea gazelor reale la presiuni scăzute și temperaturi relativ ridicate sugerează introducerea cazului limită al unui gaz care ar asculta riguros de

legea Boyle-Mariotte și legea Gay-Lussac cu  $\alpha = \frac{1}{273,15}$ :

$$pV = \text{const. pentru stări de aceeași temperatură} \quad (3.9)$$

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \text{ pentru stări de aceeași presiune,} \quad (3.10)$$

unde  $V_0$  este valoarea volumului la  $0^\circ\text{C}$ , iar  $t$  este temperatura măsurată în scara termometrelor normale cu hidrogen. Un asemenea gaz îl vom numi *ideal* sau *perfect*.\*

Să demonstrăm că pentru un gaz perfect este îndeplinită și legea lui Charles cu  $\beta = \alpha$ . Considerăm o masă de gaz perfect la temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , care la presiunea  $p_0$  ocupă volumul  $V_0$  (starea 0 din fig. II.3.11). Fie stările 1 și 2 caracterizate respectiv prin  $(p_0, V, t)$  și  $(p, V_0, t)$ . Prin modul de alegere a lor,

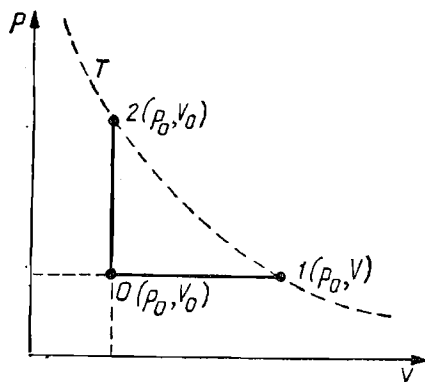


Fig. II.3.11

\* Observăm că definiția dată aici gazului perfect nu este completă, deoarece din legile admise nu rezultă întreaga comportare a gazului, de exemplu nu se poate spune ce valori are căldura specifică a gazului pentru o transformare oarecare.

stările 0 și 1 se află pe aceeași izobară, stările 0 și 2 pe aceeași izocoră, iar stările 1 și 2 pe aceeași izotermă. Se observă că  $p$ ,  $V$  și  $t$  pot fi luați arbitrari. Între parametrii celor trei stări există relații, pentru că stările de pe izotermă și cele de pe izobară sînt legate (conform ipotezei) respectiv prin legile Boyle-Mariotte și Gay-Lussac

$$p_0 V = p V_0. \quad V = V_0 (1 + \alpha t).$$

Împărțind cele două relații, obținem

$$p = p_0 (1 + \alpha t), \quad (3.11)$$

deci între presiunile stărilor 0 și 2 (stări de același volum, starea 0 la temperatura  $0^\circ\text{C}$ ) există o relație care coincide cu legea Charles.

Pentru un gaz perfect, în scara de temperaturi a termometrului normal cu hidrogen, sînt îndeplinite deci fără abateri legile Boyle-Mariotte, Gay-Lussac și Charles, adică

$$\left. \begin{array}{l} pV = \text{const. pentru stări de aceeași temperatură (pe izoterme)} \\ V = V_0 (1 + \alpha t) \text{ pe izobare} \\ p = p_0 (1 + \alpha t) \text{ pe izocore} \end{array} \right\} \alpha = \frac{1}{273,15} \quad (3.12)$$

Legile scrise se numesc *legile gazului perfect*.

Gazul perfect supunîndu-se legii Charles, orice izocoră a sa se reprezintă într-o diagramă ( $p$ ,  $t$ ) printr-o dreaptă care taie axa temperaturilor în punctul  $t = -\frac{1}{\alpha}$  (fig. II.3.8). Asemănător arată o izobară în diagrama ( $V$ ,  $t$ ), deoarece gazul ascultă de legea Gay-Lussac (fig. II.3.9). În starea de temperatură  $t = -\frac{1}{\alpha}$  presiunea gazului perfect este nulă prin definiție. Această

situație s-ar putea realiza (teoretic) dacă moleculele gazului s-ar opri din mișcarea lor (dacă ar dispărea agitația termică). S-ar realiza astfel tocmai starea de zero absolut de care a fost vorba în § 2.4, deoarece energia internă a gazului ideal nu poate lua o valoare mai mică decît în starea de imobilitate a tuturor moleculelor. Este interesant că din comportarea gazului ideal, care este inspirată de comportarea gazului real în condiții de rarefiere, rezultă o valoare pentru temperatura stării de zero absolut în scara termometrului normal cu hidrogen în foarte bună concordanță cu datele experimentale:

$$t_{\text{zero absolut}} = -273,15^\circ\text{C}. \quad (3.13)$$

Faptul că nici o substanță din natură nu rămîne în stare gazoasă în vecinătatea lui zero absolut nu este esențial pentru discuția precedentă, deoarece ea s-a purtat pe un model ideal.

După cum se va vedea, legile gazelor perfecte se exprimă mai simplu, dacă se măsoară temperatura luînd ca origine temperatura stării de zero absolut. Se definește astfel (vezi și § 3.3) *temperatura absolută în scara termometrului normal*

$$T = t + 273,15, \quad (3.14)$$

unde  $t$  este temperatura în scara termometrului normal. În continuare, pentru simplificare, vom numi pe  $T$  *temperatură absolută*\*. Gradul noii scări de temperatură îl vom numi grad Kelvin.

Cu ajutorul temperaturii absolute legea lui Gay-Lussac devine

$$V = V_0 \alpha T, \quad (3.15)$$

unde  $V_0$  și  $V$  sînt valorile volumului unei mase de gaz menținute la presiune constantă la  $273,15^\circ\text{K}$  și respectiv  $T^\circ\text{K}$ , iar legea Charles devine

$$p = p_0 \alpha T, \quad (3.16)$$

unde  $p_0$  și  $p$  sînt presiunile exercitate de o masă de gaz menținută la volum constant la  $273,15^\circ\text{K}$  și respectiv  $T^\circ\text{K}$ . Din relațiile (3.15) și (3.16) rezultă o legătură simplă între volumele și temperaturile a două stări oarecare aflate la aceeași presiune și între presiunile și temperaturile a două stări oarecare de același volum

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ pentru stări de aceeași presiune,} \quad (3.17)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ pentru stări de același volum.} \quad (3.18)$$

Cunoașterea a două dintre legile gazelor perfecte (a treia decurge din ele) ne permite să arătăm că între parametrii  $p$ ,  $V$  și  $T$  ai unei stări oarecare a unui gaz perfect există o relație bine determinată. Această relație este tocmai *ecuația termică de stare* a gazului perfect, pe care o vom deduce în continuare. Fie două stări ale unei aceleiași mase de gaz perfect, caracterizate prin valorile oarecare  $p_1, V_1, T_1$  și  $p_2, V_2, T_2$  ale parametrilor de stare. În figura II.3.12 aceste stări sînt reprezentate în diagramă Clapeyron. Ele pot fi unite în mai multe moduri. Le putem uni de exemplu cu ajutorul izotermei care trece prin 1 și al izocorei care trece prin 2. Starea reprezentată prin punctul lor de intersecție

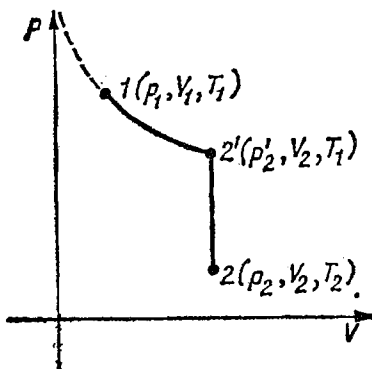


Fig. II.3.12

\* Ne amintim că în § 2.4 am notat cu  $T$  temperatura absolută în scara temperaturilor termodinamice ( $T = \theta + 273,15$ ). Aici este folosită intenționat aceeași notație  $T$ , din motive care vor fi expuse în § 4.9.

o notăm cu 2'. Parametrii ei sînt  $p'_2$ ,  $V_2$ ,  $T_1$ . Între parametrii stărilor 1 și 2 și cei ai stării intermediare 2' există relațiile

$$p_1 V_1 = p'_2 V_2, \quad p'_2 = p_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Eliminînd pe  $p'_2$  rezultă:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad (3.19)$$

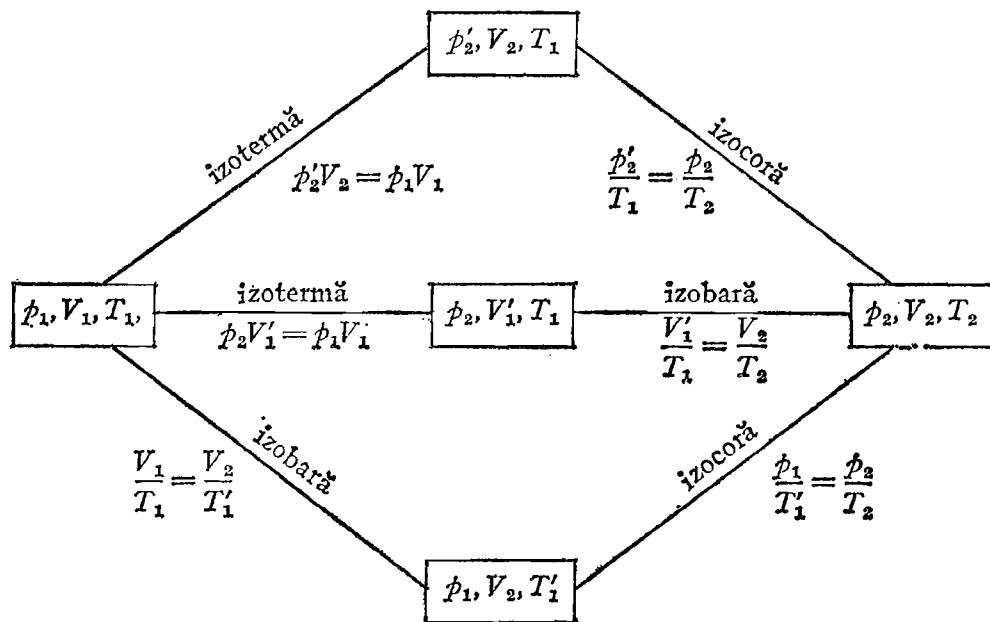
adică o relație între parametrii care caracterizează două stări absolut oarecare ale aceleiași mase de gaz perfect. Relația precedentă se poate scrie și în forma

$$\frac{pV}{T} = C,$$

$C$  fiind o constantă pentru o masă de gaz dată. Constanta  $C$  este proporțională cu masa gazului.

În forma găsită mai sus, ecuația de stare a gazelor perfecte a fost dedusă de Clapeyron.

Observăm că legea Clapeyron putea fi dedusă legînd stările 1 și 2 prin alte curbe din diagrama Clapeyron; cîteva posibilități sînt redată în schema de mai jos:



Lăsăm pe seama cititorului găsirea altor posibilități de trecere între stările 1 și 2.

Se poate extrage dependența de masă din constanta  $C$  și preciza factorul rămas, exploatând încă o proprietate a gazelor și anume legea lui Avogadro. Să presupunem că avem de-a face cu un mol de gaz perfect, al cărui volum îl notăm cu  $v_0$ . Pentru un mol de gaz perfect raportul  $\frac{p v_0}{T}$  are o valoare independentă de natura gazului. (Atunci cînd vorbim despre „natura gazului ideal” ne imaginăm că ar exista mai multe feluri de gaze perfecte, care se deosebesc între ele prin felul moleculelor lor, așa cum în realitate, în anumite cazuri, gaze de naturi diferite au comportări apropiate de a gazului perfect.) Raportul  $\frac{p v_0}{T}$  este o constantă independentă de natura gazului, deoarece legea lui Avogadro afirmă că moleculele-gram luate în condiții identice de temperatură și presiune ocupă volume egale. Din experiență se ia atunci următoarea informație: valoarea volumului molar la  $p_0 = 1$  atm și  $t = 0^\circ\text{C}$  este de 22,41 l și se admite că atîta ar fi volumul molar al gazului perfect în condițiile descrise. Raportul constant  $\frac{p v_0}{T}$  definește *constantă gazelor* și se notează cu  $R$ . Valoarea acestei constante universale a gazelor se deduce din egalitatea:

$$R = \frac{p_0 v_0}{T_0} \quad (3.20)$$

cu  $p_0 = 1$  atm,  $v_0 = 22,41$  l și  $T_0 = 273,15^\circ\text{K}$ . Valoarea constantei  $R$  este

$$R = 8,31 \text{ J/grd} \cdot \text{mol}. \quad (3.21)$$

Se lucrează uneori cu valoarea constantei  $R$  exprimată în  $1 \cdot \text{atm/grd} \cdot \text{mol}$ , sau în  $\text{cal/grd} \cdot \text{mol}$ ,

$$R = 0,082 \frac{1 \cdot \text{atm}}{\text{grad} \cdot \text{mol}} = 1,98 \text{ cal/grd} \cdot \text{mol}. \quad (3.22)$$

Deci pentru un mol de gaz perfect legătura dintre parametrii de stare este

$$p v_0 = RT. \quad (3.23)$$

Deoarece  $V = n v_0$  ( $V$  este volumul unei mase de gaz care conține  $n$  moli), ecuația de stare pentru o masă oarecare de gaz perfect rezultă imediat:

$$pV = nRT. \quad (3.24)$$

Relația (3.24) se numește *legea gazelor perfecte*. Ea se poate scrie și sub forma

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (3.25)$$

unde  $m$  este masa gazului, iar  $M$  masa sa moleculară; se mai poate scrie și relația

$$\rho = \frac{pM}{RT}, \quad (3.26)$$

unde  $\rho$  este densitatea gazului ( $\rho = \frac{m}{V}$ ).

În măsura în care două gaze pot fi considerate gaze perfecte, din (3.26) rezultă că raportul densităților lor luate în aceleași condiții (aceeași presiune și temperatură) este egal cu raportul maselor lor moleculare

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Relația precedentă permite măsurarea masei moleculare relative  $\frac{M_1}{M_2}$  a două gaze cunoscând densitățile lor în condiții identice de presiune și temperatură, cu condiția ca ambele gaze să aibă o comportare foarte apropiată de a unui gaz perfect.

### 3.5. GAZUL PERFECT DIN PUNCT DE VEDERE CINETICO-MOLECULAR. FORMULA PRESIUNII

Comportarea gazelor, în special în condiții de rarefiere, se poate înțelege pe baze cinetico-moleculare. La gaze, volumul ocupat de molecule este foarte mic în raport cu volumul total al gazului (1 g de apă, care la 100°C ocupă aproximativ 1 cm<sup>3</sup>, după trecerea în stare de vapori ocupă un volum de 1600 cm<sup>3</sup>). Moleculele în stare gazoasă se află în medie la distanțe mari unele de altele. În condiții de rarefiere, forțele de atracție dintre molecule nu se mai manifestă decât în mică măsură. Faptul că forțele intermoleculare nu pot să joace un rol esențial la presiuni mici este confirmat de aproximativă independență a proprietăților gazelor de natura lor chimică în aceste condiții. Cu cât gradul de rarefiere este mai ridicat, cu atât comportarea gazelor se apropie mai mult de a gazului perfect. Se consideră atunci că la scară microscopică gazul perfect ar corespunde situației limită a unui gaz format din molecule care nu interacționează între ele și au dimensiuni neglijabile. Această imagine despre gazul perfect pe care o vom adopta în continuare ne servește la înțelegerea proprietăților sale la scară macroscopică.

În gazul perfect singurele evenimente care perturbă mișcarea liberă a moleculelor sînt ciocnirile dintre ele sau cu peretele vasului. Se presupune că în această ciocnire moleculele se comportă ca sfere dure perfect elastice. Ciocnirea perete-moleculă se aproximează tot cu o ciocnire elastică. Atunci, în urma ciocnirii cu peretele, care se află tot timpul în repaus, are loc doar o schimbare a direcției de mișcare a moleculei.

În absența unor cîmpuri exterioare, un gaz are proprietăți omogene, în particular numărul de molecule dintr-un volum de mărime dată, de dimensiuni macroscopice, are practic aceeași valoare, ori unde ar fi plasat volumul considerat în gaz.

Pentru un gaz perfect valoarea presiunii exercitate asupra peretelui poate fi calculată analizînd procesul de ciocnire al moleculelor cu peretele. Vom prezenta în detaliu acest calcul. O analiză atentă a problemei cere să ținem seama că într-un gaz la echilibru moleculele au diferite viteze, în principiu toate vitezele posibile. Fie  $N$  numărul total de molecule din gaz. Putem face o clasificare a moleculelor după vitezele lor la un moment dat. Notăm cu  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  componentele vitezei  $\vec{v}$  a unei molecule față de un sistem fix de axe. Este co-

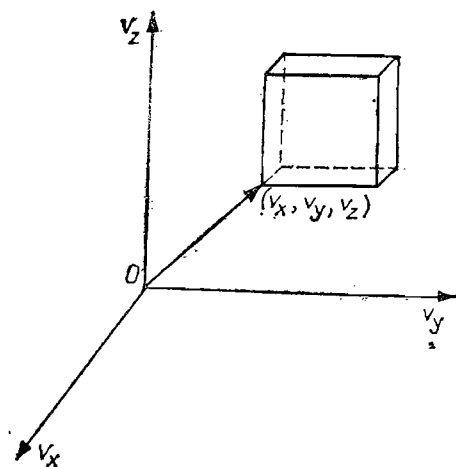


Fig. II.3.13

modă introducerea unui „spațiu al vitezei“, în care fiecărei valori a vectorului viteză să-i corespundă un punct. Aceasta se realizează considerînd un triedru cartezian pe ale cărui axe notăm componentele vitezei și punînd în corespondență viteza  $\vec{v}$  cu punctul de coordonate  $v_x, v_y, v_z$  (fig. II.3.13). Reprezentînd în acest mod vitezele tuturor moleculelor, vom obține  $N$  puncte în spațiul vitezei. Pentru a face clasificarea moleculelor după viteze împărțim spațiul considerat în volume paralelipipedice drepte, eventual egale, și indicăm cîte puncte sînt cuprinse în interiorul unui paralelipiped dat. Fie  $\Delta N_{\vec{v}}$  numărul de molecule care au componentele vitezei cuprinse respectiv în intervalele  $(v_x, v_x + \Delta v_x), (v_y, v_y + \Delta v_y), (v_z, v_z + \Delta v_z)$ . Mărimile  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$  reprezintă laturile paralelipipedului drept al cărui vîrf cel mai apropiat de origine are coordonatele  $(v_x, v_y, v_z)$ . Evident:

$$\sum_{\vec{v}} \Delta N_{\vec{v}} = N. \quad (3.27)$$

Cunoștințele despre clasificarea moleculelor după viteze (distribuția după viteze) vor fi cu atît mai precise, cu cît vom utiliza paralelipipele mai mici.

Se admite că *la echilibru termic* mărimile  $\Delta N_{\vec{v}}$  nu se schimbă în timp, adică deși moleculele își schimbă vitezele în urma ciocnirilor, deci punctele atașate lor în spațiul fictiv considerat se mișcă, numărul de puncte care intră într-un paralelipiped dat este permanent egal cu numărul de puncte care ies din acest paralelipiped.

Se admite și faptul că *distribuția de viteze este izotropă*, adică  $\Delta N_{\vec{v}}$  la valoare fixată a mărimii vitezei are o valoare independentă de orientarea ei.



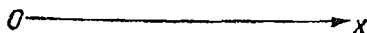


Fig. II.3.14

Cunoscînd  $\Delta N_{\vec{v}}$ , putem calcula valorile medii ale unor mărimi care depind de viteza moleculei ca:

$$\begin{aligned} \text{valoarea medie a mărimii vitezei } \bar{v} &= \frac{\sum v \Delta N_{\vec{v}}}{N} \\ \text{valoarea vitezei pătratice medii } \bar{v}^2 &= \frac{\sum v^2 \Delta N_{\vec{v}}}{N} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ne îndreptăm acum atenția asupra situației din vecinătatea unui perete al recipientului care închide gazul. Fie un triedru fix de axe, cu axa  $Ox$  dirijată după direcția normalei la perete. Considerăm o porțiune a peretelui, de formă dreptunghiulară și de arie  $\Delta S$  (fig. II.3.14). Fie la momentul  $t$  o moleculă din gaz de viteză  $\vec{v}$ . Pentru ca să ciocnească peretele în intervalul de timp  $(t, t + \Delta t)$ , molecula trebuie să se afle în interiorul unui paralelipiped oblic cu baza  $\Delta S$  și cu latura a treia avînd mărimea  $v\Delta t$  și înclinarea vitezei ei  $\vec{v}$ . Dacă molecula cu viteza  $\vec{v}$  se află în afara paralelipipedului indicat, ea fie că ajunge la suprafața  $\Delta S$  mai tîrziu de momentul  $t + \Delta t$ , fie că ciocnește peretele în afara suprafeței considerate  $\Delta S$ .

Molecula cu viteza  $\vec{v}$  ciocnește peretele venind de pe direcția  $AM$  (fig. II.3.15). Notăm cu  $v_x$  componenta vitezei după direcția normalei la perete. Ciocnirea fiind presupusă elastică, molecula va fi reflectată de perete, adică va părăsi peretele cu o viteză egală ca mărime cu cea inițială, dar dirijată după o direcție  $MA'$  care formează același unghi cu normala la perete ca și  $MA$ , și este situată în același plan normal (planul format de  $MA$  și normală). În urma ciocnirii a avut loc o variație a impulsului moleculei ale cărei componente sînt:

$$\Delta p_x = -mv_x - (+mv_x) = -2mv_x, \Delta p_y = \Delta p_z = 0.$$

\*  $\bar{v} \neq 0$ , în timp ce  $\vec{v} = 0$  datorită izotropiei distribuției după viteze.

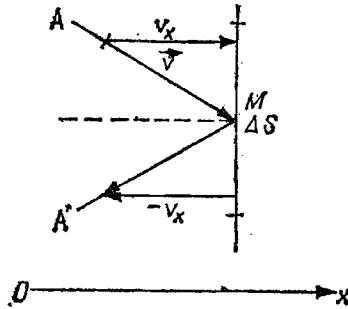


Fig. II.3.15

Datorită ciocnirii peretele primește un impuls egal, dar de semn contrar variației impulsului moleculei. În unitatea de volum a gazului se găsesc  $\frac{N}{V}$  molecule și, dintre ele,  $\frac{\Delta N_{\vec{v}}}{V}$  au viteza în vecinătatea valorii  $\vec{v}$ . Atunci numărul de molecule cu viteză în vecinătatea valorii  $\vec{v}$  din volumul paralelipipedic considerat este egal cu volumul paralelipipedului înmulțit cu  $\frac{\Delta N_{\vec{v}}}{V}$ , adică este

$$v_x \Delta t \Delta S \frac{\Delta N_{\vec{v}}}{V},$$

deoarece înălțimea paralelipipedului este  $v_x \Delta t$  (vezi fig. II.3.14).

Impulsul transmis peretelui de moleculele de categoria considerată, în timpul  $\Delta t$ , este normal pe perete și are valoarea

$$\Delta P_x(\vec{v}) = 2m v_x [v_x \Delta t \Delta S] \frac{\Delta N_{\vec{v}}}{V}.$$

Impulsul transmis în timpul  $\Delta t$  peretelui de toate moleculele care-l ciocnesc, indiferent de viteza lor, este

$$\Delta P_x = \sum_{\vec{v} (v_x > 0)} \Delta P_x(\vec{v}) = \frac{2m \Delta t \Delta S}{V} \sum_{\vec{v} (v_x > 0)} v_x^2 \Delta N_{\vec{v}},$$

deoarece contribuie doar moleculele care se îndreaptă spre perete ( $V_x > 0$ ).

Forța exercitată asupra peretelui este  $F = \frac{\Delta P_x}{\Delta t}$ , iar presiunea va fi

$$p = \frac{\Delta P_x}{\Delta t \Delta S} = \frac{2m}{V} \sum_{\vec{v} (v_x > 0)} v_x^2 \Delta N_{\vec{v}}.$$

Mărimea  $\sum_{v(v_x > 0)} v_x^2 \Delta N_{\vec{v}}$  se poate exprima cu ajutorul valorii medii a pătratu-

lui componenteii după  $Ox$  a vitezei, în forma  $\frac{1}{2} N v_x^2$ , avînd în vedere că:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{v}(v_x > 0)} v_x^2 \Delta N_{\vec{v}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{v}(v_x < 0)} v_x^2 \Delta N_{\vec{v}};$$

cele două sume din egalitatea de mai sus sînt egale între ele, pe baza izotropiei distribuției de viteze.

Din același motiv

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{1}{3} \overline{v^2},$$

astfel încît

$$p = \frac{mN}{3V} \overline{v^2}. \quad (3.29)$$

Raționamentul precedent a condus la exprimarea presiunii cu ajutorul unor mărimi legate de moleculele gazului și mișcarea lor. Dacă introducem energia cinetică medie a unei molecule

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{mv^2}{2}, \quad (3.30)$$

relația (3.30) devine

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{\mathcal{E}}. \quad (3.31)$$

*Presiunea exercitată de un gaz perfect este direct proporțională cu numărul de molecule din unitatea de volum a gazului și cu energia cinetică medie a moleculei în gaz.*

Comparînd (3.31) cu legea gazelor perfecte  $pV = nRT$ , rezultă că  $nRT = \frac{2}{3} N \overline{\mathcal{E}}$ . Dar  $N = n\mathcal{N}$  ( $\mathcal{N}$  este numărul lui Avogadro) și deci  $\overline{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} \frac{R}{\mathcal{N}} T$ .

Constanta  $\frac{R}{\mathcal{N}}$  reprezintă *constantă lui Boltzmann* și joacă un rol special în fizica statistică. Valoarea ei este

$$k = \frac{R}{\mathcal{N}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}. \quad (3.32)$$

Avem deci

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.33)$$

A rezultat o legătură directă între temperatura  $T$  și energia cinetică medie  $\overline{\mathcal{E}}$  a moleculei. Formula găsită este fundamentală în fizică. Importanța ei se datorește faptului că leagă temperatura de mișcarea moleculelor. Rezultă de aici că la echilibrul termic a două gaze perfecte 1 și 2,  $\overline{\mathcal{E}}_1 = \overline{\mathcal{E}}_2$ .

Se vede că dacă gazele sînt formate din molecule cu mase diferite  $m_1$  și  $m_2$ , și anume  $m_1 > m_2$ , la aceeași temperatură  $T$  viteza pătratică medie a moleculelor din gazul 1 va fi mai mică decît viteza pătratică medie a moleculelor din gazul 2. Evidențiem forma următoare de scriere a relației (3.33):

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (3.34)$$

$M$  fiind masa moleculară a gazului considerat.

Cu ajutorul constantei  $k$  legea gazelor perfecte se poate transcrie

$$\frac{N}{V} = \frac{p}{kT}. \quad (3.35)$$

În relația scrisă numărul de molecule din unitatea de volum de gaz perfect este exprimat în funcție de presiune și temperatură. Acest număr nu depinde de natura gazului. Formula scrisă explicitează legea Avogadro, despre care știm că a fost luată în considerație atunci cînd s-a dedus legea gazelor perfecte.

### 3.6. ENERGIA INTERNĂ A UNUI GAZ, PERFECT, MONOATOMIC

În cazul unui gaz perfect, monoatomic, atomii care-l compun n-au decît mișcare de translație. Mișcarea moleculelor biatomice este mai complicată: în afara translației moleculei ca un întreg, molecula execută și o mișcare de rotație în jurul centrului ei de greutate, iar cei doi atomi din care este formată oscilează de-a lungul axei care-i unește (mișcare de vibrație a moleculei). Nu se iau în considerație existența unei structuri a atomului însuși și a unei energii a mișcării din interiorul său. Ca urmare energia unei molecule biatomice rezultă din însumarea energiilor mișcărilor de translație, rotație și vibrație.

Vom considera aici doar cazul gazului monoatomic. Energia internă a gazului perfect monoatomic este egală cu suma energiilor cinetice ale atomilor, deoarece ei sînt presupuși liberi. Pe baza rezultatelor din paragraful precedent, noi putem calcula energia medie a gazului perfect monoatomic. Ea se obține înmulțind numărul  $N$  de atomi din gaz cu energia medie (a mișcării de translație) a unui atom, dată de (3.33).

Dacă gazul este izolat, energia sa internă este o constantă și ea coincide cu energia medie a gazului

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT. \quad (3.36)$$

Cu  $U$  vom nota în general energia internă a unui sistem.

Formula (3.36) dă expresia energiei interne și pentru cazul în care gazul se află la echilibru termic cu un alt sistem la temperatura  $T$ , deoarece dacă condițiile de echilibru sînt îndeplinite înainte de punerea a două sisteme în contact termic (atunci cînd cele două sisteme sînt izolate), prin punerea lor în contact nu constatăm la scară macroscopică nici o modificare.

Am găsit deci că *energia internă a unui gaz perfect monoatomic este direct proporțională cu temperatura absolută a gazului și cu cantitatea de gaz, dar nu depinde nici de volumul ocupat de gaz și nici de presiune.*

Observăm că expresia (3.36) a energiei interne a unui gaz perfect a rezultat din combinarea cunoștințelor despre acesta la scară macroscopică (ecuația termică de stare) cu imaginea adoptată despre gaz la scară microscopică. Știm că gazele foarte rarefiate ascultă de ecuația gazelor perfecte. Experimental s-a constatat (vezi § 4.3) că energia internă a gazelor foarte rarefiate depinde doar de temperatura acestora. În acest rezultat vedem o confirmare a imaginii adoptate pentru gazul perfect la scară microscopică.

### 3.7. TRANSFORMĂRI CUASISTATICE ALE GAZELOR. LUCRUL MECANIC EFECTUAT ÎNTR-O TRANSFORMARE CUASISTATICĂ A UNUI GAZ

Într-o transformare oarecare a unui sistem, de la o stare de echilibru la alta, acesta trece printr-o succesiune de stări intermediare, care nu sînt stări de echilibru. În asemenea stări, parametrii de stare nu pot fi definiți. Dacă o transformare este efectuată suficient de lent, atunci proprietățile sistemului în stările intermediare nu diferă mult de cele în stările de echilibru. La limită se poate imagina un proces de transformare atît de lent, încît sistemul să evolueze trecînd numai prin stări de echilibru. Un asemenea proces este denumit *cuasi-static*. Procesul cuasistatic este un proces ideal.

*Exemplu.* Starea inițială: gaz închis într-un cilindru cu piston pe care se află o greutate  $G$  în echilibru la temperatura  $T$  cu interiorul, unde presiunea este  $p_0$ . Presiunea inițială este

$$p_i = p_0 + \frac{G}{S},$$

unde  $S$  este aria bazei cilindrului. Starea finală: echilibru fără greutate pe piston, adică presiunea finală este  $p_f = p_0$ , aceeași temperatură  $T$ .

Trecerea de la starea inițială la starea finală o putem face în două moduri diferite:

a) Ridicăm brusc greutatea de pe piston.

b) Greutatea de pe piston o reducem treptat de la valoarea  $G$  la valoarea zero.

În primul caz, la ridicarea bruscă a greutății gazul nu va mai fi în echilibru, pistonul se va deplasa brusc spre exteriorul cilindrului, apoi va executa o serie de mișcări de oscilație amortizate pînă ce se va stabili în noua poziție de echilibru. În stările care preced atingerea echilibrului, gazul suferă o serie de comprimări și dilatări; ca urmare, temperatura sa diferă de cea a exteriorului și are valori deosebite în diferitele regiuni ale gazului. Trecerea a) este o transformare nestatică. Trecerea b), prin micșorarea greutății  $G$  cu cantități foarte mici, determină deplasări mici ale pistonului, care perturbă foarte puțin starea gazului, stările prin care trece acesta fiind meru foarte apropiate de stări de echilibru. La limita variației infinite lente a presiunii, s-ar realiza un proces cuasistatic.

În cele ce urmează vom considera transformări cuasistatice (ideale) ale gazelor. *Orice proces cuasistatic poate fi reprezentat printr-o curbă într-o diagramă a parametrilor de stare.* Curbă unește stările de echilibru prin care trece gazul. Vom reprezenta de obicei aceste curbe în diagrama Clapeyron.

Cele mai simple transformări cuasistatice ale gazelor sînt transformările izoterme, transformările izobare, și cele izocore, la care se trece prin stări de aceeași temperatură, respectiv aceeași presiune și același volum.

Data fiind definiția transformării cuasistatice, curba care reprezintă *transformarea izotermă* în diagrama Clapeyron coincide cu *izoterma* care, prin definiție, se obține unind stările (de echilibru) de aceeași temperatură ale gazului.

*Lucrul mecanic efectuat într-o transformare izobară.* Fie o masă de gaz închis într-un cilindru cu piston, asupra căruia se exercită din exterior o presiune constantă  $p$ , care nu este influențată de transformările suferite de gaz. La echilibru presiunea gazelor este egală cu presiunea exterioară (presupunem greutatea pistonului neglijabilă). O deplasare cu distanța  $h$  a pistonului înseamnă deplasarea punctului de aplicație al forței externe  $F = pS$  ( $S$  — aria bazei cilindrului), și corespunde unui lucru mecanic de mărime  $L = pSh = p(V_2 - V_1)$ , pentru că  $Sh$  reprezintă tocmai diferența dintre volumul ocupat de gaz în stare finală 2 și volumul ocupat în starea inițială 1. Dacă prin deplasarea pistonului se efectuează o comprimare a gazului, lucrul mecanic este primit de gaz (are loc creșterea temperaturii și deci a energiei interne). În legătură cu lucrul mecanic schimbat cu exteriorul se face următoarea convenție:  $L > 0$  dacă sistemul primește lucru mecanic și  $L < 0$  dacă sistemul efectuează lucru mecanic. În cazul studiat, la o destindere izobară a sa, gazul trebuie să efectueze lucru mecanic. În general deci:

$$L_{\text{izobar } 1 \rightarrow 2} = -p(V_2 - V_1). \quad (3.37)$$

*Lucrul mecanic într-o transformare oarecare.* Vom presupune că în exterior presiunea are la orice moment o valoare bine determinată, dar că ea se schimbă în timp. Pentru a evalua lucrul mecanic efectuat într-o transformare cuasistatică oarecare a unui gaz din starea 1 în starea 2, împărțim transformarea într-o succesiune de transformări între stări foarte apropiate, în așa fel încît în fiecare din ele presiunea exteriorului să fie practic constantă. În fiecare etapă se schimbă cu exteriorul un lucru mecanic  $\Delta L_i = -p_i \Delta V_i$ , unde  $p_i$  este valoarea presiunii externe în etapa  $i$  considerată a transformării, iar  $\Delta V_i$  este variația corespunzătoare a volumului gazului ( $\Delta V_i > 0$  — creștere de volum,  $\Delta V_i < 0$  — scădere de volum). Lucrul mecanic efectuat în întreaga transformare este

$$L = - \sum_i p_i \Delta V_i.$$

Obținem o evaluare cu atît mai corectă a lucrului mecanic efectuat, cu cît numărul de etape în care am împărțit transformarea este mai mare. La limita numărului infinit de mare de etape intermediare se obține

$$L = - \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (3.38)$$

Integrala se efectuează pe o porțiune a axei volumelor din diagrama Clapeyron. Transformarea fiind presupusă cuasistatică, presiunea în gaz este egală tot timpul cu presiunea externă  $p$ . Aceasta însă nu este constantă. Mărirea absolută  $|L|$  a lucrului mecanic schimbat cu exteriorul în transformarea cuasistatică  $1 \rightarrow 2$  este numeric egală tocmai cu aria cuprinsă între curba care reprezintă transformarea, axa volumelor și două paralele duse la axa presiunii prin punctele 1 și 2 (fig. II.3.16). În cazul figurat sistemul cedează lucru mecanic exteriorului și  $-L$  coincide numeric cu aria hașurată.

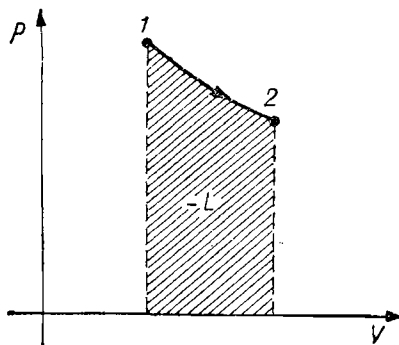


Fig. II.3.16

Relația (3.38) este adevărată oricare ar fi forma pe care o are volumul gazului în starea inițială sau în cursul deformării. Într-o transformare izocoră gazul nu schimbă lucru mecanic cu exteriorul. Relația (3.38) se aplică nu numai gazelor, ci și lichidelor.

Pentru o masă de gaz perfect care suferă o transformare izotermă, putem efectua integrala care dă lucrul mecanic, deoarece în orice stare intermediară este satisfăcută ecuația de stare  $p = n \frac{RT}{V}$  ( $T$  este prin ipoteză constant), și obținem

$$L_{\text{izoterm}} = - nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V},$$

de unde

$$L_{\text{izoterm}} = - nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = + nRT \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.39)$$

### 3.8. COEFICIENȚII TERMICI AI GAZELOR

În § 3.2, în legătură cu legile Gay-Lussac și Charles, am întâlnit coeficienții  $\alpha$  și  $\beta$  ai gazelor, denumiți respectiv coeficient de dilatare al gazelor sub presiune constantă și coeficient de creștere a presiunii gazelor sub volum constant. Coeficientul  $\alpha$  caracterizează de fapt modificarea volumului cu temperatura față de valoarea avută la  $0^\circ\text{C}$  într-o transformare izobară cuasistatică, deoarece într-o asemenea transformare relația de legătură între parametri este tocmai ecuația izobară

$$\alpha = \frac{V - V_0}{V_0 t}.$$

Asemănător se caracterizează modificarea presiunii cu temperatura față de valoarea avută la  $0^\circ\text{C}$  într-o transformare izocoră cuasistatică prin

$$\beta = \frac{p - p_0}{p_0 t}.$$

Transformările cuasistatice izobare, izocore și izotermă sînt mai bine caracterizate cu ajutorul *coeficienților termici* pe care-i definim riguros în continuare.

a) **Coeficientul de dilatare termică**  $\alpha'$  caracterizează modul de variație al unității de volum a unui fluid cu temperatura într-o transformare izobară

$$\alpha' \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left( \frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_p, \quad (3.40)$$

unde  $\Delta V$  este variația de volum corespunzătoare variației de temperatură  $\Delta T$ . Indicele inferior  $p$  marchează faptul că transformarea este izobară. Coeficientul  $\alpha'$  nu este o constantă, ci este și el o funcție de parametri de stare ai gazului. În fiecare punct al unei transformări cuasistatice este îndeplinită ecuația termică de stare, pe care o putem prezenta în forma  $V = V(p, T)$  (volumul exprimat ca funcție de presiune și temperatură). Raportul din (3.40) definește derivata parțială a volumului în raport cu temperatura \*

$$\alpha' = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (3.41)$$

Pentru gazul perfect ecuația termică de stare prezentată în forma  $V = \frac{nRT}{p}$  ne arată că  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p} = \frac{V}{T}$  și deci

$$\alpha' = \frac{1}{T}. \quad (3.42)$$

La temperatura de  $0^\circ\text{C}$   $\alpha' = \alpha = \frac{1}{273,15}$ ; altfel  $\alpha'$  este o funcție de temperatură.

b) **Coeficientul termic al presiunii**,  $\beta'$ , caracterizează modul de variație al presiunii cu temperatura într-o transformare izocoră,

$$\beta' \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left( \frac{\Delta p}{\Delta T} \right)_V = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad (3.43)$$

unde am presupus ecuația termică de stare scrisă sub forma  $p = p(T, V)$

\* Pentru funcții continue de două variabile  $f(x, y)$  se pot defini două derivate, numite derivate parțiale, obținute privind pe rînd funcția  $f$  ca depinzînd numai de  $x$ ,  $y$  fiind tratat ca o constantă, și ca funcție doar de  $y$ ,  $x$  fiind tratat ca o constantă. Egalitatea

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$$

definește derivata  $\frac{\partial f}{\partial x}$  pentru  $x = x_0$  și  $y$  oarecare. Analog se definește  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Cînd se calcu-

lează derivata parțială în raport cu una din variabile, se aplică regulile cunoscute de la derivarea unei funcții de o singură variabilă, cealaltă variabilă fiind considerată o constantă.



Pentru gazul perfect  $p = \frac{nRT}{V}$ ,  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V}$ , deci

$$\beta' = \frac{1}{T}. \quad (3.44)$$

$$\text{La } 0^\circ\text{C } \beta' = \beta = \frac{1}{273,15}.$$

c) **Coeficientul de compresibilitate izotermă**  $\kappa$  caracterizează modul de variație a volumului cu presiunea în transformări izoterme

$$\kappa = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \right)_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (3.45)$$

unde am considerat  $V = V(p, T)$ .

Semnul minus este legat de faptul că modificarea presiunii și a volumului unui fluid decurg în sens contrar (mărirea presiunii atrage micșorarea volumului și invers).

Pentru gazul perfect  $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{nRT}{p^2} = -\frac{V}{p}$  și deci

$$\kappa = \frac{1}{p}. \quad (3.46)$$

Între cei trei coeficienți termici există relația  $\alpha' = p\beta'\kappa$ , pe care o putem verifica în cazul gazului perfect cu ajutorul expresiilor găsite în acest caz pentru coeficienții termici.

Dăm și deducerea generală a relației. Fie ecuația termică de stare în forma

$$V = V(T, p).$$

Folosim expresia diferențialei unei funcții de două variabile\*

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp.$$

\* Fie o funcție continuă de două variabile  $f(x, y)$ . Atunci când  $x$  se modifică cu  $\Delta x$  și simultan  $y$  cu  $\Delta y$ , funcția  $f$  se modifică cu

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Putem scrie  $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ . Pentru  $\Delta x$  și  $\Delta y$  infinit mici,  $\Delta f$  este infinit mică și se numește diferențiala funcției  $f$ . Constatăm că pentru  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  primii doi termeni reprezintă diferențiala funcției  $f$ , considerată ca funcție doar de  $x, y$  fiind privit ca o constantă; asemănător ultimii doi termeni reprezintă diferențiala funcției  $f$ , dacă ea ar depinde doar de  $y$ , iar  $x$  ar fi o constantă. Putem atunci scrie

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

Ea corelează modificarea infimitezimală a volumului cu modificările infimitezimale oarecare ale temperaturii și presiunii. Dacă transformarea decurge la volum constant ( $dV = 0$ ), relația precedentă se scrie

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{izotor}} = 0.$$

Dar  $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\text{izotor}}$  este tocmai  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ , astfel încît  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0$ .

Transcriind derivatele parțiale cu ajutorul coeficienților termici deducem

$$\alpha' = p\beta'\kappa. \quad (3.47)$$

### 3.9. GAZE REALE. ECUAȚIA VAN DER WAALS

Pentru gazul foarte rarefiat, între cei trei parametri ai gazului există o relație simplă  $pV = nRT$  (ecuația termică de stare a gazului perfect). În condiții oarecare, legătura între parametrii de stare ai unui gaz este mult mai complicată. Ea poate fi obținută studiind comportarea gazului și redată prin cifre (de exemplu într-un tabel cu valorile presiunii pentru diferitele valori ale volumului și temperaturii), dar este imposibil de redat printr-o formulă unică. În ecuația de stare a oricărui gaz trebuie să se reflecte atât faptul că moleculele au volum propriu, cît și faptul că între ele se exercită forțe. Van der Waals, pornind de la un model de gaz în care moleculele au dimensiuni și interacționează între ele (se ia o interacție simplificată față de cea reală), a ajuns la concluzia că ecuația termică de stare a unui astfel de gaz are forma

$$\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT \quad (3.48)$$

unde  $a$  și  $b$  sînt constante pozitive, care depind de natura gazului. Constanta  $b$  este legată de dimensiunile moleculelor, iar constanta  $a$  de forțele de atracție dintre ele.

Comparînd ecuația Van der Waals cu ecuația gazelor perfecte se constată că la temperatură fixată, creșterea indefinită a presiunii nu este însoțită de scăderea spre zero a volumului. Volumul gazului nu poate coborî sub valoarea  $b$ . Termenul  $\frac{n^2a}{V^2}$  care se adaugă presiunii se numește *presiune internă*. Datorită prezenței sale, există o regiune de presiuni la care gazul menținut la temperatură constantă se comprimă mai mult decît cere legea gazelor perfecte. Presiunea internă exprimă o ușoară opoziție la tendința cunoscută de expansiune a gazelor. În condiții de rarefiere a gazului, legea Van der Waals se reduce la legea gazelor perfecte.

Ecuația Van der Waals, deși numai aproximativ satisfăcută, este utilă deoarece servește la înțelegerea comportării gazelor în vecinătatea temperaturii critice și poate descrie într-o anumită măsură și comportarea lichidelor. La lichide presiunea internă este foarte mare (vezi § 5.5).

## 4. Principiile termodinamicii

### 4.1. INTRODUCERE

Termodinamica studiază *legile generale ale fenomenelor termice*, fără a face apel la descrierea mișcării termice la scara microscopică. Esența ei este conținută în trei legi, descoperite experimental, denumite *principiile termodinamicii*. Primele două principii se referă la relația dintre căldură și lucrul mecanic și au fost descoperite în prima jumătate a secolului trecut. Principiul al doilea a fost descoperit în esență în jurul anului 1824 de către Sadi Carnot, iar principiul întâi de-abia în 1842 de către Robert Julius Mayer, cu toate că enunțul principiului întâi este mult mai simplu. Această situație se explică prin faptul că s-a înțeles relativ greu că schimbul de căldură este o formă de transmitere a energiei. Principiul al treilea a fost descoperit în 1906 de către Walter Nernst.

Principiile termodinamicii au consecințe practice și teoretice de cea mai mare importanță.

### 4.2. ENERGIA INTERNĂ. PRINCIPIUL ÎNȚII AL TERMODINAMICII

Fiecare sistem aflat la echilibru posedă o energie bine determinată, denumită *energie internă*  $U$ . Ea este egală cu suma energiilor totale, cinetică și potențială, ale constituenților săi microscopici. Energia internă este o funcție de stare a sistemului, adică o funcție de parametri de stare, pentru că este bine determinată odată cu ei. Pentru un fluid la care valorile a doi din parametri de stare  $p$ ,  $V$ ,  $T$  determină valoarea celui de al treilea, energia internă poate fi exprimată ca funcție de oricare doi dintre ei:  $U = U(V, T)$  sau  $U = U(p, V)$  sau  $U = U(p, T)$ . Relația care dă dependența energiei interne de parametrii de stare independenți ai unui sistem se numește *ecuația calorică de stare*. Este extrem de mic numărul cazurilor în care ecuația calorică de stare poate fi dedusă pornind de la analiza sistemului la scară microscopică, deoarece fie că nu se cunosc în detaliu forțele de interacțiune (și deci energia potențială), fie că există dificultăți de calcul. De aceea ecuația calorică de stare poate fi cunoscută în general doar pe cale experimentală. Deocamdată este important să știm doar că energia internă  $U$  este bine definită pentru fiecare stare a sistemului.\*

---

\* Energia internă este definită totdeauna doar pînă la o constantă aditivă.

La baza formulării principiului întâi stau cunoștințele despre *echivalența lucrului mecanic și a căldurii* (§ 2.7.), a căror concluzie principală era că schimbul de căldură și de lucru mecanic cu exteriorul reprezintă cele două moduri prin care se poate modifica energia internă a unui sistem, în urma unor transformări. Mărimilor de transformare  $Q$  și  $L$  li se atribuie un *semn* conform următoarei convenții\*.

$Q > 0$  atunci când sistemul primește căldură din exterior,

$Q < 0$  atunci când sistemul cedează căldură exteriorului,

$L > 0$  atunci când exteriorul efectuează lucru mecanic (se zice în acest caz că sistemul primește lucru mecanic din exterior),

$L < 0$  atunci când interiorul efectuează lucru mecanic (se zice în acest caz că sistemul cedează lucru mecanic exteriorului).

Afirmația principiului echivalenței lucrului mecanic și căldurii — raportul dintre lucrul mecanic și căldura schimbate cu exteriorul într-o transformare ciclică a sistemului are totdeauna aceeași valoare constantă — se transcrie în forma

$$L + JQ = 0, \quad (4.1)$$

unde  $L$  este măsurat în ergi, iar  $Q$  în calorii. Este însă mai comod să se lucreze cu cantitatea de căldură exprimată tot în jouli și atunci (4.1) se scrie

$$L + Q = 0 \quad (4.2)$$

și se citește: suma algebrică a lucrului mecanic și căldurii schimbate de un sistem cu exteriorul, într-o transformare ciclică, este întotdeauna egală cu zero. Vom considera de acum încolo cantitatea de căldură exprimată în jouli.

Având în vedere existența celor două moduri de schimb de energie între sistem și exterior, principiul întâi exprimă tocmai bilanțul energetic (conservarea energiei) pentru o transformare oarecare a sistemului

$$U_2 - U_1 = L + Q, \quad (4.3)$$

adică: variația energiei interne a unui sistem în urma transformării din starea inițială 1, în starea finală 2 este egală cu suma dintre cantitatea de căldură  $Q$  și lucrul mecanic  $L$  schimbate cu exteriorul în cursul transformării. Conținutul relației (4.3) poate fi formulat într-un mod mai interesant decât cel precedent, mod pe care îl vom evidenția în continuare.

Pornind de la o stare inițială 1, un sistem poate atinge starea finală 2 în general în mai multe moduri, pe care să le notăm cu  $A, B, C$  etc. De exemplu, în cazul unui fluid stările 1 ( $p_1, V_1$ ) și 2 ( $p_2, V_2$ ) (fig. II. 4.1) pot fi unite efectuând diferite transformări (în general o infinitate). Transformările cuasistatice pot fi reprezentate prin curbe care unesc punctele 1 și 2 în diagrama Clapeyron. Există însă și transformări nestatice care duc din starea 1 în starea 2, dar ele nu pot fi reprezentate prin curbe în diagrama Clapeyron, deoarece în stările lor intermediare parametrii de stare nu sînt toți bine definiți. Dacă se aplică principiul întâi tuturor acestor transformări, membrul stîng al ecuației (4.3) va avea în toate cazurile aceeași valoare, pentru că este determinat doar de stările inițială și finală, și deci se obține șirul de egalități:

$$L_A + Q_A = L_B + Q_B = L_C + Q_C. \quad (4.4)$$

---

\* Se utilizează și convenții diferite de cea de aici.

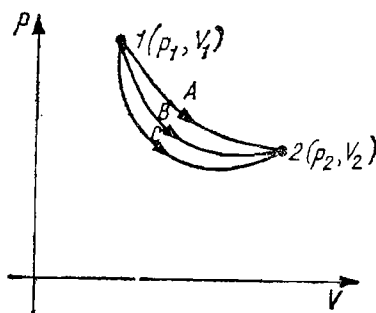


Fig. II.4.1

Cantitățile de căldură  $Q_A, Q_B, Q_C$  au valori diferite pentru diferitele transformări considerate, de asemenea  $L_A, L_B, L_C$ . Se spune că lucrul mecanic și cantitatea de căldură sînt mărimi dependente de „drum“, adică mărimi care se schimbă în funcție de transformarea care duce din starea 1 în starea 2. Egalitățile (4.4) permit enunțarea într-un nou mod a principiului întâi al termodinamicii.

*Suma dintre lucrul mecanic și căldura schimbate cu exteriorul într-o transformare oarecare este o mărime independentă de felul transformării, ea fiind dependentă doar de stările inițială și finală ale ei.*

Este interesant acest mod de a enunța principiul întâi, deoarece justetea afirmației sale poate fi verificată fără a cunoaște valoarea diferenței de energie internă  $U_2 - U_1$  care figurează în membrul stîng al relației (4.3). Ori la scară microscopică tocmai aceasta este situația: nu se cunoaște în general energia internă. Experiența confirmă fără excepție enunțul precedent al principiului întâi. Odată convinși de independența de drum a mărimii  $L + Q$ , putem folosi principiul întâi pentru a măsura diferența energiilor interne a două stări ale unui sistem, fără a avea nici o cunoștință despre conținutul acestei energii interne la scară microscopică.

În cazul unei transformări ciclice, principiul întâi ne conduce la rezultatul cunoscut  $L + Q = 0$ . Relația arată că este imposibilă construirea unei mașini care să se miște continuu fără cheltuire de energie din exterior (perpetuum mobile de speța întâi). Într-adevăr, orice mașină suferă o transformare ciclică de durată mai lungă sau mai scurtă și dacă vrem ca  $L < 0$ , adică sistemul să cedeze lucru mecanic în exterior, atunci obligatoriu  $Q > 0$ , adică sistemul trebuie să primească căldură din exterior. Deci fără a primi energie nici o mașină nu poate efectua lucru mecanic.

În cazul unei transformări adiabatică ( $Q = 0$ ) principiul întâi dă:

$$U_2 - U_1 = L_{\text{adiabatic}} \quad (4.5)$$

și deci în asemenea transformări, spre deosebire de cazul general, lucrul mecanic depinde doar de stările inițială și finală.

În transformările izocore\* ( $L = 0$ ) principiul întâi dă:

$$U_2 - U_1 = Q_{\text{izocor}} \quad (4.6)$$

și deci în asemenea transformări, spre deosebire de cazul general, cantitatea de căldură schimbată cu exteriorul este independentă de transformare.

\* Definiția generală a transformării izocore: transformarea pentru care în nici una din etapele ei nu se schimbă lucru mecanic cu exteriorul. Această definiție se reduce în cazul fluidelor la cea cunoscută — transformare la volum constant.

Se pot realiza și *procese staționare*, adică procese în care sistemul primește și cedează energie în mod continuu, fără ca starea sa internă să se schimbe. În acest caz  $L + Q = 0$ , ca și la transformarea ciclică. Să dăm un exemplu. Fie o rezistență electrică scufundată într-un vas cu apă. La trecerea curentului electric, asupra rezistenței se efectuează un lucru mecanic care duce la mărirea energiei sale. În limbajul curent spunem că are loc încălzirea rezistenței. Chiar din primele momente ale trecerii curentului se creează o diferență de temperatură între rezistență și apă și, ca urmare, rezistența cedează căldură apei. Atît timp cît temperatura rezistenței crește, avem o dovadă a faptului că ea nu se află în regim staționar: ea primește sub formă de lucru mecanic mai multă energie decît cedează sub formă de căldură. După un anumit timp se constată că temperatura rezistenței nu mai crește, ceea ce înseamnă că în orice interval de timp microscopic ulterior energia primită este egală cu energia cedată ( $L + Q = 0$ ). În regim staționar putem vorbi de o transformare a lucrului mecanic în căldură, ca și în cazul transformărilor ciclice. În asemenea procese se poate verifica principiul echivalenței, deoarece și aici raportul între lucrul mecanic (de natură electrică) primit, măsurat în jouli, și cantitatea de căldură cedată apei, măsurată în calorii, trebuie să fie totdeauna același, egal cu  $J$ . De fapt cele mai precise metode de determinare a echivalentului mecanic al caloriciei  $J$  s-au făcut lucrînd în regim staționar. Așa a fost realizată de exemplu experiența fizicianului român Miculescu (1891), care a constituit una dintre cele mai precise experiențe de determinare a lui  $J$  (v. § 2.9).

#### 4.3. APLICAREA PRINCIPIULUI ÎNȚII LA GAZUL PERFECT

a) **Ecuția calorică de stare a gazului perfect.** Experiența arată că gazele care au o comportare apropiată de cea a gazelor perfecte au și proprietatea de a avea energia internă determinată numai de temperatură. Această a doua proprietate a gazelor perfecte nu decurge din prima, dacă operăm numai cu cunoștințele de la scară microscopică\*. Proprietatea a fost pusă în evidență de Joule. Dispozitivul experimental cu care a lucrat Joule constă dintr-un vas cu două compartimente de volume egale, a căror comunicare poate fi oprită cu ajutorul unui robinet. Vasul este scufundat într-un calorimetru cu apă (fig. II.4.2). La începutul experienței compartimentul  $A$  este umplut cu gaz, în timp ce în compartimentul  $B$  este vid. În calorimetru este scufundat un termometru  $D$  a cărui indicație inițială se înregistrează. La deschiderea robinetului  $C$ , gazul trece și în compartimentul  $B$  și după un anumit timp se atinge o stare de echilibru în care gazul umple omogen cele două vase. Se constată că indicația termometrului  $D$  diferă foarte puțin de cea inițială. Se admite atunci că dacă experiența ar fi condusă cu un gaz perfect, n-ar exista nici o diferență de temperatură între stările inițială și finală. Faptul că temperatura în calorimetru nu s-a schimbat oglindește că, pe ansamblul transformării suferite, sistemul (gazul + vasul care-l conține) n-a schimbat căldură cu exteriorul (calorimetrul cu apă). Deoarece nici lucru mecanic nu s-a schimbat cu exteriorul, aplicînd principiul înții se ajunge la concluzia că

\* Amintim că, pornind de la un model microscopic pentru gazul perfect monoatomic, în § 3.6 s-a găsit o expresie pentru energia internă. Aici ne referim la găsirea acestei proprietăți pe cale experimentală.

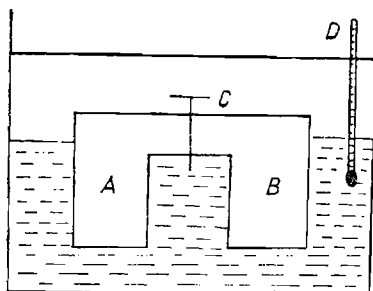


Fig. II.4.2

$U_2 = U_1$ , adică în starea inițială (gaz numai în compartimentul A și în starea finală (gaz în ambele compartimente), energia internă a gazului este aceeași. Parametrii de stare pentru cele două stări sînt respectiv  $(V, t)$  și  $(2V, t)$ . Egalitatea  $U(V, t) = U(2V, t)$  arată că energia internă a gazului perfect este independentă de volum, deci

$$U = U(t) \text{ pentru un gaz perfect.} \quad (4.7)$$

Relația (4.7) spune mult despre ecuația calorică de stare a gazului, dar nu spune totul. Trebuie cunoscută expresia explicită a funcției  $U(t)$ .

b) **Definiția termodinamică a gazului perfect. Scara de temperaturi a gazului perfect.** Ideile de pînă acum, bazate pe experiențe, despre ceea ce ar trebui să fie comportarea unui gaz perfect, permit o definiție completă a acestuia, adică o definiție pe baza căreia se poate prevedea întreaga lui comportare. Există mai multe definiții echivalente pentru gazul perfect. Una dintre ele este următoarea: numim gaz perfect un sistem pentru care:

1) produsul  $pV$  are aceeași valoare pentru stări de aceeași temperatură și este o funcție bine determinată numai de temperatură\*.

2) energia internă  $U$  depinde, într-un mod cunoscut, doar de temperatură. Un studiu termodinamic aprofundat arată că această definiție este într-adevăr completă.

Sistemul ideal anterior definit poate constitui un termometru. Se definește *temperatura în scara gazului perfect* în notație Celsius prin relația\*\*:

$$\theta = \frac{(pV)_t - (pV)_0}{(pV)_{100} - (pV)_0} \cdot 100, \quad (4.8)$$

$(pV)_t$ ,  $(pV)_{100}$  și  $(pV)_0$  fiind valorile produsului  $pV$  pe izotermele corespunzătoare temperaturilor  $t$ ,  $100^\circ\text{C}$  și  $0^\circ\text{C}$ . Din datele furnizate de studiul experimental al gazelor cu comportare apropiată de cea a gazelor ideale, pentru raportul constant  $\frac{(pV)_{100} - (pV)_0}{(pV)_0}$  se ia valoarea  $100\alpha$ , unde  $\alpha = \frac{1}{273,15}$ .

Rezultă

$$\theta = \frac{(pV)_t - (pV)_0}{\alpha(pV)_0}. \quad (4.9)$$

\* Este suficientă cunoașterea dependenței produsului  $pV$  de o temperatură empirică oarecare.

\*\* Procedul de definiție a temperaturii este cel cunoscut din § 2.1.

Folosim notația  $\theta$  pentru temperatura în scara gazului perfect, utilizată pînă acum pentru temperatura în scara termodinamică, deoarece vom demonstra în § 4.9 egalitatea acestor temperaturi. În demonstrația de termodinamică se va vedea necesitatea îndeplinirii ambelor condiții (1) și (2) pentru realizarea acestei egalități. Condiția (1) singură nefiind suficientă, indicațiile unui termometru construit pe baza formulei (4.8), pornind de la un gaz care ar îndeplini doar condiția (1), ar fi diferite de cele ale termometrului cu gaz perfect.

Relația (4.9) se transcrie

$$(pV)_t = (pV)_0 (1 + \alpha\theta)$$

Introducînd temperatura absolută în scara termometrului cu gaz perfect

$$T = \theta + 273,15 = \theta + \frac{1}{\alpha},$$

avem

$$pV = (pV)_0 \cdot \frac{T}{T_0} \quad (4.10)$$

cu  $T_0 = \frac{1}{\alpha}$ , valoarea temperaturii de  $0^\circ\text{C}$  în notație absolută. Dar relația (4.10) arată la fel ca legea gazelor perfecte, cu deosebirea că temperatura  $T$  care apare este temperatura absolută în scara gazului perfect.

Deoarece temperatura absolută în scara gazului perfect (identică cu temperatura termodinamică, vezi § 4.8) se poate măsura\*, în paragraful care urmează vom lucra cu temperatura  $T$ .

c) **Consecințe ale principiului întâi pentru gazul perfect.** Să considerăm o transformare a unui gaz perfect la volum constant  $V$ , de la temperatura  $T_1$  la temperatura  $T_2$ . Într-o asemenea transformare nu se schimbă lucru mecanic și conform principiului întâi cantitatea de căldură schimbată cu exteriorul este

$$Q_{\text{izocor}} = U(T_2) - U(T_1). \quad (4.11)$$

Modul în care sistemul schimbă căldură cu exteriorul în transformări cuasistatice poate fi caracterizat cu ajutorul diferitelor capacități calorice.

*Capacitatea calorică molară la volum constant  $C_V$  (căldură molară la volum constant)* se definește ca raportul dintre cantitatea de căldură infinitezimală schimbată cu exteriorul la volum constant de un mol de substanță și modificarea infinitezimală a temperaturii. Deci

$$C_V = \frac{1}{n} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V \quad (4.12)$$

unde  $\Delta Q$  este cantitatea de căldură schimbată de  $n$  moli de substanță, iar  $\Delta T$  — variația temperaturii. Indicele inferior  $V$  indică faptul că transformarea în care se măsoară  $\Delta Q$  are loc la volum constant. Formula (4.12) nu definește la prima vedere derivata unei funcții, deoarece  $\Delta Q$  este o mărime de trans-

---

\* Aprofundarea acestei probleme depășește cu mult cadrul expunerii de față.



formare și nu o funcție de stare. Deoarece însă în transformări izocore  $\Delta Q = \Delta U$ , se poate exprima  $C_V$  cu ajutorul unei derivate:

$$C_V = \frac{1}{n} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (4.13)$$

Limita din relația precedentă definește o derivată, deoarece energia internă este o funcție de stare\*.

În cazul pe care îl discutăm, al gazului perfect,  $U$  este funcție doar de temperatură și deci

$$nC_V = \frac{dU}{dT}. \quad (4.14)$$

Experiența arată că pentru majoritatea gazelor capacitatea calorică la volum constant este independentă de temperatură. Vom admite că această proprietate o are și gazul perfect.\*\*

Cunoscând  $C_V$  din experiență, rezultă atunci forma explicită a ecuației calorice de stare pentru un gaz perfect

$$U = nC_V T + U_0, \quad (4.15)$$

unde  $U_0$  este o constantă arbitrară, aceeași pentru toate stările gazului.

Odată cunoscută ecuația calorică de stare, principiul întâi permite să se facă o serie de previziuni despre comportarea gazului perfect. Afirmatiile care urmează se referă la transformări cuasistatice ale gazului.

Într-o transformare izotermă, deși gazul perfect schimbă lucru mecanic și căldură cu exteriorul, energia sa internă nu se modifică

$$(L + Q)_{\text{izoterm}} = 0 \text{ (gaz perfect)}. \quad (4.16)$$

Folosind expresia lucrului mecanic efectuat de un gaz perfect într-o transformare izotermă, obținem

$$Q_{\text{izoterm}} = -L_{\text{izoterm}} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (4.17)$$

unde  $V_1$  și  $V_2$  sînt volumele în stările inițială și respectiv finală.

Într-o transformare izocoră  $L_{\text{izocor}} = 0$  și deci

$$Q_{\text{izocor}} = nC_V(T_2 - T_1), \quad (4.18)$$

$T_1$  și  $T_2$  fiind temperaturile în stările inițială și finală.

\* Definiția dată prin relația (4.12) este aplicabilă oricărui sistem. Indicele inferior  $V$  din expresia lui  $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$  este acum absolut necesar. El precizează faptul că luăm ca variabile

independente volumul și temperatura și exprimăm energia internă ca funcție de ele, calculînd derivata parțială după temperatură. Dacă am lua ca variabile independente presiunea și temperatura, am exprima energia și în funcție de ele și am calcula derivata parțială după temperatură, am obține o altă mărime:  $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \neq \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ .

\*\* Folosind proprietățile microscopice ale gazului perfect monoatomic în § 3.6, am găsit  $U = \frac{3}{2} nRT$  și deci  $C_V = \frac{3}{2} R$ . Rezultatul calculului e în acord cu experiența.

Într-o transformare izobară, condusă la presiunea  $p$ , de la temperatura  $T_1$  la temperatura  $T_2$ , se schimbă cu exteriorul atât căldură cât și lucru mecanic, iar energia internă se modifică și ea. Lucrul mecanic efectuat este  $L_{\text{izobar}} = -p(V_2 - V_1)$ . Din principiul întâi deducem

$$Q_{\text{izobar}} = nC_V(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1). \quad (4.19)$$

Folosind ecuația termică de stare pentru stările inițială și finală,  $pV_1 = nRT_1$  și  $pV_2 = nRT_2$ , putem exprima  $Q_{\text{izobar}}$  în funcție doar de diferența de temperatură  $T_2 - T_1$ :

$$Q_{\text{izobar}} = nC_V(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) = n(C_V + R)(T_2 - T_1). \quad (4.20)$$

Pentru a caracteriza schimbul de căldură cu exteriorul al unui mol de substanță într-o transformare izobară, se definește *capacitatea calorică molară la presiune constantă*  $C_p$  (căldură molară la presiune constantă). Ea este raportul dintre cantitatea de căldură infinitezimală schimbată la presiune constantă de un mol de substanță și modificarea infinitezimală a temperaturii. Avem

$$C_p = \frac{1}{n} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p, \quad (4.21)$$

unde  $\Delta Q$  este cantitatea de căldură schimbată de  $n$  moli de substanță, iar  $\Delta T$  — variația temperaturii.

Relația (4.20) arată că pentru un gaz perfect

$$C_p = C_V + R. \quad (4.22)$$

Cu alte cuvinte, diferența dintre căldura molară la presiune constantă și căldura molară la volum constant este egală cu constanta  $R$  a gazelor. Relația (4.22), stabilită de R.J. Mayer, este o consecință a primului principiu al termodinamicii. Dacă măsurăm căldurile molare în cal/mol·grd, iar  $R$  în J/mol·grd, relația (4.22) devine

$$J(C_p - C_V) = R. \quad (4.23)$$

Această relație a servit la prima determinare (prin calcul) a echivalentului mecanic al caloriei.

Ecuația adiabatei pentru un gaz perfect exprimă legătura dintre parametrii de stare într-o transformare cuasistatică, în care nu se produce schimb de căldură în nici o etapă. Pentru a deduce ecuația adiabatei, împărțim transformarea respectivă într-o succesiune de transformări care leagă stări foarte apropiate (adică cu valori apropiate ale parametrilor de stare) ale gazului. Lucrul mecanic efectuat într-o asemenea transformare are expresia  $\Delta L = -p\Delta V$ , variația de energie internă este  $\Delta U = nC_V\Delta T$ , în timp ce  $\Delta Q = 0$ . Folosind și ecuația termică de stare, care e satisfăcută în fiecare punct al unei transformări cuasistatice, principiul întâi furnizează egalitatea  $nC_V\Delta T = -nRT\Delta V$ , care se poate scrie mai convenabil astfel:  $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{\Delta V}{V}$ .

Egalitatea este evident adevărată și pentru porțiuni infinitezimale ale adiabatei, deci se poate scrie

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V}.$$

Integrarea relației precedente conduce la  $\ln T = -\frac{R}{C_V} \ln V + \text{const.}$  sau  $TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{const.}$  Dacă înlocuim  $R$  prin  $C_p - C_V$  și notăm cu  $\gamma$  raportul căldurilor specifice la presiune și respectiv la volum constant,

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V}, \quad (4.24)$$

rezultă

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (4.25)$$

Relația (4.25) reprezintă *ecuația adiabatei* în variabilele temperatură și volum. Pentru a obține ecuația adiabatei în variabilele  $(p, V)$  folosim ecuația termică de stare  $T = \frac{pV}{nR}$  și, deoarece  $n$  este o constantă pentru o masă de gaz dată avem

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (4.26)$$

În concluzie, de-a lungul unei transformări adiabatice (cuasistatice) avem  $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$ , oricare ar fi stările intermediare  $A$  și  $B$ . Raportul  $\gamma$  se determină experimental și se găsesc pentru gazele monoatomice valori foarte apropiate de  $\frac{5}{3}$ , iar pentru cele biatomice valori apropiate de  $\frac{7}{5}$ .<sup>\*</sup> (Vezi și rezultatele fizicii statistice — cap. 7).

Într-o diagramă Clapeyron adiabata se reprezintă printr-o curbă monoton descrescătoare, care admite ca asimptote axele de coordonate (fig. II.4.3-

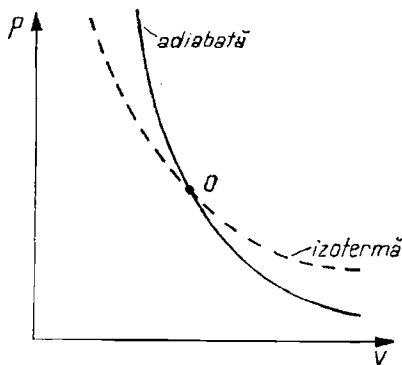


Fig. II.4.3

<sup>\*</sup> Rezultatul experimental de la gaze monoatomice este de înțeles prin prisma proprietăților la scară microscopică.  $U = \frac{3}{2} nRT$  implicând  $C_V = \frac{3}{2} R$ , pe baza relației Mayer rezultă  $C_p = \frac{5}{2} R$  și deci  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

curba reprezentată prin linie plină), ca și izoterma. Dacă se compară adiabata și izoterma care trec printr-un același punct 0, situația este totdeauna cea din figură, adică adiabata este mai înclinată decât izoterma, ceea ce se vede comparând pantele (tangentele) celor două curbe în punctul comun 0:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{adiabatic}} = -\gamma \frac{p}{V}, \text{ în timp ce } \left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{izoterm}} = -\frac{p}{V}, \text{ iar } \gamma > 1.$$

#### 4.4. TRANSFORMĂRI REVERSIBILE ȘI TRANSFORMĂRI IREVERSIBILE

Am clasificat până acum transformările în transformări cuasistatice și transformări nestatice. Principiul întâi este valabil pentru ambele tipuri de transformări. Fie o transformare nestatică a unui sistem dintr-o stare inițială 1 într-o stare finală 2. Procesele nestatice sînt întotdeauna *procese ireversibile*, cu alte cuvinte nu există posibilitatea de a realiza revenirea sistemului din starea 2 în starea 1, cu reproducerea în ordine inversă a modului în care a decurs transformarea de la 1 la 2. Ceea ce se întîmplă în interiorul sistemului într-o transformare nestatică este mai greu de urmărit, însă prin modificările produse în exterior putem constata că cele două treceri  $1 \rightarrow 2$  și  $2 \rightarrow 1$ , conduse nestatic, sînt întotdeauna diferite. Dăm un exemplu simplu: fie un gaz închis într-un cilindru cu piston; baza cilindrului o presupunem în contact termic cu un termostat de temperatura  $t_0$ , în timp ce pereții laterali și pistonul sînt confecționați din material izolant termic. Din exterior se exercită asupra gazului presiunea  $p_1$ . Fie 1 starea inițială de echilibru a gazului, în care presiunea este egală cu  $p_1$ , iar temperatura cu  $t_0$ . Se blochează pistonul în poziția de echilibru, după aceea se modifică presiunea exterioară la o valoare  $p_2 > p_1$ , apoi se deblochează pistonul. Gazul nu mai este acum în echilibru cu exteriorul și va suferi o transformare în urma căreia se va atinge starea de echilibru 2, în care presiunea în gaz este  $p_2$ , iar temperatura tot  $t_0$ . În stările care au precedat echilibrul, gazul a suferit comprimări și dilatări succesive (pistonul a oscilat) și, ca urmare, temperatura sa a fost diferită de  $t_0$ , avînd în general valori diferite în diferitele porțiuni ale gazului. Experimental se constată că în transformarea respectivă gazul a cedat termostatului o cantitate de căldură de mărime absolută  $Q_I$ . În același timp sistemul a primit un lucru mecanic  $L_I = p_2 \cdot \Delta l \cdot S$  ( $\Delta l$  este distanța cu care s-a deplasat pistonul, iar  $S$  este suprafața bazei cilindrului). *Trecerea  $1 \rightarrow 2$  nu poate fi reprodusă în sens invers prin nici un mijloc.* Se poate de exemplu determina revenirea la starea inițială blocînd pistonul în starea 2 și readucînd presiunea în exterior la valoarea inițială  $p_1$ , după care se deblochează pistonul. Prin oscilații pistonul va reveni în poziția din starea 1. În decursul destinderii gazul efectuează un lucru mecanic  $L_{II} = p_1 \Delta l S$  și absoarbe cantitatea de căldură de mărime absolută  $Q_{II}$ . Din principiul întâi rezultă că  $Q_{II} < Q_I$ , deci trecerea  $2 \rightarrow 1$  descrisă nu seamănă de loc cu transformarea  $1 \rightarrow 2$ .

*Procese reversibile în sensul strict al cuvîntului nu există în natură.* Procesele apropiate de procese cuasistatice sînt de obicei și procese apropiate de cele reversibile. Transformarea  $1 \rightarrow 2$  din exemplul precedent poate fi condusă foarte lent, crescînd treptat presiunea exterioară de la valoarea  $p_1$  la valoarea  $p_2$ . Sistemul trece în starea 2 prin stări intermediare învecinate unor stări de echilibru. La scăderea lentă a presiunii, de la valoarea  $p_2$  la valoarea  $p_1$ ,

sistemul revine la starea inițială 1 parcurgând stări aproape identice celor din prima transformare. La limita variației infinite lente a presiunii externe s-ar putea realiza un proces cuasistatic și acesta ar fi și reversibil. În acest caz lucrul mecanic primit la trecerea  $1 \rightarrow 2$  este restituit la trecerea inversă; de asemenea cantitatea de căldură de mărime absolută egală cu  $Q_0$ , cedată la trecerea  $1 \rightarrow 2$ , este egală cu cea absorbită la trecerea  $2 \rightarrow 1$ . Aplicarea principiului întâi dă  $Q_{II} < Q_0 < Q_I$ .

Transformările reversibile sînt în mod necesar lente, dar nu orice transformare lentă este o transformare reversibilă. De exemplu procesul de coroziune a unui metal este un proces lent, dar nu există mijloc de modificare a condițiilor externe care să determine refacerea metalului. O condiție a reversibilității o constituie *absența fenomenelor de frecare și viscozitate*, fenomene disipative care se desfășoară într-un singur sens.

Principiul al doilea trasează o linie de demarcație netă între transformările reversibile și cele ireversibile.

#### 4.5. PERPETUUM MOBILE DE SPEȚA A DOUA. POSTULATUL LUI KELVIN

Principiul al doilea al termodinamicii a fost descoperit în legătură cu problema de mare însemnătate practică a construirii unor motoare termice cu randament cît mai ridicat. Orice sistem care efectuează o *transformare ciclică* în care schimbă căldură și lucru mecanic cu exteriorul constituie o *mașină termică*. Ciclul unei mașini termice poate fi reversibil sau ireversibil. Notînd cu  $L$  lucrul mecanic și cu  $Q$  cantitatea de căldură schimbate cu exteriorul avem

$$L + Q = 0. \quad (4.27)$$

În general, mașina poate fie să furnizeze căldură pe baza unui lucru mecanic primit din exterior ( $L > 0$ ,  $Q < 0$ ), adică să transforme lucru mecanic în căldură, fie să absoarbă căldură din exterior și să cedeze lucru mecanic ( $L < 0$ ,  $Q > 0$ ). În al doilea caz mașina termică constituie un *motor termic*. Motorul termic transformă căldura în lucru mecanic.

Transformarea lucrului mecanic în căldură poate fi realizată cu ușurință, în condiții diferite. Este posibilă, fără dificultăți, o *transformare integrală a lucrului mecanic în căldură*. Aceasta înseamnă că mașina preia energie sub formă de lucru mecanic de la exterior și o restituie în întregime sub formă de căldură. Un corp aflat inițial la temperatura  $t_0$ , încălzit prin frecare și pus apoi în contact cu un termostat de temperatură  $t_0$ , revine la starea inițială cedînd termostatului sub formă de căldură toată energia primită.

Experiența arată că se poate realiza un motor numai dacă transformarea ciclică satisface anumite condiții și că aceste condiții sînt de așa natură încît *nu se poate vorbi niciodată de o transformare integrală a căldurii în lucru mecanic*.

În orice motor termic există o substanță care efectuează lucru mecanic pe baza căldurii primite, numită *substanță de lucru* (de exemplu *apă*, în mașinile cu vaporii și în turbine, sau *aer*, în motoarele cu combustie internă). În decursul ciclului parcurs substanța de lucru poate schimba căldură cu mai multe surse de căldură. O transformare în cursul căreia un sistem schimbă căldură cu o singură sursă de căldură se numește *transformare monotermă*. O transformare monotermă cuasistatică este obligatoriu o transformare izotermă,

deoarece, prin definiție, într-o asemenea transformare sistemul evoluează în echilibru cu exteriorul. Dacă transformarea monotermă nu este cuasistatică, temperatura sistemului în transformare (în cazul în care aceasta poate fi definită) diferă de temperatura sursei.

*O mașină termică care ar transforma căldura, luată de la o singură sursă, în lucru mecanic se numește perpetuum mobile de speța a doua.* Experiența a arătat imposibilitatea realizării unei astfel de mașini, adică faptul că:

*Într-o transformare ciclică monotermă nu este posibilă niciodată transformarea căldurii în lucru mecanic.* Propoziția enunțată constituie postulatul lui Kelvin și conține în embrion principiul al doilea al termodinamicii. Pornind de la postulatul lui Kelvin se poate ajunge pe cale logică la o serie de afirmații de o generalitate surprinzătoare\*. Deocamdată, ne mărginim la următoarele deducții simple:

— Dacă transformarea ciclică monotermă este reversibilă, condiția ca postulatul Kelvin să fie respectat pentru ambele sensuri de parcurs ale ciclului este ca

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{monoterm, ciclic, reversibil}} &= 0 \\ L_{\text{monoterm, ciclic, reversibil}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

adică pe ansamblul transformării este necesar să nu se schimbe nici lucru mecanic, nici căldura (pe porțiuni intermediare ale transformării asemenea schimburi pot avea loc).

— Dacă transformarea ciclică monotermă este ireversibilă, pentru ca la parcurgerea ei în unicul sens posibil sistemul să nu funcționeze ca motor, este necesar ca

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{monoterm, ciclic, ireversibil}} &< 0 \\ L_{\text{monoterm, ciclic, ireversibil}} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

## 4.6. MAȘINA BITERMĂ. TEOREMA CARNOT

Postulatul Kelvin ne învață că nu se poate construi un motor cu o singură sursă de căldură. Se poate însă construi un motor cu două surse de căldură 1 și 2. Fie  $t_1$  și  $t_2$  temperaturile acestor surse măsurate cu un termometru oarecare (temperaturi empirice). Dacă  $t_1 > t_2$  sursa 1 se numește sursă caldă, iar sursa 2 se numește sursă rece. Notăm cu  $L$  lucrul mecanic furnizat de sistem exteriorului ( $L < 0$ ), iar cu  $Q_1$  și respectiv  $Q_2$  cantitățile de căldură schimbate de sistem cu cele două surse: sistemul primește căldură de la sursa caldă ( $Q_1 > 0$ ) și în mod obligatoriu cedează sursei reci o parte din căldura primită ( $Q_2 < 0$ )\*\*, conform principiului întâi,

$$L + Q_1 + Q_2 = 0. \quad (4.30)$$

\* În expunerea de față nu vom aborda principiul al doilea în toată generalitatea sa, nici măcar nu-l vom enunța. Principiul poate fi prezentat ca o consecință logică a postulatului lui Kelvin. În paragrafele care urmează ne vor interesa doar implicațiile postulatului lui Kelvin pentru problema mașinilor biterme și pentru problema introducerii unei scări absolute de temperaturi.

\*\* Omitem aici faptul că, pe baza postulatului Kelvin, se poate demonstra că  $L < 0$  implică  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$  ca singura posibilitate.

Pentru că o parte din căldura primită de sistem de la sursa caldă este cedată în mod inevitabil sursei reci, rezultă că nu avem de-a face cu o transformare integrală a căldurii primite în lucru mecanic. O transformare integrală a căldurii în lucru mecanic în urma unei transformări ciclice nu este posibilă niciodată.

Motorul biterm (adică cu două surse de căldură) se caracterizează prin *randamentul* său

$$\eta = \frac{|L|}{Q_1}. \quad (4.31)$$

Pe baza principiului întâi

$$\eta = -\frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (4.32)$$

deci randamentul este întotdeauna subunitar.

O transformare ciclică bitermă reversibilă se numește *ciclu Carnot*. În cazul ciclului Carnot, la parcurgerea într-un anumit sens a ciclului se realizează un motor termic, la parcurgerea lui în sens invers se realizează o *mașină frigorifică*, adică un sistem care pe baza unui lucru mecanic primit din exterior ( $L > 0$ ), preia căldură de la sursa rece ( $Q_2 > 0$ ) și o cedează sursei calde ( $Q_1 < 0$ ). În cazul transformării ciclice biterme ireversibile se poate realiza fie numai situația de motor, fie numai cea de mașină frigorifică. Ne interesăm în continuare numai de motoare. Ele pot fi deci reversibile sau ireversibile. De fapt motorul reversibil reprezintă o idealizare.

Din punct de vedere istoric principiul al doilea a rezultat din analiza factorilor de care depinde randamentul unui motor termic în scopul creșterii valorii sale. Pe vremea lui Carnot motorul termic era cunoscut numai sub forma mașinii cu aburi. Carnot a ajuns la concluzia că pentru motorul reversibil, randamentul nu depinde decât de temperaturile celor două surse, în particular randamentul nu este influențat de felul substanței de lucru în mașina cu aburi.

Pe baza postulatului Kelvin s-a putut arăta că:

— *Randamentele a două motoare biterme reversibile care funcționează între surse de aceleași temperaturi  $t_1$  și  $t_2$  sînt totdeauna egale (teorema Carnot).*

— *Randamentul unui motor ireversibil este totdeauna mai mic decât al unui motor reversibil care funcționează cu aceleași surse.*

Pentru demonstrație se consideră două motoare  $A$  și  $B$ :  $A$  reversibil, iar  $B$  reversibil sau nu. Fie  $L_A$ ,  $Q_{1A}$ ,  $Q_{2A}$  și  $L_B$ ,  $Q_{1B}$ ,  $Q_{2B}$  lucrurile mecanice și căldurile schimbate cu cele două surse de motoarele  $A$  și respectiv  $B$ . Putem realiza o transformare ciclică mai complexă în care

— sistemul  $A$  să funcționeze ca mașină termică (posibil deoarece  $A$  este motor reversibil) și să parcurgă  $n_A$  cicluri;

— sistemul  $B$  să funcționeze ca motor și să parcurgă  $n_B$  cicluri, numerele întregi  $n_A$  și  $n_B$  fiind astfel alese încît

$$-n_A Q_{1A} + n_B Q_{1B} = 0.$$

Cu alte cuvinte, aceasta înseamnă că vom alege pe  $n_A$  și  $n_B$  în așa fel încît noua mașină — combinată din sistemele  $A$  și  $B$  în modul descris — să nu schimbe efectiv căldură cu sursa caldă.

Deoarece mașina  $A$  funcționează ca mașină frigorifică, mărimile ei de transformare pentru un ciclu sînt  $-L_A$ ,  $-Q_{1A}$  și  $-Q_{1B}$ .

Pe baza principiului întâi există relațiile

$$L_A + Q_{1A} + Q_{2A} = 0,$$

$$L_B + Q_{1B} + Q_{2B} = 0.$$

Mașina termică mai complicată, descrisă, schimbă cu exteriorul un lucru mecanic  $L = -n_A L_A + n_B L_B$ , cu sursa rece schimbă căldura  $Q_2 = -n_A Q_{2A} + n_B Q_{2B}$ , iar cu sursa caldă nu schimbă nimic, prin construcție.

Mașina termică construită funcționează efectiv cu o singură sursă de căldură (sursa rece). Atunci, pe baza postulatului Kelvin:

1) Dacă mașina construită este reversibilă (deci motorul  $B$  este reversibil),  $L = Q_2 = 0$ ;

$$Q_2 = 0 \rightarrow \frac{Q_{2A}}{Q_{2B}} = \frac{n_B}{n_A} = \frac{Q_{1A}}{Q_{1B}}.$$

Ultima egalitate a fost scrisă pe baza relației (4.30), asigurată prin ipoteză. Avem

$$\left( \frac{Q_{2A}}{Q_{1A}} \right)_{\text{reversibil}} = \left( \frac{Q_{2B}}{Q_{1B}} \right)_{\text{reversibil}}. \quad (4.33)$$

Deci, pe baza definiției (4.32) a randamentului, am demonstrat egalitatea randamentelor tuturor motoarelor reversibile care funcționează între surse de aceeași temperaturi  $t_1$  și  $t_2$ .

2) Dacă mașina construită este ireversibilă (motorul  $B$  este ireversibil) atunci  $L > 0$ ,  $Q_2 < 0$ ;

$$Q_2 < 0 \rightarrow Q_{2A} > \frac{n_B}{n_A} Q_{2B} = \frac{Q_{1A}}{Q_{1B}} Q_{2B}$$

$$\left( \frac{Q_{2A}}{Q_{1A}} \right)_{\text{reversibil}} > \left( \frac{Q_{2B}}{Q_{1B}} \right)_{\text{ireversibil}}^*. \quad (4.34)$$

Inegalitatea (4.34) arată că

$$\eta_{\text{irev.}} < \eta_{\text{rev.}}. \quad (4.35)$$

Randamentul unui motor termic reversibil nu poate depinde decât de temperaturile celor două surse. Ca urmare conținutul teoremei Carnot pentru motoare reversibile poate fi enunțat și astfel:

*Raportul dintre cantitățile de căldură  $Q_1$  și  $Q_2$  schimbate de un sistem cu sursa caldă și sursa rece într-un ciclu Carnot este o funcție universală numai de temperaturile empirice ale celor două surse:*

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_2, t_1). \quad (4.36)$$

---

\* În manevrarea inegalităților trebuie lucrat cu atenție, deoarece cantitățile de căldură sînt mărimi dotate cu semn.



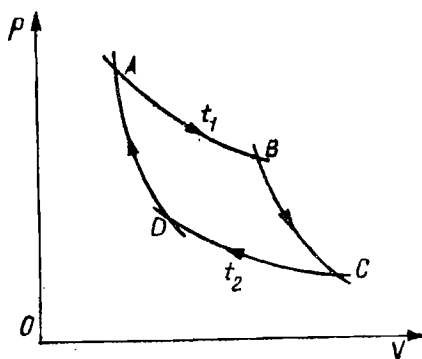


Fig. II.4.4

#### 4.7. CICLUL CARNOT CU FLUID

Ciclul Carnot constă din două transformări izoterme și două transformări adiabatice, care pot fi reprezentate într-o diagramă Clapeyron (fig. II.4.4). El se poate realiza (teoretic) cu ajutorul unui fluid închis într-un vas cilindric, care parcurge transformările descrise în continuare. Pereții laterali ai cilindrilor și pistonul sînt confecționați dintr-un material bun izolator termic, în timp ce baza cilindrilor dintr-un material bun conducător de căldură. Știm că trebuie să avem la dispoziție și două surse de căldură de temperaturi  $t_1$  și  $t_2$  ( $t_1 > t_2$ ). Fie  $A$  starea inițială a fluidului reprezentată în diagrama Clapeyron prin punctul  $A$  ( $p_A, V_A$ ), stare de echilibru realizată în contact cu sursa caldă, deci de temperatură  $t_1$ .

În prima etapă (I) a transformării se menține cilindrul în contact termic cu sursa caldă (fig. II.4.5), dar prin ridicarea lentă a unor greutatea de pe

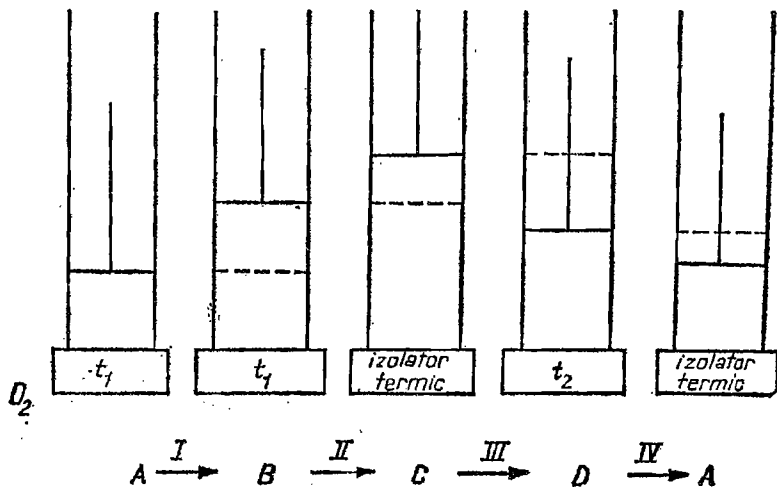


Fig. II.4.5

piston se realizează o destindere izotermă reversibilă a fluidului, pînă într-o stare  $B$  ( $p_B, V_B$ ) în care temperatura este evident tot  $t_1$ .

În a doua etapă (II) se izolează baza cilindrului și se determină destinderea în continuare a fluidului. Destinderea este acum adiabatică; ea se face cu scăderea temperaturii fluidului și este condusă pînă ce gazul atinge starea  $C(p_C, V_C)$  de temperatura  $t_2$  egală cu a sursei reci.

În a treia etapă (III) fluidul este pus în contact termic cu sursa rece și comprimat pînă într-o stare  $D$ , care se află pe aceeași adiabată cu starea inițială  $A$ .

În ultima etapă (IV) fluidul este din nou izolat și comprimat (comprimare adiabatică) pînă ce atinge starea inițială  $A$ .

Energia schimbată cu exteriorul în cele patru etape ale ciclului se detaliează pe etape astfel:

I. Sistemul a primit cantitatea de căldură  $Q_I \equiv Q_1 > 0$  de la sursa caldă și a efectuat lucrul mecanic  $L_I = - \int_A^B p dV < 0$ .

II. Sistemul a efectuat lucrul mecanic  $L_{II} = - \int_B^C p dV < 0$ .

III. Sistemul a cedat cantitatea de căldură  $Q_{III} \equiv Q_2 < 0$  și a primit lucrul mecanic  $L_{III} = - \int_C^D p dV > 0$ .

IV. Sistemul a primit lucrul mecanic  $L_{IV} = - \int_D^A p dV > 0$ .

Lucrul mecanic total schimbat cu exteriorul este  $L = L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV} < 0$  (sensul descris de parcurgere a ciclului a fost ales tocmai pentru a realiza cazul motorului termic). Mărimea lucrului mecanic efectuat este dată de aria din diagrama Clapeyron mărginită de curba închisă  $ABCD$  (fig. II.4.4). Randamentul se exprimă cu ajutorul formulei (4.31). Motorul descris fiind reversibil, conform teoremei Carnot randamentul său  $\eta_{rev}$  depinde doar de temperaturile celor două surse.

În ciclul de transformări al unui motor real, spre deosebire de cazul ciclului ideal descris aici, se cheltuiește lucru mecanic pentru a învinge diferite forțe de frecare și se pierde căldură și în mediul înconjurător, izolarea neputîndu-se realiza perfect. Aceasta, alături de faptul că baza cilindrului nu e în realitate un conductor perfect și de faptul că operațiile nu sînt conduse infinit lent, face ca orice motor real să fie un motor ireversibil.

#### 4.8. TEMPERATURA TERMODINAMICĂ

Teorema Carnot evidențiază *existența unei mărimi care depinde în mod absolut numai de temperatură*: raportul cantităților de căldură schimbate, cu sursa caldă și cu sursa rece, de orice substanță care ar parcurge un ciclu Carnot

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_2, t_1). \quad (4.37)$$

Funcția  $f$  are următoarea proprietate fundamentală:

$$f(t_2, t_1) = - \frac{f(t_0, t_1)}{f(t_0, t_2)}, \quad (4.38)$$

unde  $t_0$  este o temperatură arbitrară.

Pentru a demonstra proprietatea (4.38) se consideră trei surse de căldură notate 0, 1, 2, de temperaturi respectiv  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ . Presupunem pentru discuție  $t_0 < t_2 < t_1$ .

Se consideră două motoare reversibile,  $A$  și  $B$ , care funcționează respectiv cu sursele 0, 1 și 0, 2. Motoarele se presupun astfel construite încât să schimbe aceeași cantitate de căldură cu sursa lor rece comună, sursa 0. Dacă vom nota cu  $Q_1$  și  $Q_2$  cantitățile de căldură schimbate de cele două motoare cu sursele lor calde, atunci, pe baza teoremei Carnot aplicată fiecărui motor, avem

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_0, t_1) \quad \text{și} \quad \frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2).$$

Se imaginează o mașină termică mai complexă, al cărei ciclu să se realizeze prin funcționarea primului sistem ca motor, iar a celui de al doilea ca mașină frigorifică. Mașina construită constituie o mașină bitermă reversibilă, în care efectiv se schimbă cantitățile de căldură  $Q_1$  și  $-Q_2$  cu sursele 1 și 2, iar cu sursa 0 nu se schimbă căldură, deoarece motorul  $A$  îi cedează o cantitate de căldură egală (prin construcție) cu cea pe care o absoarbe mașina frigorifică  $B$ . Mașinii biterme reversibile imaginate i se poate aplica teorema Carnot,

$$-\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_2, t_1).$$

Comparând această ultimă relație cu rezultatul împărțirii celor două relații anterioare, rezultă tocmai

$$f(t_2, t_1) = - \frac{f(t_0, t_1)}{f(t_0, t_2)}.$$

Întrucât temperatura  $t_0$  este arbitrară, ea poate fi presupusă fixată într-un anumit mod și atunci proprietatea enunțată ne arată că funcția  $f(t_2, t_1)$  se poate scrie ca un raport de funcții care depind doar de temperatura empirică a cîte uneia din surse,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_2, t_1) = - \frac{g(t_1)}{g(t_2)}. \quad (4.39)$$

La numărător și la numitor apare aceeași funcție  $g$  de argument  $t_1$  și respectiv  $t_2$ . Minusul este pus în evidență explicit deoarece  $Q_1$  și  $Q_2$  au semn contrar. Funcția  $g(t)$  nu este univoc definită de relația (4.39), ea poate fi înmulțită cu o constantă arbitrară.

Pornind de la una din funcțiile  $g(t)$  posibile se poate defini o scară de temperaturi  $T$

$$T = g(t), \quad (4.40)$$

scara termodinamică a temperaturilor, care este independentă de proprietățile vreunui sistem. Pînă acum am definit univoc doar raportul a două temperaturi termodinamice

$$\frac{T_1}{T_2} = - \frac{Q_1}{Q_2}, \quad (4.41)$$

fiind furnizat un mijloc *teoretic* de a determina acest raport. Pentru a determina raportul temperaturilor termodinamice  $T_1$  și  $T_2$  a două sisteme, este suficient să realizăm un motor Carnot reversibil având ca surse cele două corpuri și să măsurăm cantitățile de căldură schimbate de substanța de lucru cu sursele. Ciclul Carnot astfel descris ar constitui un „termometru”, care se deosebește de toate celelalte prin aceea că *indicațiile sale sînt independente de natura corpului termometric*. Practic nu se poate măsura raportul celor două temperaturi în modul descris, însă din relația (4.41) temperatura termodinamică se introduce în formulele fizicii cu un rol pe care nu-l poate susține o temperatură empirică oarecare. Cu ajutorul temperaturii termodinamice, randamentul motorului Carnot reversibil se scrie

$$\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.42)$$

Pentru a atribui valori temperaturii termodinamice a unui corp este suficient să se fixeze, prin *convenție*, fie valoarea temperaturii termodinamice a unei stări fizice potrivit alese, fie valoarea diferenței dintre temperaturile termodinamice a două stări fizice convenabil alese. Pînă în 1954 se impunea diferenței de temperatură dintre punctul de fierbere al apei și punctul de topire a gheții (la presiune normală) valoarea 100:  $T_{100^\circ\text{C}} - T_{0^\circ\text{C}} = 100^\circ\text{K}$ . (Gradul scării termodinamice a temperaturilor este denumit *grad Kelvin*.) În această scară de temperaturi rezultă (măsurînd temperatura termodinamică prin intermediul termometrului normal cu hidrogen — vezi și § 4.9)  $T_{0^\circ\text{C}} = 273,15^\circ\text{K}$ . Cu convenția făcută, temperatura termodinamică se poate exprima și în notație centigradă  $\theta$ :

$$\theta(^{\circ}\text{C}) = T(^{\circ}\text{K}) = 273,15. \quad (4.43)$$

Din 1954 convenția este de a atribui *punctului triplu al apei* (vezi § 6.3) temperatura termodinamică de  $273,16^\circ\text{K}$ . Scara de temperaturi introdusă în acest mod este *scara Kelvin*. Valoarea atribuită punctului triplu al apei a fost astfel aleasă încît în notație Celsius (4.43) temperaturile de topire a gheții și fierbere a apei să păstreze valorile 0 și 100.

#### 4.9. LEGĂTURA DINTRE TEMPERATURA ÎN SCARA GAZULUI PERFECT ȘI TEMPERATURA TERMODINAMICĂ

Să arătăm acum coincidența dintre indicațiile unui termometru cu gaz perfect (termometru ideal) și temperatura termodinamică. Temperatura în scara absolută a gazului perfect a fost notată pînă acum cu  $T$ , tocmai avînd în vedere proprietatea pe care o demonstrăm acum. În acest paragraf, pentru mai multă precizie, vom nota cu  $\bar{T}$  temperatura absolută în scara gazului perfect și cu  $T$  temperatura termodinamică. Pentru demonstrație se compară formula generală (4.42) a randamentului unui motor reversibil, dată pe baza teoremei Carnot și a definiției temperaturii termodinamice  $\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , cu expresia randamentului pentru un *ciclu Carnot în care ca substanță*

de lucru se folosește gazul perfect. Pentru un gaz perfect (notațiile din § 4.7, de la descrierea ciclului Carnot reversibil),

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A},$$

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}.$$

Între cele patru volume există o relație: stările  $B$  și  $C$  sînt legate printr-o transformare adiabatică, deci  $V_B \bar{T}_1^{\gamma-1} = V_C \bar{T}_2^{\gamma-1}$ ; de asemenea stările  $A$  și  $D$ , deci  $V_A \bar{T}_1^{\gamma-1} = V_D \bar{T}_2^{\gamma-1}$ . Împărțind aceste două relații, obținem  $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$  și atunci, din expresiile lui  $Q_1$  și  $Q_2$ , rezultă  $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1}$ , adică  $\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1}$  sau

$$\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (4.44)$$

Deoarece indicațiile celor două termometre coincid la unul din punctele fixe, de exemplu la  $0^\circ\text{C}$  (ne amintim că la gaze perfecte  $\bar{T}_0 = \frac{1}{\alpha}$ ), rezultă

$$T = \bar{T}. \quad (4.45)$$

Nici termometrul cu gaz perfect și nici cel bazat pe ciclul Carnot (cu ajutorul căruia am definit temperatura termodinamică) nu există. Demonstrația coincidenței indicațiilor celor două termometre este însă foarte utilă pentru practică. Termometre cu gaz la presiuni joase se pot construi. Acestea dau indicații destul de apropiate de ale termometrului ideal cu gaz perfect. Mai mult decît atît: cunoscînd comportarea generală a gazului de lucru, există posibilitatea să se corecteze indicațiile termometrului cu gaz real și să se spună ce ar trebui să indice un termometru cu gaz perfect într-o aceeași situație fizică dată.

În paragraful care urmează dăm cîteva detalii despre modul în care se determină valorile temperaturii termodinamice.

#### 4.10. SCARA INTERNAȚIONALĂ DE TEMPERATURI

Cel mai interesant aspect (teoretic și practic) al termometriei îl constituie modul de convertire a indicațiilor  $t$  ale unui termometru oarecare în valori ale temperaturii termodinamice  $T$ . Termodinamica dă o relație generală de legătură între orice temperatură empirică și temperatura termodinamică, relație în care intervin mărimi caracteristice corpului termometric, ale căror valori trebuie cunoscute din experiență cu foarte bună precizie.\* E absolut

---

\* Găsirea acestei formule depășește cadrul expunerii de față.

necesar să se lucreze cu termometre ale căror indicații să fie cât mai ușor de corelat cu valorile temperaturii termodinamice. Un asemenea termometru este *termometrul normal cu hidrogen* (descriș în § 3.3), care funcționează după principiul termometrului cu gaz la volum constant. Termometrul normal cu hidrogen joacă un rol special în termometrie. El servește la determinarea precisă a temperaturilor termodinamice pentru o serie de puncte fixe, alese prin convenție. Valorile temperaturii termodinamice se obțin prin corectarea indicațiilor termometrului cu hidrogen definit prin formula (3.8). Aceste puncte constituie punctele de reper ale *scării internaționale de temperatură*. Valorile temperaturii termodinamice (măsurate în scara Celsius) introdusă prin (4.43), pentru câteva din aceste puncte, sînt date în tabelul II.4. Tabelul conține de fapt așa-numitele *puncte standard primare ale scării*. Toate temperaturile sînt determinate la presiune atmosferică normală.

TABELUL II.4

Nr.	Puncte fixe ale scării internaționale de temperaturi	Temperatura °C
1	Punctul de fierbere a oxigenului	— 182,970
2	Punctul de topire a gheții	0,000
3	Punctul de fierbere a apei	100,000
4	Punctul de topire a sulfului	444,600
5	Punctul de topire a argintului	960,5
6	Punctul de topire a aurului	1 063,0

Măsurarea temperaturii în diferitele intervale dintre punctele fixe se efectuează cu termometre speciale, denumite *termometre etalon*.

În intervalul  $-190^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}$  se utilizează ca termometru etalon *termometrul cu rezistență de platină*. Valoarea temperaturii (în scara Celsius) se calculează din valoarea rezistenței electrice în diferitele condiții, folosind relația

$$R_t = R_0[1 + at + bt^2 + ct^3(t - 100)], \quad (4.46)$$

în care constantele  $R_0$ ,  $a$ ,  $b$  și  $c$  se determină impunînd temperaturii valorile la punctele de reper  $-182,97^{\circ}\text{C}$ ,  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $+100^{\circ}\text{C}$  și  $+444,60^{\circ}\text{C}$  ale scării internaționale a temperaturilor (vezi tabelul II.4).

În intervalul  $0^{\circ}\text{C} - 660^{\circ}\text{C}$  se folosește tot termometrul cu rezistența de platină, dar cu o relație rezistență-temperatură dată într-o formă mai simplă:

$$R_t = R_0(1 + at + bt^2), \quad (4.47)$$

în care constantele  $R_0$ ,  $a$  și  $b$  se determină folosind punctele fixe  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $100^{\circ}\text{C}$  și  $444,60^{\circ}\text{C}$ .

În domeniul  $660^{\circ}\text{C} - 1063^{\circ}\text{C}$  se folosește *termometrul cu termocuplu platină-platină-rodin*, cu sudura rece menținută la  $0^{\circ}\text{C}$ , iar cea caldă la temperatura de măsurat. Temperatura rezultă din valoarea tensiunii electromotoare  $E$  a termocuplului, după formula:

$$E = a + bt + ct^2. \quad (4.48)$$

Pentru a determina pe  $a$ ,  $b$  și  $c$  se folosesc punctele fixe  $630,5^{\circ}\text{C}$ ,  $960,80^{\circ}\text{C}$  și  $1063,0^{\circ}\text{C}$ .

Mai complicată este măsurarea absolută a temperaturilor ridicate (peste  $1000^{\circ}\text{C}$ ) și a temperaturilor coborâte (sub  $-200^{\circ}\text{C}$ ).

Pentru intervalul  $1063^{\circ}\text{C}$ — $4000^{\circ}\text{C}$  se folosește ca termometru etalon *pirometrul optic*.

Pentru temperaturi sub  $-190^{\circ}\text{C}$  se folosește termometrul normal cu gaz, în care hidrogenul este înlocuit cu heliul. Sub  $-268^{\circ}\text{C}$  valoarea temperaturii termodinamice se determină studiind presiunea vaporilor saturați de heliu în echilibru cu faza lichidă. La temperaturi foarte joase se poate măsura temperatura și pe baza modificărilor proprietăților magnetice ale corpurilor paramagnetice.

Cu *termometrele etalon* se lucrează doar în laboratoare speciale, a căror mepire este păstrarea punctelor fixe ale scării internaționale de temperatură. Prin comparație directă cu termometrele etalon se gradează alte termometre denumite *termometre etalon de categoria 1*. Prin comparație cu acestea se etalonează *termometrele etalon de categoria 2*. Termometrele cu care se lucrează în laboratoare sînt gradate prin comparație cu termometrele etalon de categoria 2-a și sînt supuse din timp în timp controlului. *Termometrele de lucru* sînt de tip mai simplu decît cele etalon. Pentru intervalul de temperaturi  $-30^{\circ}\text{C}$  ...  $550^{\circ}\text{C}$  se folosește termometrul de sticlă cu mercur.

#### 4.11. IMPOSIBILITATEA ATINGERII LUI $0^{\circ}\text{K}$

Teorema Carnot arată că  $0^{\circ}\text{K}$  nu poate fi atins. Să presupunem că un sistem s-ar afla la temperatura  $T_2 = 0^{\circ}\text{K}$ . Să construim atunci un ciclu Carnot avînd ca sursă caldă o sursă de temperatură oarecare  $T_1 \neq 0$  și ca sursă rece sistemul ajuns la  $0^{\circ}\text{K}$ . Fie  $Q_1$  și  $Q_2$  cantitățile de căldură schimbate de sistemul care parcurge ciclul Carnot cu cele două surse. Relația  $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$ , care exprimă tocmai teorema Carnot, poate fi îndeplinită la  $T_2 \rightarrow 0$  fie dacă  $Q_2 \rightarrow 0$ , fie dacă  $Q_1 \rightarrow \infty$ . Caracterul neobișnuit al acestor două situații, prin comparație cu situația de la orice temperaturi  $T_2 \neq 0$ , arată că este absurdă presupunerea că un sistem se află la  $0^{\circ}\text{K}$ .

#### 4.12. MOTOARE TERMICE

Mașinile termice, din punct de vedere tehnic, se împart în două mari grupe, mașini cu ardere externă și mașini cu ardere internă. Diferența dintre ele constă în modul diferit în care are loc arderea combustibilului. Cel mai reprezentativ tip de mașină cu ardere externă este mașina cu aburi (fig. II.4.6). La mașinile cu ardere internă combustibilul arde chiar în cilindru cu piston unde are loc transformarea energiei chimice în energie termică, care la rîndul său se transformă în lucru mecanic.

Schematic, o mașină termică lucrează astfel: într-un cilindru pistonul său 1 (fig. II.4.6) este legat de un sistem bielă-manivelă 2, care transformă mișcarea de du-te-vino a pistonului într-o mișcare de rotație. Cilindrul cu piston comunică prin intermediul supapelor *a* și *b* cu sursa de vaporii. 3. Vaporii sînt produși prin încălzirea unui lichid. Cilindrul cu piston mai comunică și cu condensorul 4, prin intermediul supapelor *c* și *d*. În condensor are loc

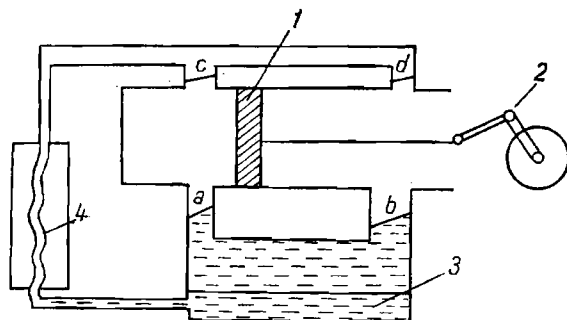


Fig. 11.4.6

condensarea vaporilor, după care aceștia sînt trimiși în sistemul de încălzire 3. Inițial, sînt deschise supapele *a* și *d*. Vaporii intră în cilindru și împing pistonul, producînd un lucru mecanic. După ce pistonul trece de supapa *d*, vaporii din corpul cilindrului intră prin această supapă, trec în condensorul 4 și de aici mai departe la sursa de vaporii 3. Se închid supapele *a* și *d* și se deschid supapele *b* și *c*. Vaporii din 3 intră prin supapa *b*, împing pistonul înapoi, producînd din nou un lucru mecanic. După ce pistonul trece de supapa *c*, vaporii din cilindru intră prin această supapă la condensorul 4. Procesul se poate repeta în continuare, în mod identic. Într-un ciclu al mașinii termice, căldura cedată de vaporii la trecerea lor, de la sursa de vaporii 3 (sursa caldă) la condensorul 4 (sursa rece), este transformată în lucru mecanic.

Motoarele cu ardere internă se împart în două mari clase: *motoare cu explozie*, denumite și motoare cu ardere sub volum constant, și *motoare cu ardere lentă* (motorul Diesel), denumite și motoare cu ardere sub presiune constantă. Vom prezenta pe scurt cele două tipuri de motoare.

*Motorul cu explozie* folosește drept combustibil vaporii de benzină amestecați cu aer sau oxigen. Prin aprinderea combustibilului, cu ajutorul unei scînteii, se produce o explozie, în urma căreia gazele de ardere la presiuni înalte împing un piston, efectuînd lucru mecanic.

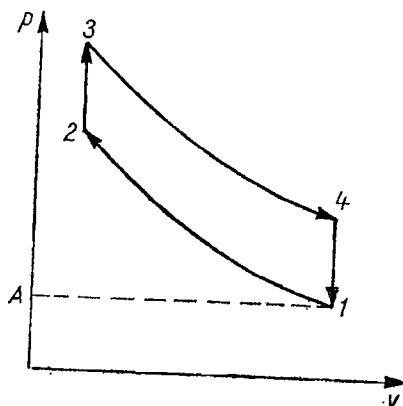


Fig. 11.4.7



Etapele de funcționare ale motorului cu explozie în patru timpi, prezentat în diagrama ( $p, V$ ) din figura II.4.7, sînt următoarele:

*Aspirația* este timpul I și constă în trecerea amestecului exploziv, care s-a format în carburator, în cilindru cu piston la presiunea constantă  $p$  (porțiunea  $A \rightarrow 1$  din figura II.4.7). Aspirația se realizează prin mișcarea pistonului de la un capăt al cilindrului la celălalt.

*Compresia* formează timpul II al ciclului, pistonul din cilindru comprimînd adiabatic amestecul exploziv pînă la presiunea  $p_2$  (porțiunea  $1 \rightarrow 2$ ), cînd o scînteie produsă de bujie aprinde combustibilul și instantaneu se produce o explozie; temperatura crește foarte mult, pînă la cca  $2000^\circ\text{C}$ , iar presiunea poate ajunge pînă la 7 atm (porțiunea  $2 \rightarrow 3$ ).

*Detenta* constituie timpul III, datorită presiunii mari pistonul este împins și revine în poziția inițială, producînd un lucru mecanic (rotește volantul de care este legat), (porțiunea  $3 \rightarrow 4$ ). Acest timp asigură energia necesară mișcării pistonului pînă la un nou ciclu.

*Evacuarea gazelor* este timpul IV și ultimul al ciclului, cînd gazele de ardere sînt evacuate din cilindru izocor prin supapa de evacuare (porțiunea  $4 \rightarrow 1$ ), după care se continuă evacuarea izocor prin mișcarea pistonului pe porțiunea  $1 \rightarrow A$ . Pistonul revenind în poziția inițială a realizat un ciclu. Acesta se repetă identic, în mod continuu, producîndu-se lucru mecanic.

Motorul cu explozie, după cum se vede din fig II.4.7, lucrează după un ciclu format din două adiabate și două izocore. Randamentul teoretic al acestui motor este mai mic decît randamentul unui motor care ar lucra după un ciclu Carnot.

Motorul cu ardere lentă sau motorul Diesel, este asemănător cu motorul cu explozie, însă el folosește combustibili mai ieftini, ca motorina sau țițeiul, avînd un randament mai ridicat.

Etapele de funcționare ale motorului Diesel sînt următoarele: timpul I, *aspirația*, pistonul aspiră izobar aer în cilindru (porțiunea  $A \rightarrow 1$  din fig. II.4.8); timpul II, *compresia*, pistonul revine în poziția inițială și comprimă adiabatic aerul pînă la 30–35 atm, temperatura ajungînd pînă la cca  $800^\circ\text{C}$  (porțiunea  $1 \rightarrow 2$ ); timpul III, *arderea și detenta*, începe cu introducerea combustibilului în cilindru. Deoarece în cilindru temperatura este mai ridicată decît

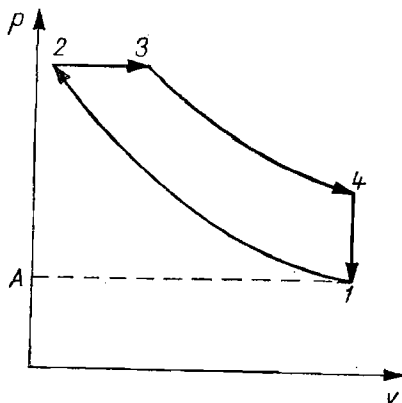


Fig. II.4.8

temperatura de aprindere a combustibilului, acesta se aprinde și arde, temperatura se ridică, pistonul se deplasează lent la presiune constantă (porțiunea 2—3). Din poziția 3 încetează procesul de ardere și pistonul începe să se deplaseze adiabatic, pînă în punctul 4. Pe porțiunea de detentă 3→4 se produce lucru mecanic. Timpul IV, *evacuarea gazelor*, începe prin deschiderea supapei de evacuare, presiunea scade brusc în cilindru pînă la presiunea atmosferică (poziția 4 → 1). Pistonul revine din nou în poziția inițială și evacuează gazele de ardere care au mai rămas în cilindru (porțiunea 1 → A).

Motorul Diesel lucrează după un ciclu format din două adiabate, o izocoră și o izobară (fig. 4.8) și are de asemenea un randament mai mic decît un motor care ar lucra după un ciclu Carnot.

Motoarele cu ardere internă, datorită randamentului lor crescut, cît și a faptului că sînt simple, se manevrează ușor și au o greutate redusă, sînt utilizate pe scară largă în industrie, în centralele termice, în transport, fiind preferate motoarelor cu ardere externă.

## 5. Proprietăți termice ale lichidelor și solidelor. Fenomene de suprafață în lichide

### 5.1. CARACTERIZARE GENERALĂ A STĂRILOR SOLIDĂ ȘI LICHIDĂ

Se numesc *corpuri solide*, corpurile care au volum și formă proprii. Toate substanțele, cu excepția heliului, ating, odată cu scăderea temperaturii, starea solidă. Constituenții elementari ai unui corp solid se află la distanțe mici unii de alții și, ca urmare, forțele dintre ei nu pot fi neglijate. Aceste forțe le îngrădesc puternic libertatea de mișcare.

Corpurile solide se pot afla fie în stare *cristalină*, fie în stare *amorfă*.

Caracteristicile principale ale stării cristaline sînt:

*Anizotropia*, adică dependența proprietăților fizice de direcție [de exemplu coeficientul liniar de dilatare termică (vezi § 5.2) și indicele de refracție au valori diferite, în funcție de direcția din cristal pentru care sînt definite].

*Forma geometrică exterioară regulată*: corpurile solide su structură cristalină au fețe plane, care formează între ele unghiuri bine determinate, independente de dimensiunile cristalului. Ruperea (despicarea) cristalelor se face cu ușurință și prezintă de asemenea regularități.

*Punct de topire bine determinat*: trecerea cristalelor în starea lichidă, prin încălzire, se face la o temperatură bine determinată și în tot timpul topirii temperatura rămîne constantă.

În opoziție cu corpurile cristaline, corpurile amorfe se caracterizează prin:

*Izotropie*, adică aceleași proprietăți în toate direcțiile.

*Absența unui punct de topire*: trecerea la starea lichidă, în urma încălzirii, are loc aproape continuu, solidul devenind din ce în ce mai moale. Procesul are loc de-a lungul unui interval de temperatură, în care temperatura crește continuu, dar într-un ritm lent. Se poate spune că starea amorfă reprezintă o stare intermediară între starea cristalină și starea lichidă.

În natură se realizează uneori cristale izolate numite *monocristale*. Majoritatea corpurilor solide sînt formate însă dintr-o aglomerare de cristale microscopice (structură policristalină\*). Toate metalele au o structură policristalină.

Forma geometrică regulată a cristalelor este determinată de o așezare aproape regulată a constituenților solidului în interiorul acestuia. Atomii\*\* din cristal se mișcă în vecinătatea unor poziții fixe care formează o *rețea spațială*. Nodurile rețelei reprezintă poziții de echilibru pentru atomii din cristal: dacă toți s-ar afla la un moment dat în noduri, rezultantele forțelor care se exercită asupra fiecăruia dintre ei ar fi nule. În această stare de echilibru

\* Solidele cu structură policristalină nu sînt anizotrope și nu au formă regulată.

\*\* Folosim termenul de „atom” pentru constituentul de bază al unui solid, deși el poate fi atom, ion sau moleculă.

(imposibil de atins), energia cristalului ar fi minimă. În realitate atomii cristalului sînt în continuă mișcare (mișcarea termică), dar această mișcare se face în vecinătatea nodurilor. Cu creșterea temperaturii atomii se pot îndepărta tot mai mult de pozițiile de echilibru. Creșterea temperaturii favorizează și deplasarea prin cristal a *defectelor* sale: noduri neocupate, atomi în spațiul dintre noduri, atomi străini substanței din care este format solidul. Amănunte asupra geometriei rețelelor cristaline și asupra forțelor de legătură care unesc atomii din interiorul lor se dau în VI. 2.

Proprietățile specifice stării solide se pot înțelege prin prisma structurii ei. Dăm ca exemplu doar comportarea monocristalelor de deformare. Prin comprimare, în urma apropierii atomilor cristalului, apar forțe de respingere între ei, cu atît mai puternice cu cît deformarea este mai mare. La alungirea cristalului, creșterea distanței dintre atomi este însoțită de apariția unor forțe de atracție între ei, care determină opoziția cristalului la acțiunea exercitată din exterior.

*Lichidele* au volum propriu, dar n-au formă proprie (curg). Ele iau forma vasului în care sînt puse, dar n-au tendința de expansiune a gazelor, ci ocupă totdeauna un volum determinat, limitat de o suprafață liberă aproape orizontală. Existența unui volum propriu, densitatea mult mai mare decît a gazelor, caracterul lent al difuziei în lichid, viscozitatea mai mare ca a gazelor, toate acestea constituie dovezi ale faptului că moleculele din lichid se află la distanțe mici unele de altele, mult mai mici decît raza de acțiune moleculară, distanțe la care forțele intermoleculare joacă un rol important. Nu se cunoaște încă în detaliu comportarea moleculelor într-un lichid. Există însă dovezi că mișcarea moleculelor nu este complet dezordonată, ca într-un gaz: experiențe de difracție a radiațiilor X pe lichide au pus în evidență existența unei *ordini locale* în lichide, adică a unor zone în care moleculele execută mișcări relativ ordonate, în jurul unor poziții fixe. Aceste zone au dimensiuni mici, de ordinul cîtorva diametre moleculare, și nu sînt stabile în timp; asemenea regiuni de așezare ordonată apar și dispar continuu. Deci, în lichide, forțele de atracție dintre molecule își exercită influența, îngrădind libertatea de mișcare a acestora, dar nu reușesc, ca în cazul solidelor, să le impună o configurație spațială aproape fixă.

Proprietățile lichidelor se schimbă cu condițiile externe, în special cu temperatura și foarte puțin cu presiunea. Există o temperatură, specifică fiecărei substanțe, denumită *temperatură critică* (vezi § 6.5), la care trecerea gaz-lichid se face aproape continuu, odată cu creșterea presiunii. În apropierea temperaturii critice deosebiriile dintre lichide și gaze sînt foarte mici, dar la temperaturi mult sub cea critică, proprietățile lichidelor diferă de cele ale gazelor. În apropierea punctului de solidificare proprietățile lichidelor încep să se asemene cu cele ale solidelor. Prin urmare, se poate spune că starea lichidă ocupă un loc intermediar între stările de agregare gazoasă și solidă, avînd însă destule proprietăți specifice. În capitolul de față vom discuta despre lichide aflate la temperaturi mult inferioare celei critice.

## 5.2. DILATAREA CORPURILOR SOLIDE

*Dilatarea corpurilor* este efectul de creștere a dimensiunilor lor cu temperatura.

a) **Dilatarea liniară.** Dilatarea unor corpuri solide, pentru care una din dimensiuni este mult mai mare decît celelalte două (bare), este mai simplă de studiat

decît dilatarea unor corpuri de formă oarecare. Fie o bară confecționată dintr-un material oarecare, a cărei lungime la temperatura  $t$  este  $l$ , iar la temperatura  $t + \Delta t$  este  $l + \Delta l$ . Alungirea barei,  $\Delta l$ , este proporțională cu lungimea sa inițială  $l$ . Pentru a caracteriza dilatarea la temperatura  $t$  a materialului din care este făcută bara, se definește *coeficientul de dilatare liniară*

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l \Delta t}. \quad (5.1)$$

Experiența arată că  $\alpha$  depinde într-adevăr de natura substanței, precum și de temperatură. Modificarea coeficientului de dilatare liniară cu temperatura nu este prea rapidă, încît pe intervale limitate de temperatură el poate fi considerat constant și aproximat cu o valoare medie a sa pe intervalul de temperatură considerat. Astfel, pentru temperaturi  $t$  nu prea depărtat de  $0^\circ\text{C}$ , folosind definiția (5.1) și admitînd  $\alpha$  independent de temperatură, se poate scrie relația

$$l = l_0(1 + \alpha t), \quad (5.2)$$

unde  $l_0$  este lungimea barei la  $0^\circ\text{C}$ , iar  $l$  este lungimea ei la temperatura  $t$ . În apropierea lui  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  poate fi luat chiar egal cu valoarea coeficientului de dilatare termică la  $0^\circ\text{C}$ ; dacă însă temperatura este mult depărtată de  $0^\circ\text{C}$ , dependența lungimii barei de temperatură poate fi redată cu foarte bună aproximație de formula (5.2), în care  $\alpha$  este înlocuit cu valoarea sa medie pe intervalul  $0^\circ\text{C} - t^\circ\text{C}$ .

Coeficientul  $\alpha$  are valori destul de mici ( $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1}$  pentru oțel,  $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1}$  pentru Cu etc.). Siliciul și oțelul invar au un coeficient de dilatare liniară extrem de mic ( $6 \cdot 10^{-7} \text{ grd}^{-1}$  și respectiv  $25 \cdot 10^{-7} \text{ grd}^{-1}$ ).

Formula (5.2) se poate scrie și în forma  $\Delta l = l_0 \alpha t$ . O formulă asemănătoare este valabilă, pe baza definiției (5.1) și a dependenței slabe a lui  $\alpha$  de temperatură, și în alt domeniu de temperatură decît vecinătatea lui  $0^\circ\text{C}$ :

$$\Delta l = l \alpha \Delta t, \quad (5.3)$$

unde  $l$  este lungimea inițială a bazei,  $\Delta l$  — alungirea sa datorită creșterii de temperatură  $\Delta t$ ,  $\alpha$  — valoarea coeficientului de dilatare termică în intervalul de temperaturi considerat.

La solidele anizotrope, valoarea lui  $\alpha$  depinde de direcția după care a fost tăiată bara din solid.

b) **Dilatarea în volum.** Corpurile solide de diferite naturi se caracterizează prin *coeficientul de dilatare în volum*

$$\alpha_V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V \Delta t}, \quad (5.4)$$

unde  $\Delta V$  reprezintă modificarea volumului  $V$ , la o variație a temperaturii de la  $t$  la  $t + \Delta t$ . Valoarea sa poate fi obținută studiind dilatarea unor corpuri la care toate dimensiunile sînt de același ordin de mărime. Coeficientul  $\alpha_V$  se schimbă puțin cu temperatura și, ca urmare, în apropierea lui  $0^\circ\text{C}$  de exemplu, se poate scrie

$$V = V_0(1 + \alpha_V t), \quad (5.5)$$

unde  $V_0$  este valoarea volumului la  $0^\circ\text{C}$ , iar  $V$  este valoarea sa la temperatura  $t$ . De fapt coeficientul de dilatare în volum al unui solid este legat direct de coeficienții săi de dilatare liniară. Astfel, pentru un corp izotrop, coeficientul de dilatare în volum este aproximativ de trei ori mai mare decât coeficientul de dilatare liniară

$$\alpha_V \cong 3\alpha, \quad (5.6)$$

iar pentru un solid anizotrop

$$\alpha_V \cong \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (5.7)$$

unde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sînt coeficienții de dilatare liniară pentru trei direcții care formează, două cîte două, unghiuri de  $90^\circ$ . Pentru demonstrarea relațiilor precedente se consideră un cub de latură  $l_0$  la  $0^\circ\text{C}$ , confecționat din substanța de studiat, presupusă anizotropă. La temperatura de  $t^\circ\text{C}$  laturile cubului devin:  $l_{1t} = l_0(1 + \alpha_1 t)$ ,  $l_{2t} = l_0(1 + \alpha_2 t)$ ,  $l_{3t} = l_0(1 + \alpha_3 t)$ , unde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  reprezintă coeficienții de dilatare liniară după cele trei direcții ale laturilor cubului. Aceasta înseamnă că, la temperatura  $t$ , cubul a devenit un paralelipiped de volum  $V_t = V_0(1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)(1 + \alpha_3 t) \cong V_0[1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t]$ ; termenii în  $t^2$  și  $t^3$  se neglijează, în raport cu ceilalți, din cauza valorilor foarte mici ale coeficienților de dilatare liniară.

*Observație.* Un vas gol, confecționat dintr-un material oarecare, se dilată la fel ca atunci cînd spațiul din interiorul său ar fi ocupat de materialul vasului.

c) **Dilatarea și elasticitatea.** Alungirea unei bare poate fi obținută nu numai datorită creșterii temperaturii, ci și prin tracțiunea ei. Sub limita de elasticitate perfectă (vezi I), alungirea unității de lungime este proporțională cu forța care acționează pe unitatea de suprafață, coeficientul de proporționalitate fiind prin definiție inversul modulului lui Young  $E$  al materialului:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (5.8)$$

unde  $l$  este lungimea inițială a barei,  $\Delta l$  — alungirea ei,  $F$  — forța care se exercită asupra suprafeței. În cazul dilatării termice, datorită alungirii care este egală cu  $\Delta l = l\alpha\Delta t$ , apare o forță

$$F = SE\alpha\Delta t. \quad (5.9)$$

Pentru simplificarea expunerii să presupunem că bara se află inițial la  $0^\circ\text{C}$ , dilatarea avînd loc în vecinătatea acestei temperaturi ( $\Delta t = t$ ). O forță egală cu cea dată de (5.9) trebuie aplicată la capetele barei pentru a împiedica contractarea ei la revenirea la  $0^\circ\text{C}$ . Asemănător, pentru a opri dilatarea unei bare trebuie aplicată o forță care să comprime bara, la temperatura  $t$ , de la lungimea  $l_0(1 + \alpha t)$  pînă la lungimea  $l_0$ , adică

$$F = SE \frac{\alpha t}{1 + \alpha t}. \quad (5.10)$$

Forța necesară pentru a împiedica dilatarea unei bare are o valoare numerică destul de mare.

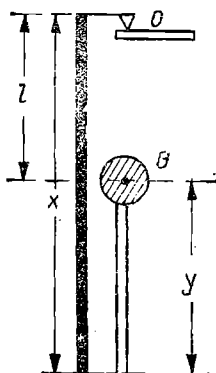


Fig. II.5.1

d) **Aplicații ale dilatării.** În practică, în numeroase ocazii trebuie ținut seama de existența dilatării. Discutăm aici numai problema *compensării pendulului*. Ne referim la cazul pendulului simplu, la care o bobită de dimensiuni neglijabile este suspendată la capătul unui fir de masă neglijabilă. Perioada completă  $T$  a pendulului simplu este dată în funcție de lungimea sa  $l$  de formula  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $g$  fiind accelerația gravitației în locul unde se află pendulul.

La  $0^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$  și presupunem că mișcându-se cu această perioadă pendulul indică în mod corect timpul. La  $t^\circ\text{C}$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha t)}{g}} = T_0 \sqrt{1 + \alpha t} \cong T_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right)$ , deci creșterea relativă a perioadei pendulului, datorită dilatării, este

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\alpha t}{2}. \quad (5.11)$$

Pentru ca pendulul simplu să indice corect timpul, independent de temperatură lungimea sa trebuie să rămână constantă. Pe desenul din figura II.5.1 această distanță  $l$  este cea dintre suportul  $O$  și punctul fix  $G$ . Pentru a o menține constantă se folosesc două bare de lungime  $x$  și  $y$  și coeficienți de dilatare liniară  $\alpha_1$ , respectiv  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$ ). Notăm cu  $l$  diferența  $x - y$ . Condiția  $x(1 + \alpha_1 t) - y(1 + \alpha_2 t) = l$  conduce la  $\frac{x}{y} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ . Lucrând, de exemplu, cu fier ( $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ ) și alamă ( $\alpha_2 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ ), rezultă  $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ .

Explicația cinetico-moleculară a dilatării este simplă. În cazul unei substanțe cristaline, de exemplu, energia primită prin încălzire determină mărirea amplitudinii de mișcare a moleculelor în jurul nodurilor și se realizează o creștere a distanței dintre noduri, deci o creștere a dimensiunilor corpului.

La temperaturi tinzând spre zero absolut, coeficienții de dilatare termică tind și ei la zero.

### 5.3. DILATAREA LICHIDELOR

Dilatarea lichidelor se caracterizează cu ajutorul *coeficientului de dilatare în volum*  $\alpha$ , definit prin relația

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{V \Delta t}, \quad (5.12)$$

unde  $V$  este volumul lichidului la temperatura  $t$ , iar  $\Delta V$  este creșterea sa reală datorită creșterii temperaturii cu  $\Delta t$ . Mențiunea „creștere reală a volumului” atrage atenția asupra faptului că atunci când se măsoară dilatarea unui lichid, trebuie ținut seama și de dilatarea suferită de vasul care-l conține. Există metode de lucru (de exemplu metoda lui Dulong și Petit, 1816) care permit măsurarea coeficientului de dilatare, evitând intervenția dilatării vasului în care se află lichidul.

Coeficientul de dilatare  $\alpha$  are valori mult mai mari la lichide decât la solide

TABELUL II.5

Lichid	$\alpha \cdot 10^4 \text{ (grd}^{-1}\text{)}$
Apă	1,5
Mercur	1,8
Glicerină	5,3
Acid clorhidric	5,7
Petrol	9,0

și o variație mai neregulată cu temperatura. În tabelul II.5 sînt date valorile lui  $\alpha$  pentru cîteva lichide, la temperaturi în vecinătatea temperaturii camerei.

Pe intervale limitate de temperatură, coeficientul de dilatare  $\alpha$  poate fi considerat constant și înlocuit cu valoarea sa medie pe domeniul considerat. În aceste condiții, în vecinătatea lui  $0^\circ\text{C}$  de exemplu, din relația (5.12) rezultă:

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (5.13)$$

unde  $V_0$  este valoarea volumului de lichid la  $0^\circ\text{C}$ ,  $V$  — valoarea sa la temperatura  $t$ , iar  $\alpha$  — valoarea coeficientului de dilatare în vecinătatea lui  $0^\circ\text{C}$ .

Experimental se poate măsura întotdeauna un coeficient  $a$  de dilatare aparentă a lichidului. Menționăm relația aproximativă care există între coeficientul de dilatare aparentă al unui lichid, coeficientul său de dilatare  $\alpha$  și coeficientul de dilatare în volum  $\alpha_V$  al materialului din care este făcut vasul:

$$\alpha \cong a + \alpha_V. \quad (5.14)$$

O dată cu dilatarea reală a lichidului, independent de ce se întîmplă cu vasul care-l conține, are loc o modificare a densității lichidului. Măsurarea ei permite determinarea coeficientului de dilatare termică. La temperaturi  $t$  nu prea depărtate de  $0^\circ\text{C}$ , modificarea densității  $\rho$  cu temperatura se face după formula

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t}, \quad (5.15)$$

unde  $\rho_0$  este densitatea lichidului la  $0^\circ\text{C}$ .



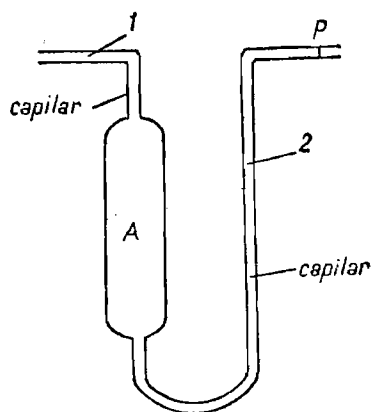


Fig. II.5.2

Pentru un interval oarecare de temperatură (nu prea întins), legătura între valorile densității la două temperaturi  $t_1$  și  $t_2$  din interval poate fi redată bine prin formula:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \alpha(t_2 - t_1)}, \quad (5.16)$$

unde  $\alpha$  este valoarea medie a coeficientului de dilatare pe intervalul considerat. Am presupus  $t_2 > t_1$ .

Prezentăm una din metodele de măsurare a coeficientului de dilatare  $\alpha$  al lichidelor, bazată pe studiul modificării densității lor cu temperatura — metoda picnometrului. Picnometrul constă dintr-un vas cilindric  $A$  (fig. II.5.2), terminat la capete cu vasele capilare 1 și 2. Capilarul 1 este închis, capilarul 2 este deschis și pe el este marcat un punct de reper  $P$ . Se cîntărește picnometrul gol, apoi umplut, cu lichid, pînă la reperul  $P$ , mai întîi la temperatura inițială de lucru  $t_1$ , după aceea la o temperatură mai ridicată  $t_2$ . Din aceste măsurători rezultă masa  $m_0$  de lichid din picnometru la temperatura  $t_1$  și masa  $m$  de lichid care a rămas în picnometru, pînă la reperul  $P$ , la temperatura  $t_2$ . S-a înlăturat deci, înaintea celei de a treia cîntăriri, cantitatea de lichid  $\Delta m = m_0 - m$ . Măsurătorile efectuate permit determinarea coefi-

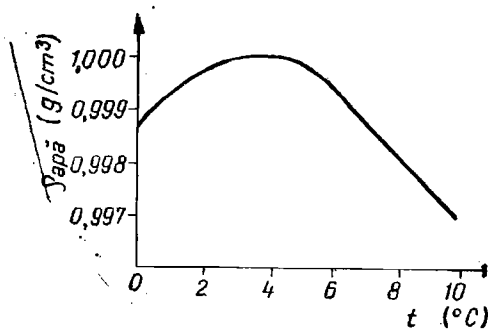


Fig. II.5.3

cientului de dilatare  $\alpha$  al lichidului, cu condiția cunoașterii coeficientului de dilatare al substanței din care este confecționat picnometru, după cum arătam în continuare. Pentru simplificare fie  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Avem:  $m_0 = V_0 \rho_0$ ,  $V_0$  fiind volumul vasului (pînă la reper) la  $0^\circ\text{C}$ , și  $m = V \rho$ , unde  $V$  este volumul vasului (pînă la reper) la temperatura  $t_2 = t$ , iar  $\rho$  — densitatea lichidului la această temperatură. Dar  $V = V_0(1 + \alpha_V t)$ , ( $\alpha_V$  — coeficientul de dilatare al materialului vasului), iar  $\rho_0 = \rho(1 + \alpha t)$ . Rezultă atunci relația  $m(1 + \alpha t) = m_0(1 + \alpha_V t)$ , din care poate fi extras coeficientul de dilatare  $\alpha$  căutat:

$$\alpha = \frac{m_0 - m}{m t} + \frac{m_0}{m} \alpha_V. \quad (5.17)$$

Coeficientul de dilatare aparent se obține din (5.17) pentru  $\alpha_V = 0$  (adică neglijînd faptul că și vasul și-a schimbat volumul):

$$a = \frac{m_0 - m}{m t}.$$

Se constată că există relația exactă  $\alpha = a + \frac{m_0}{m} \alpha_V$ , care nu contrazice relația aproximativă (5.14), întrucît diferența dintre  $m_0$  și  $m$  nu este mare.

*Observație.* Apa prezintă o comportare „anormală” în variația densității ei cu temperatura. De la  $0^\circ\text{C}$  la  $3,98^\circ\text{C}$  apa se contractă cu creșterea temperaturii. La  $3,98^\circ\text{C}$  densitatea apei are un maxim (fig. II.5.3.)

#### 5.4. ALTE PROPRIETĂȚI TERMICE ALE LICHIDELOR ȘI SOLIDELOR

În § 3.8 am definit coeficienții termici  $\alpha'$ ,  $\beta'$  și  $\kappa$  ai unui gaz și am calculat expresiile lor pentru cazul gazului perfect. Comportarea lichidelor poate fi caracterizată și ea cu ajutorul acestor coeficienți. Este de asemenea valabilă relația (3.47),  $\alpha' = \beta \beta \kappa$ , unde  $\alpha'$  este coeficientul de dilatare termică despre care a fost vorba în paragraful precedent și pe care îl vom nota ca și acolo cu  $\alpha$ .

Coeficientul de compresibilitate izotermă are la lichide valori mult mai mici decît la gaze. Astfel, pentru un gaz care ascultă de legea Boyle-Mariotte, s-a arătat că  $\kappa$  coincide cu inversul presiunii  $\frac{1}{p}$  [rel. (3.46)]. La presiunea atmosferică rezultă pentru  $\kappa$  valoarea  $10^{-7} \text{ N/m}^2$ , în timp ce  $\kappa$  pentru lichide este cam de 10 000 ori mai mic. Ca urmare, volumul specific al unui lichid este o mărime practic independentă de presiunea externă.

În schimb, creșterea presiunii la volum constant este mai mare la lichide decît la gaze. Mărimea  $\left(\frac{dp}{dT}\right)_V$ , care este egală cu  $\frac{\alpha}{\kappa}$ , datorită relației de legătură dintre coeficienții termici, are, de exemplu, pentru mercur valoarea de aproximativ  $4,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \cdot \text{grd.}$  ( $\cong 45 \text{ atm/grd.}$ ). Se explică astfel de ce un vas umplut complet cu lichid explodează cu ușurință la încălzirea lui. Pentru apă raportul  $\frac{\alpha}{\kappa}$  este negativ sub  $4^\circ\text{C}$  și pozitiv peste  $4^\circ\text{C}$ , la presiuni apropiate de cea atmosferică.

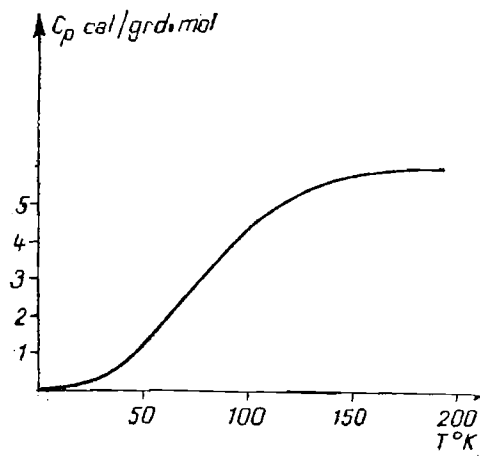


Fig. II.5.4

Pentru lichide este accesibilă experimental numai căldura molară la presiunea constantă  $C_p$ . Căldura molară la volum constant,  $C_v$ , poate fi doar calculată, cunoscînd alte date despre lichide\*. La apă diferența dintre  $C_p$  și  $C_v$  este foarte mică. În mod excepțional, la 4°C,  $C_p = C_v$ . Tot pentru apă, la 0°C,  $C_p = 18,1$  cal/grd.mol, iar  $C_v = 18,09$  cal/grd.mol.

*Problema căldurii specifice a solidelor.* Ca și la lichide, la solide se poate măsura experimental doar căldura molară la presiune constantă  $C_p$ . Dulong și Petit (1819) au stabilit o lege empirică, conform căreia, pentru substanțe simple în stare solidă, la temperaturi învecinate cu cea a camerei, căldura molară  $C_p$  este constantă și independentă de temperatură și are o valoare apropiată de 6,4 cal/grd.mol. Există cîteva elemente, ca Si și C, la care  $C_p$  are o valoare mai mică la temperatura camerei. La aceste elemente  $C_p$  variază puternic cu temperatura și la temperaturi ridicate atinge valoarea prezisă de legea lui Dulong și Petit. Studiul căldurilor specifice ale solidelor la temperaturi joase a arătat scăderea căldurii specifice cu scăderea temperaturii; această scădere este foarte rapidă la temperaturi foarte joase, căldurile specifice anulîndu-se în vecinătatea lui zero absolut. În figura II.5.4 este reprezentată curba experimentală a dependenței căldurii molare a argintului la presiune constantă, în funcție de temperatura absolută  $T$ .

Menționăm aici că problema căldurilor specifice a prezentat interes deosebit la începutul secolului. Fizica statistică prevedea că, pentru orice corp solid,  $C_v$  are o valoare constantă, egală cu  $3R \cong 5,96$  cal/grd.mol. Cu ajutorul termodinamicii se poate calcula  $C_p$  și rezultă o valoare foarte apropiată de cea dată de legea experimentală Dulong-Petit (vezi în § 7.4 rezultatele aplicării legii echipartiției energiei). Însă fizica statistică nu poate explica în nici un fel scăderea căldurii specifice a solidelor cu temperatura. Ne referim aici la rezultatele fizicii statistice clasice, care admite aplicabilitatea legilor mecanicii newtoniene la mișcarea moleculelor dintr-un corp macroscopic. La începutul

\* Formula de legătură dintre  $C_p$  și  $C_v$ , care se stabilește în termodinamică, arată că întotdeauna  $C_p > C_v$ .

secolului al XX-lea, experiența a impus concluzia că corpurile mici, de dimensiuni și mase atomice, ascultă de alte legi de mișcare decât cele newtoniene. A apărut pînă la urmă o nouă mecanică — mecanica cuantică — pentru care mecanica clasică e un caz particular limită, valabil atunci cînd masele corpurilor sînt mari. În primii ani ai secolului, cîteva din ideile viitoarei mecanici cuantice erau grupate într-o teorie semiempirică — teoria cuantelor (Max Planck, 1900). Einstein și Debye, aplicînd teoria cuantelor în problema căldurilor specifice, au găsit că la temperaturi foarte joase căldura molară la volum constant tinde spre zero, proporțional cu puterea a treia a temperaturii termodinamice ( $C_V \sim T^3$ ). Experiența a confirmat previziunile teoriei cuantelor, la solide nemetalice și neparamagnetice. La metale, experiența arată că la temperaturi joase  $C_V = aT^3 + bT$ . Termenul al doilea devine dominant la temperaturi sub 1°K. A. Sommerfeld a arătat că termenul liniar în  $T$  se datorește mișcării electronilor liberi din metale, neluați în considerație în calculele de pînă la el.

\*

Trecem acum la discutarea unor fenomene specifice lichidelor — tensiune superficială, adeziune, capilaritate — condiționate direct de mișcarea moleculelor din lichide și de forțele dintre ele, fenomene cuprinse sub denumirea de fenomene moleculare în lichide.

## 5.5. PRESIUNEA MOLECULARĂ

Stratul de la suprafața de separație lichid-mediu exterior este supus unei forțe dirijate spre interiorul lichidului. Presiunea corespunzătoare acestei forțe se numește *presiune internă*. Ea se manifestă indirect într-o serie de fenomene fizice. Începem prin a explica existența presiunii interne la suprafața lichidului.

Să considerăm un lichid, aflat într-un vas deschis, care vine în contact cu un mediu gazos (fig. II. 5.5.). În lichide, distanța dintre molecule este destul de mică, încît în sfera de acțiune moleculară a uneia dintre ele se află un număr de molecule de ordinul lui  $10^5$ . O moleculă  $a$ , aflată în interiorul acestei sfere, este solicitată aproape uniform în toate direcțiile de forțe de atracție exercitate de celelalte molecule și, ca urmare, forța rezultantă care acționează asupra ei este practic nulă. Însă o moleculă  $b$ , care se află chiar la suprafața de sepa-

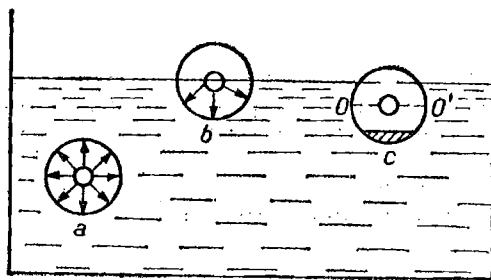


Fig. II.5.5

rație lichid-gaz, este atrasă mult mai puternic de moleculele de lichid care se află în emisfera inferioară a sferei de acțiune moleculară, decât de cele de gaz, care se află în emisfera superioară a acestei sfere, deoarece acestea din urmă sînt în număr mai mic, dat fiind densitatea redusă a gazelor. De asemenea, o moleculă  $c$ , aflată la o distanță de suprafața de separație gaz-lichid mai mică decât raza sferei de acțiune moleculară, este și ea supusă unei forțe de atracție spre interiorul lichidului, egală cu diferența dintre rezultanta forțelor de atracție datorite moleculelor de lichid și rezultanta forțelor de atracție datorite moleculelor de gaz. În concluzie, moleculele aflate în apropierea suprafeței lichidului (la o distanță mai mică decât raza sferei de acțiune moleculară) sînt atrase spre interiorul lichidului. Efectul acestei forțe asupra moleculelor din stratul superficial se aseamănă cu cel al unei presiuni exterioare (nu permite împrăștierea moleculelor). Forța cu care este atrasă spre interiorul lichidului unitatea de suprafață din stratul superficial al lichidului se numește *presiune moleculară* (presiune internă). Presiunea internă nu poate fi măsurată direct, dar se apreciază că ea este foarte mare, de ordinul zecilor de mii de atmosfere.

O evaluare aproximativă a presiunii interne se poate face cu ajutorul ecuației Van der Waals. Am menționat că ecuația Van der Waals descrie aproximativ și comportarea stării lichide. Termenul  $p' = \frac{a}{V^2}$  din (3.48) redă tocmai presiunea internă. Cunoșcînd din studiul general al comportării lichidului valoarea constantei  $a$ , se poate evalua  $p'$ . La apă  $a = 5,47 \text{ atm} \cdot \text{l}^2/\text{mol}$ , deci la suprafața unui mol de apă ( $V = 18 \text{ cm}^3$ ) se exercită o presiune de aproximativ 17000 atm.

Existența presiunii interne explică de ce lichidele sînt atît de greu comprimbile. Presiunea exercitată din afară asupra unui lichid, în scopul comprimării lui, este de obicei foarte mică în raport cu presiunea internă la care sînt supuse permanent moleculele stratului superficial, deci este incapabilă să producă fenomene observabile.

Să observăm că, dacă n-ar exista gravitația, sub influența presiunii interne masele de lichid ar lua forma sferică. Gravitația face ca, la echilibru, suprafața liberă a unui lichid să fie aproape plană și orizontală.

## 5.6. TENSIUNEA SUPERFICIALĂ

O moleculă din stratul superficial al unui lichid, atrasă spre interiorul său de presiunea moleculară, are o energie potențială mai mare decât o moleculă din lichid. Ca urmare, o cantitate dată de lichid are o energie potențială de suprafață, proporțională cu suprafața sa. Energia aceasta se numește *energie superficială* și este conținută într-un strat de la suprafața lichidului, cu grosimea de cîteva diametre moleculare. Conform cerinței cunoscute de minim a energiei potențiale, suprafața unui lichid tinde totdeauna spre acea formă care îi conferă o arie minimă. În consecință *suprafața unui lichid se comportă ca o membrană întinsă* și putem vorbi de forța care are tendința de a micșora suprafața unui lichid denumită *forță de tensiune superficială*. De remarcă că și în cazul solidelor stratul de la suprafață este supus unei presiuni interne și are o energie suplimentară, dar datorită lipsei de mobilitate a moleculelor, existența acestei energii nu se manifestă printr-o tensiune superficială.

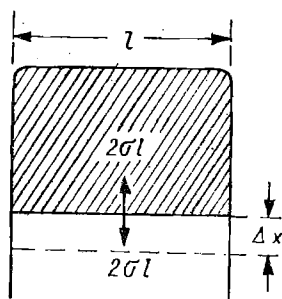


Fig. II.5.6

Forțele de tensiune superficiale pot fi puse în evidență ușor și măsurate pe pelicule de lichid (pături subțiri). În figura II. 5.6 este reprezentată o membrană de lichid prinsă de un cadru dreptunghiular de sîrmă, a cărui latură  $AB$  este presupusă mobilă. Pentru a menține pelicula la valoarea inițială a suprafeței sale, trebuie acționat cu o forță  $F$  asupra laturii mobile  $AB$ , forță îndreptată spre exteriorul cadrului, în planul acestuia. Pelicula de lichid este mărginită de două suprafețe plane (două membrane elastice). Forța  $F$  echilibrează forțele de tensiune superficială de la ambele suprafețe.

Se constată experimental că raportul dintre forța  $F$ , cu care trebuie acționat, și lungimea  $2l$ , pe care acționează tensiunea superficială ( $l$  este lungimea laturii  $AB$ ), nu depinde decît de natura lichidului cu care se lucrează, de temperatură și eventual de compoziția mediului gazos care înconjoară pelicula. Mărimea

$$\sigma \equiv \frac{F}{2l}, \quad (5.18)$$

constantă specifică lichidului, se numește *coeficient de tensiune superficială* sau, pe scurt, *tensiune superficială*.

Să dăm o definiție mai generală tensiunii superficiale. Considerăm suprafața liberă a unui lichid (fig. II. 5.7) și un segment de curbă plasat pe această suprafață. Toate punctele suprafeței sînt în echilibru, dar comportarea de membrană elastică a suprafeței sugerează faptul că, perpendicular pe segmentul considerat, de o parte și de alta a sa, și tangențial la suprafață, se exercită forțe, care se echilibrează, proporționale cu lungimea segmentului considerat.

Forța care acționează pe unitatea de lungime a unui segment de curbă oarecare, considerat pe suprafața, unui lichid, normal la acest segment și situată în planul tangent la suprafață, se numește *coeficient de tensiune superficială*.

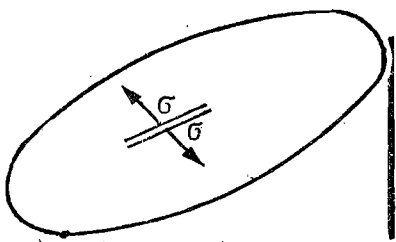


Fig. II.5.7

Coeficientul de tensiune superficială poate fi definit și cu ajutorul lucrului mecanic necesar pentru a mări suprafața lichidului. În cazul ilustrat în figura II. 5.6, pentru a deplasa latura  $AB$  a cadrului (fără a rupe membrana) pe o distanță  $\Delta x$ , măbind astfel suprafața membranei, trebuie deplasat punctul de aplicație al forței de tensiune superficială în sens contrar sensului ei, deci trebuie efectuat lucrul mecanic

$$\Delta L = F\Delta x = 2\sigma l\Delta x = \sigma\Delta S, \quad (5.19)$$

unde  $\Delta S = 2l\Delta x$  este creșterea totală a suprafeței lichidului. Prin efectuarea acestui lucru mecanic din exterior, energia potențială a peliculei a crescut. La micșorarea suprafeței lichidului cu  $\Delta S$ , energia sa potențială scade cu o cantitate  $\Delta L = \sigma\Delta S$ . Relația (5.19) ne arată că coeficientul de tensiune superficială poate fi definit și ca fiind egal cu *lucrul mecanic care ar fi necesar pentru a mări suprafața unui lichid cu unitatea de suprafață*.

Tensiunea superficială se măsoară în CGS în dyn/cm sau erg/cm<sup>2</sup> (1 dyn/cm = 1 erg/cm<sup>2</sup>), iar în SI în N/m.

Am putea să ne imaginăm că întreaga peliculă a fost formată prin întindere, pornind din poziția în care cadrul  $AB$  atinge latura opusă a cadrului. Această operație ar cere un lucru exterior  $\sigma S$  ( $S$  — suprafața externă totală a peliculei, egală cu dublul suprafeței cuprinse între laturile cadrului). Atunci energia potențială pe unitate de arie ar fi  $\sigma$  și aceasta ar fi tocmai energia superficială pe unitate de suprafață. Dar lucrurile nu stau chiar așa, deoarece experiența arată că extinderea peliculei este însoțită de răcirea ei și pentru ca pelicula să ia temperatura mediului acesta îi cedează în cursul extinderii o cantitate de căldură. Ca urmare, energia superficială a peliculei este mai mare decât valoarea  $\sigma S$ . Experiența arată că coeficientul de tensiune superficială scade cu creșterea temperaturii și tinde spre zero în apropierea temperaturii critice a lichidului. În tabelul II. 6 sînt date valorile lui  $\sigma$  pentru cîteva lichide, la temperatura de 20°C, în contact cu aer.

TABELUL II.6

Lichid	$\sigma \cdot 10^3$ (N/m)
Mercur	475
Apă	72,7
Glicerină	64
Acetonă	23,7

Descreșterea tensiunii superficiale cu creșterea temperaturii este explicabilă, deoarece la temperaturi mai ridicate moleculele posedînd o energie cinetică medie mai mare, efectul atracției moleculare interne este redus.

Moleculele mediului vecin lichidului, exercitînd o atracție asupra stratului superficial, determină o scădere a presiunii interne și a tensiunii superficiale.

De aceea, este necesar ca atunci cînd se dau valorile coeficientului de tensiune superficială, să se indice mediul cu care se află în contact lichidul de studiat. Astfel, tensiunea superficială a apei în contact cu aer este de 73 dyn/cm, în timp ce tensiunea superficială a apei în contact cu cloroform este de 29 dyn/cm. O metodă de determinare a tensiunii superficiale este descrisă în § 5.9. Multe fenomene simple se datoresc existenței tensiunii superficiale a lichidelor. De exemplu, formarea spumei: o bulă de aer, care se ridică din interiorul unui lichid spre suprafața sa, nu reușește să străbată întotdeauna stratul superficial, pentru că bula de aer are tendința de a mări suprafața peliculei de lichid și forțele de tensiune superficială se opun la aceasta. Spuma este constituită tocmai dintr-o aglomerare de bule de gaz sub stratul superficial al lichidului.

## 5.7. PRESIUNEA SUB O SUPRAFAȚĂ CURBĂ DE LICHID

Să presupunem că, dintr-un motiv oarecare, suprafața liberă a unei porțiuni de lichid nu este plană. Suprafața poate fi convexă (fig. II. 5.8a) sau concavă (fig. II. 5.8b). Să arătăm că, sub o suprafață curbă, presiunea este diferită de presiunea exercitată la suprafața lichidului din exterior: lichidul de sub suprafața convexă suferă o presiune suplimentară, iar cel de sub o suprafață concavă o depresiune, ambele datorită tendinței peliculei superficiale de a lua forma plană, pentru care energia superficială este minimă. Pentru simplificare, vom discuta numai cazul în care suprafața liberă a lichidului este suprafața unei calote sferice. Fie  $R$  raza sferei și  $r$  raza bazei calotei considerate (fig. II. 5.9.) Punctul  $C$  este centrul sferei din care face parte calota, iar  $r = R \sin \varphi$ . Forțele de tensiune superficială acționează pe conturul bazei calotei. Fie un punct  $A$  de pe acest cerc și un segment foarte mic de lungime  $\Delta l$ , al acestuia, care conține punctul  $A$ . Tensiunea superficială în punctul  $A$  este situată în planul tangent la suprafața calotei în acel punct și este perpendiculară pe segmentul  $\Delta l$ . Fie  $F$  forța care acționează asupra segmentului de lungime  $\Delta l$ , datorită tensiunii superficiale  $\Delta F = \sigma \Delta l$ . Această forță se poate descompune într-o componentă  $\Delta F_2$ , în lungul razei bazei calotei, și o componentă  $\Delta F_1$ , normală pe ea. Din însumarea componentelor de tip  $\Delta F_1$ , de pe întreg conturul bazei calotei, rezultă o forță  $F_n$ , dirijată spre interiorul lichidului, normală la baza calotei

$$F_n = 2\pi r \sigma \sin \varphi = \frac{2\pi r^3 \sigma}{R}. \quad (5.20)$$

Componentele de tip  $\Delta F_2$  se compensează, rezultanta lor fiind nulă. Forța  $F_n$  este o forță suplimentară față de cea exterioară. Deoarece se exercită pe o supra-



Fig. II.5.8



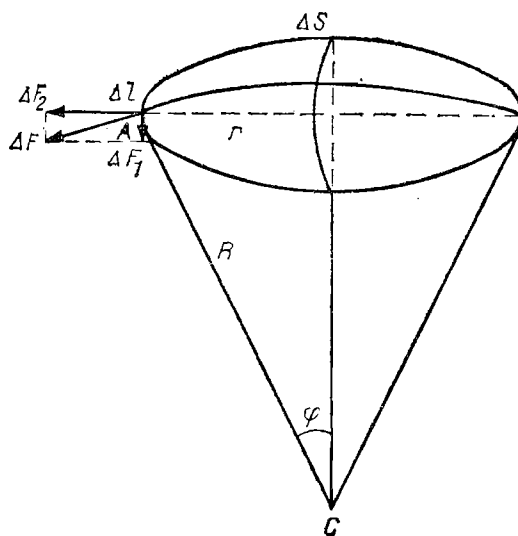


Fig. II.5.9

față de arie egală cu  $\pi r^2$  (aria bazei calotei), rezultă că presiunea suplimentară, condiționată de tensiunea superficială sub o suprafață convexă de lichid, de forma unei calote sferice, este

$$p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (5.21)$$

Cu cât este mai mică raza sferei  $R$ , deci cu cât este mai curbată membrana superficială, cu atât este mai mare presiunea suplimentară  $p$ . În cazul suprafeței plane, caz care se obține din cel precedent făcând pe  $R$  infinit de mare, presiunea datorită tensiunii superficiale este zero. Reluând discuția precedentă pentru cazul suprafeței concave, găsim aceeași mărime pentru presiunea suplimentară, cu deosebirea că ea are sens contrar (este o depresiune).

Să considerăm două cazuri în care se manifestă presiunea suplimentară datorită tensiunii superficiale:

1) În interiorul unei picături de lichid de rază  $R$ , presiunea este mai mare decât presiunea  $p_0$ , exercitată din exterior asupra lichidului:

$$p = p_0 + \frac{2\sigma}{R}. \quad (5.22)$$

Asemănător, presiunea într-o bulă sferică de gaz formată în interiorul unui lichid este cu  $2\sigma/R$  mai mare decât presiunea în lichidul înconjurător. Pentru orientare menționăm că presiunea condiționată de tensiunea superficială într-o bulă de aer sferică, de rază  $10^{-2}$  mm, aflată sub suprafața apei, este de aproximativ 0,06 atm.

2) Presiunea în interiorul unui balon de săpun de rază  $R$  este cu  $\frac{4\sigma}{R}$  mai mare decât presiunea în exterior, deoarece există două suprafețe de separație

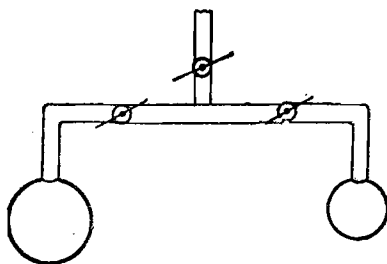


Fig. II.5.10

aer-lichid, una internă și alta externă, care au razele de mărimi practic egale, grosimea peliculei de săpun fiind foarte mică.

Pe baza exemplelor precedente, se poate explica ușor experiența următoare: dacă la capetele unui tub de sticlă se formează pe rînd două baloane de săpun, 1 și 2, de raze diferite (fig. II. 5.10), și se lasă apoi baloanele să comunice între ele, balonul mic se va strînge complet, iar cel mare se va mări.

## 5.8. FENOMENE LA CONTACTUL LICHID-SOLID. ADEZIUNE ȘI CAPILARITATE.

Forțele de atracție care se exercită între moleculele a două corpuri diferite se numesc *forțe de adeziune*. Ca urmare a existenței lor, atunci cînd un lichid și un solid vin în contact, suprafețele lor care se întîlnesc se intersectează sub un unghi determinat. Se numește *unghi de contact* între un lichid și un solid, unghiul dintre suprafața solidă (presupusă plană) și planul tangent la suprafața de lichid, în punctul lor de intersecție, măsurat spre interiorul lichidului (fig. II.5.11 *a* și *b*). În cazul *a*,  $\alpha < 90^\circ$ , iar în cazul *b*,  $\alpha > 90^\circ$ . Cînd  $\alpha < 90^\circ$ , se

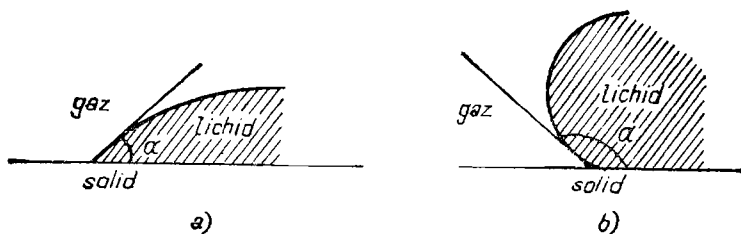


Fig. II.5.11

spune că lichidul udă solidul. Valoarea lui  $\alpha$  depinde atît de natura lichidului, cît și de cea a solidului cu care vin în contact și este influențată într-o oarecare măsură și de mediul gazos în care se află ansamblul lor\*.

Să analizăm situația unui lichid închis într-un vas cu pereți verticali (fig. II.5.12). Cele două cazuri, *a* și *b*, din figura II.5.12 corespund celor două cazuri,

\* Valoarea lui  $\alpha$  este foarte sensibilă la impuritățile pe care le pot conține suprafețele în contact.

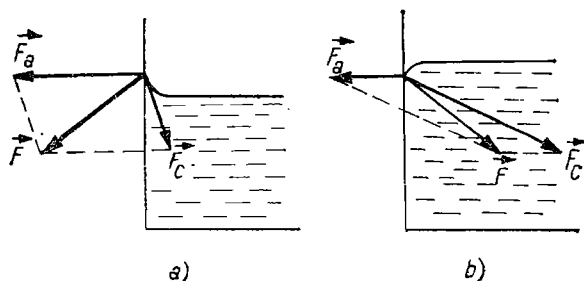


Fig. II.5.12

$a$  și  $b$ , din figura II.5.11, unde suprafața lichidului a fost figurată orizontal. Unghiul de racordare fiind diferit de zero, suprafața lichidului nu este plană. Fiind la echilibru, această suprafață este așezată perpendicular pe forța care acționează asupra ei,  $F$ , rezultanta forțelor de adeziune și coeziune care solicită moleculele de la suprafața lichidului, la apropierea peretelui. Forța de adeziune este dirijată după normala la perete, iar forța de coeziune spre interiorul lichidului. Ne amintim că dacă suprafața unui lichid este o suprafață curbă, sub ea se exercită o presiune suplimentară pozitivă sau negativă, după cum suprafața este convexă sau concavă. Existența acestei presiuni, determinată de tensiunea superficială, care se poate manifesta în condițiile existenței adeziunii, conduce la efecte vizibile în cazul tuburilor înguste. Constatăm, de exemplu, încălcarea principiului vaselor comunicante (fig. II.5.13). Fenomenele de urcare sau coborîre a lichidului în tuburile capilare (tuburi foarte înguste, cu diametre sub 1 mm) se numesc *fenomene de capilaritate*. Discutăm cazul unui tub capilar scufundat într-un lichid care udă pereții

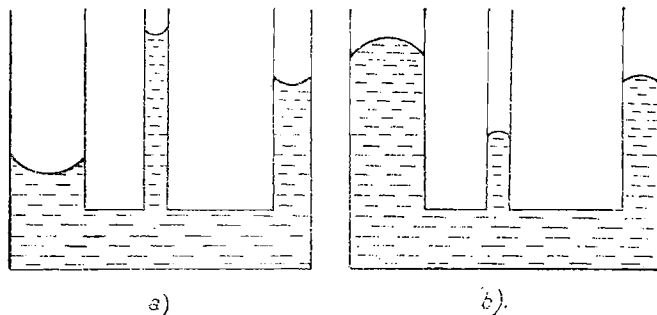


Fig. II.5.13

vasului capilar (fig. II.5.14). În acest caz lichidul se va ridica în tubul capilar pînă la o înălțime  $h$ , măsurată ca în figură. Fie  $r$  raza tubului capilar la nivelul la care se află meniscul și  $\alpha$  unghiul de contact. Pentru simplificare să presupunem că meniscul are forma unei calote sferice de rază  $R^*$ . Avem relația

\* Îl lăsăm pe cititor să se gîndească de ce în condițiile descrise meniscul nu poate fi riguros o calotă sferică.

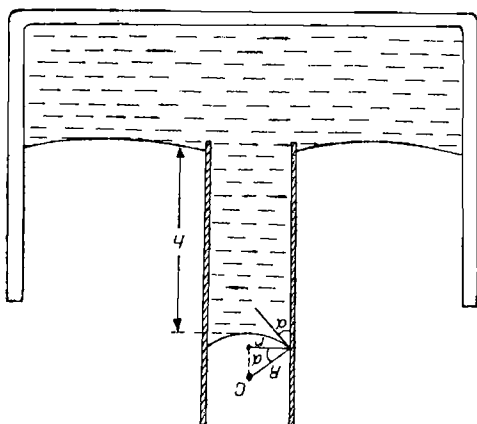


Fig. II.5.14

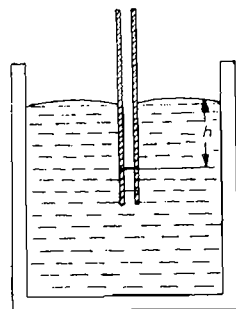


Fig. II.5.15

de legătură  $r = R \cos \alpha$ . La echilibru, presiunea lichidului ridicat în tubul capilar echilibrează depresiunea datorită tensiunii superficiale,

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh, \quad (5.23)$$

unde  $\rho$  este densitatea lichidului, iar  $g$  accelerația gravitației. Deducem

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r}. \quad (5.24)$$

Atunci când lichidul udă complet vasul ( $\alpha = 0$ ) lichidul se ridică pînă la înălțimea  $h = 2\sigma/\rho g r$ ; în acest caz meniscul este o emisferă de rază  $r$ . Pe baza formulei (5. 24), compararea înălțimilor lichidului urcat în tuburi capilare de diferite grosimi, confecționate din același material, permite compararea diametrelor lor.

În cazul în care lichidul nu udă pereții vaselor capilare, nivelul lichidului în tubul capilar este mai coborît decît în vasul în care este scufundat tubul capilar (fig. II.5.15).

Existența adeziunii determină și comportarea obiectelor foarte mici plasate pe suprafața unui lichid. Un ac de oțel plasat pe suprafața apei o străpunge și se scufundă, în timp ce dacă este uns cu o grăsime oarecare el poate rămîne la suprafață. În primul caz  $\alpha < 90^\circ$ , în al doilea  $\alpha > 90^\circ$ .

## 5.9. APLICAȚIE: O METODĂ DE DETERMINARE A TENSIUNII SUPERFICIALE

Se consideră un cilindru vertical (suficient de mic) de rază  $r$ , înălțime  $H$  și greutate  $G$ . Fie  $\rho$  densitatea lichidului a cărei tensiune superficială  $\sigma$  vrem s-o determinăm, iar  $\alpha$  unghiul de contact dintre lichid și materialul din care este făcut cilindrul. Determinarea lui  $\sigma$

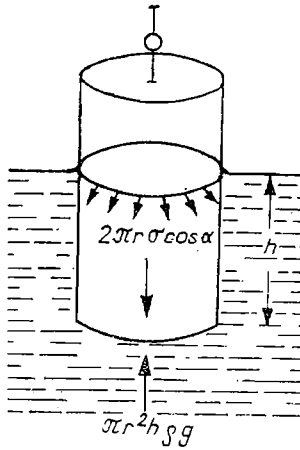


Fig. II.5.16

se face pe baza cîntăririi cilindrului scufundat pe rînd la diferite înălțimi  $h$  ( $h < H$ ) în lichid (fig. II.5.16). Dacă se ține seama de forța arhimedică și de tensiunea superficială, atunci cînd lichidul este scufundat pe o porțiune  $h$  din lichid, diferența dintre greutatea sa în aer și greutatea sa în lichid ( $G'$ ) va fi

$$G - G' = \pi r^2 h \rho g - 2\pi r \sigma \cos \alpha. \quad (5.26)$$

Diferența  $G - G'$  ca funcție de  $h$  se reprezintă printr-o dreaptă care taie axa ordonatelor la distanța  $-2\pi r \sigma \cos \alpha$  de origină și are panta  $\pi r^2 \rho g$ . Pentru a determina pe  $\sigma$  experimental, trebuie cunoscut unghiul de contact  $\alpha$ .

## 6. Schimbarea stării de agregare

În capitolele precedente am studiat proprietățile specifice celor trei stări de agregare: gazoasă, lichidă și solidă. O aceeași substanță, în funcție de condițiile de presiune și temperatură la care se află, se poate găsi în una sau alta din cele trei stări de agregare. Trecerea de la o stare de agregare la alta are anumite particularități, de care ne ocupăm în continuare.

### 6.1. TOPIREA ȘI SOLIDIFICAREA

a) **Legile topirii.** Procesul de trecere a unei substanțe din starea solidă în starea lichidă se numește *topire*, iar procesul invers, *solidificare*. Topirea unui corp survine în decursul încălzirii acestuia. Există însă cazuri în care prin încălzire substanța solidă trece direct în stare gazoasă. Fenomenul se numește *sublimare*, iar trecerea inversă *desublimare*. În alte cazuri, în urma încălzirii unei substanțe solide are loc descompunerea ei.

Din punctul de vedere al modului în care are loc topirea, substanțele se împart în două clase:

1) Substanțe ca apa și naftalina, pentru care la presiune dată există o temperatură specifică, deasupra căreia substanța se poate afla doar în stare lichidă, iar dedesubtul ei, doar în stare solidă. Această temperatură se numește *temperatură de topire*.

2. Substanțe ca sticla și unele aliaje, care, înainte de a deveni lichide, trec printr-o stare intermediară de înmuiere, stare ce se menține pe un întreg interval de temperatură.

Așa cum s-a arătat în capitolul 5, existența unui punct de topire este unul din atributele substanțelor cristaline, în opoziție cu substanțele amorfe. Ne vom ocupa aici doar de particularitățile topirii la substanțe cu temperatură de topire determinată. Valoarea acestei temperaturi la presiune normală se numește *temperatură normală de topire*. În decursul încălzirii unui solid se constată că, odată atinsă temperatura de topire (momentul apariției stării lichide), creșterea temperaturii stagnează pînă la trecerea în stare lichidă a întregii cantități de solid supusă topirii. Această trecere solid-lichid, deși la temperatură constantă, are loc numai dacă din exterior se absoarbe căldură (*căldură latentă de topire*). Cantitatea de căldură necesară topirii unității de masă dintr-o substanță aflată la temperatura de topire se numește *căldură*

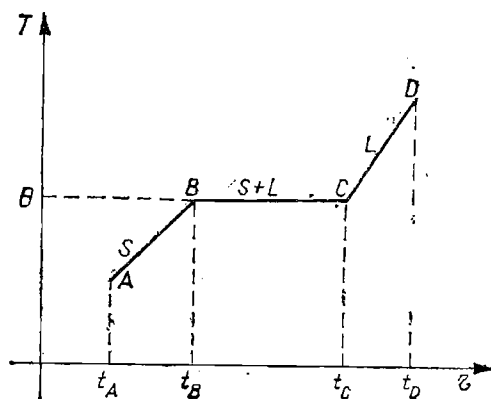


Fig. II.6.1

latentă specifică de topire și se notează de obicei cu  $l_t$ . În SI, unitatea de măsură pentru această mărime este J/kg; cal/g este o unitate tolerată. Dacă se urmărește dependența de timp a temperaturii unui solid, care este încălzit începînd de la o temperatură inferioară temperaturii de topire, apoi este topit și încălzit în continuare, se obține o curbă ca cea din figura II.6.1. În intervalul de timp  $(t_A, t_B)$ , sistemul se află în stare solidă și se încălzește, în intervalul  $(t_B, t_C)$  sistemul constă din amestec solid-lichid, cantitatea de lichid crescînd în timp; după momentul de timp  $t_C$ , sistemul studiat constă doar din lichid, a cărui temperatură crește pe măsura absorbției de căldură din exterior.

La răcirea unei substanțe lichide, survine solidificarea ei. Temperatura de solidificare este identică cu temperatura de topire. În decursul solidificării se degajă o cantitate de căldură (căldură latentă de solidificare) egală cu cea absorbită la topire. Rezultă că stările reprezentate în graficul din figura II.6.1 pot fi parcurse și în sens invers, începînd cu răcirea lichidului.

La temperatura de topire, evoluția amestecului lichid-solid spre una din stările lichidă sau solidă este determinată de faptul că sistemul primește sau cedează căldură. Dacă menținem temperatura constantă, fără a mai permite schimb de căldură cu exteriorul, putem face ca amestecul lichid-solid să nu-și mai modifice compoziția. Înseamnă că la temperatura de topire este posibil un echilibru între cele două stări de agregare, lichidă și solidă, ale unei aceleiași substanțe.

O substanță poate fi menținută în stare lichidă și la o temperatură inferioară temperaturii ei de solidificare, dacă răcirea lichidului se face cu anumite precauții: lent, în vase curate, în condiții de imobilitate. Fenomenul se numește *suprarăcire*. La cea mai mică perturbare a lichidului suprarăcit, temperatura lui crește brusc pînă la temperatura de solidificare și are loc solidificarea sa.

Faptul că topirea necesită absorbție de căldură este ușor de înțeles din punct de vedere cinetico-molecular: pentru ca moleculele să părăsească starea în care se găseau în corpul solid (mișcare doar în jurul unor poziții fixe), este necesară învingerea forțelor de coeziune, deci energie suplimentară din exterior. La punctul de topire rețeaua cristalină este distrusă.

Temperatura de topire a unei substanțe depinde de presiunea externă. Variația sa cu presiunea este în general mică. Experimental s-a stabilit că valoarea temperaturii de topire a unei substanțe, care în starea lichidă are un volum specific mai mare decât în starea solidă (acesta este cazul majorității substanțelor), crește cu creșterea presiunii, pe când în cazul substanțelor cu volum specific mai mic în starea lichidă decât în starea solidă (apă, fontă, bismut), scade cu creșterea presiunii. Acest fapt este firesc, deoarece pentru a doua categorie de substanțe, de exemplu, creșterea presiunii se opune dilatării și deci solidificării. Astfel, punctul de topire al gheții coboară cu aproximativ  $0,0075^{\circ}\text{C}$  la creșterea presiunii cu o atmosferă; ca urmare, în vid gheața se topește la  $+0,0075^{\circ}\text{C}$ . Dilatarea care însoțește formarea gheții contribuie la creșterea fertilității solului, deoarece provoacă fărâmițarea suplimentară a acestuia.

*Aplicație: exemplu de termostat.* Pe baza legilor topirii, se poate construi un sistem care să funcționeze în anumite condiții ca termostat. În § 2.1 am definit termostatul ca un sistem care nu își schimbă temperatura în urma contactului termic cu alte corpuri\*. Un recipient care conține apă și gheață la echilibru funcționează în anumite limite ca termostat. Dacă un sistem  $A$ , cu temperatură diferită de  $0^{\circ}\text{C}$ , este pus în contact termic cu recipientul, între sistem și recipient are loc un schimb de căldură și, ca urmare, cantitatea de gheață din recipient se modifică. Vom presupune că sistemul  $A$  este incapabil să topească toată gheața sau să provoace înghețarea întregii cantități de apă din recipient. În această ipoteză, temperatura finală de echilibru sistem + recipient va fi  $0^{\circ}\text{C}$ , deci recipientul cu apă și gheață are proprietățile unui termostat. Ipoteza făcută limitează însă condițiile în care se realizează un termostat prin procedeul descris. Este interesant de observat că, din cunoașterea cantității de gheață care apare sau dispare în urma contactului termic cu sistemul  $A$ , se poate calcula cantitatea de căldură  $Q$  schimbată:  $Q = l_f \Delta M$  ( $l_f$  fiind căldura latentă specifică de topire a gheții).

*Metodă de determinare a influenței presiunii asupra punctului de topire al cerii\*\*.* Ceara se contractă prin solidificare, deci punctul de topire se ridică cu creșterea presiunii. Metoda este datorată lui Bunsen. Aparatul este schițat în figura II. 6.2. Ceara se află în brațul scurt  $AB$  al vasului  $M$ . În porțiunea  $CD$  se află aer, iar în restul vasului mercur. Vasul  $M$  se scufundă într-o baie de apă, a cărei temperatură este la alegerea experimentatorului. Creșterea temperaturii mercurului, în urma scufundării în baie, provoacă dilatarea acestuia și, în consecință, o creștere mare a presiunii la care se află ceara. Valoarea presiunii se calculează pe baza volumului aerului din porțiunea  $CD$  a vasului. Modificarea presiunii exercitate asupra cerii, la temperatura dată a băii, se poate realiza introducând mai mult sau mai puțin vasul  $M$  în baie.

**b) Punctul de solidificare al soluțiilor.** Experiența arată că punctul de solidificare al unei soluții este mai coborât decât punctul de solidificare al solventului pur. Prezentăm comportarea unei soluții diluate de iodură de potasiu ( $\text{KI}$ ) în apă. La  $0^{\circ}\text{C}$  soluția este omogenă. Dacă se răcește soluția, se constată că la o anumită temperatură, care depinde de concentrația ei

\* În tehnică termostatul este definit ca un dispozitiv ce realizează menținerea constantă a temperaturii. Cele două definiții sînt evident strins legate.

\*\* Sub denumirea uzuală de „ceară” sînt cuprinse de fapt mai multe substanțe, cu compoziție și proprietăți înrudite. Numai unele dintre ele au punct de topire bine determinat.



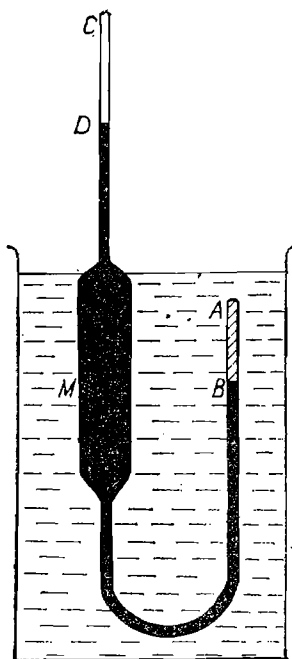


Fig. II.6.2

și care se numește temperatură de solidificare a soluției, în soluție încep să apară particule solide, formate din gheață pură. La răcirea în continuare a soluției, cantitatea de gheață crește și, evident crește și concentrația soluției. Acest proces se oprește la temperatura de  $-23^{\circ}\text{C}$ , la care soluția de iodură de potasiu devine saturată, coborîrea în continuare a temperaturii conducînd la solidificarea întregului sistem. Temperatura la care soluția devine saturată, în urma răcirii, se numește *temperatură eutectică*. Temperatura eutectică definește de fapt o stare în care pot coexista gheață, soluție saturată, iodură de potasiu solidă și vapori de apă.

c) **Amestecuri refrigerente.** S-a constatat că amestecarea gheței cu anumite substanțe este însoțită de coborîrea temperaturii sub  $0^{\circ}\text{C}$ . Astfel, amestecul gheață—clorură de calciu, în proporție 3:4, se răcește pînă la  $-55^{\circ}\text{C}$ . Fenomenul decurge astfel: clorura de calciu, care are totdeauna o temperatură deasupra lui  $0^{\circ}\text{C}$ , introdusă în gheață provoacă topirea unei anumite cantități din aceasta. În apa apărută se dizolvă o parte din clorura de calciu. Dizolvarea necesită o cantitate de căldură, care este luată chiar de la clorura de calciu și sistemul atinge pe această cale temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$ . La  $0^{\circ}\text{C}$  însă, gheața nu este în echilibru cu soluția de clorură de calciu în apă. Echilibrul s-ar realiza doar la temperatura de solidificare a soluției, temperatură inferioară lui  $0^{\circ}\text{C}$ . Tendința sistemului spre echilibru se realizează prin topirea gheței, care face posibilă dizolvarea în continuare a clorurii de calciu. Căldura necesară este preluată din energia sistemului care se răcește. Procesul continuă în acest mod, pînă la atingerea temperaturii eutectice a soluției de  $\text{CaCl}_2$ .

## 6.2. VAPORIZAREA ȘI CONDENSAREA

*Vaporizarea* este procesul de trecere a unei substanțe din starea lichidă în starea gazoasă. Procesul invers se numește *condensare*. Vaporizarea este influențată de situația în care se află lichidul în raport cu mediul înconjurător: lichid în vid, lichid în contact cu anumite substanțe gazoase, plasat în vas închis sau deschis.

Vaporizarea se realizează prin părăsirea lichidului de către o parte din moleculele sale. Pentru a părăsi masa unui lichid, o moleculă trebuie să treacă dincolo de stratul superficial al acestuia, unde trebuie să învingă atracția existentă din partea restului lichidului. Acest lucru este posibil doar dacă energia cinetică a moleculei este suficient de mare. În lichid moleculele au viteze diferite. O parte dintre ele sînt capabile să părăsească lichidul și îl părăsesc. Simultan unele molecule se reîntorc în masa lichidului. Dacă numărul de molecule care părăsesc lichidul îl depășește pe al celor care intră în lichid, are loc vaporizarea lichidului; în caz contrar, are loc condensarea lui.

a) **Lichid în contact cu vaporii săi.** Fie o cantitate de lichid introdusă într-un spațiu vid, de exemplu în spațiul de deasupra mercurului dintr-un tub Torricelli (cantitatea de vaporii de mercur pe care o conține acest spațiu la temperatura camerei este neglijabilă). Să presupunem că tubul barometric e menținut tot timpul la temperatură constantă. Dacă lichidul introdus nu este în cantitate prea mare se constată transformarea sa integrală în vaporii. Nivelul mercurului în tubul barometric coboară corespunzător presiunii exercitate de vaporii de lichid formați. Dacă se continuă introducerea de lichid în cantități mici, se constată în continuare dispariția sa, prin vaporizare, și coborîrea nivelului mercurului. Atîta timp cît este încă posibilă vaporizarea unei noi cantități de lichid, se spune că vaporii existenți în spațiul considerat sunt *nesaturați*. La un moment dat însă, lichidul nou introdus nu se mai vaporizează, ci se așază pe suprafața mercurului. Se spune în acest caz că spațiul de deasupra lichidului este saturat cu vaporii săi, vaporii înșiși se numesc *vaporii saturanți*, iar presiunea pe care o exercită ei se numește *presiunea vaporilor saturanți*. Între vaporii saturanți și lichidul din care provin este stabilit un echilibru dinamic: în mod continuu are loc trecerea unor molecule din starea lichidă în stare de vaporii și reîntoarcerea altora din vaporii la lichid, însă numărul celor dinții este egal cu al celor din urmă. Presiunea vaporilor saturanți la o temperatură dată este deci *presiunea de echilibru a unui lichid în contact cu vaporii săi la acea temperatură*.

S-a studiat experimental comportarea vaporilor saturanți și s-a ajuns la concluzia că *valoarea presiunii vaporilor saturanți depinde numai de natura substanței considerate și de temperatură*. Ca urmare, presiunea vaporilor saturanți nu depinde de valoarea raportului dintre masa de lichid și masa vaporilor care se află în echilibru cu lichidul. Astfel, dacă se încearcă micșorarea volumului aflat la dispoziția vaporilor saturanți, se constată că o parte din vaporii se condensează pînă ce presiunea vaporilor rămași este egală cu presiunea vaporilor saturanți corespunzătoare temperaturii de lucru. Presiunea vaporilor saturanți este deci presiunea maximă pe care o pot exercita vaporii unei substanțe date, în contact cu lichidul din care s-au format. Presiunea vaporilor saturanți crește cu temperatura. Creșterea este destul de spectaculară: cîteva cifre sînt date în tabelul II. 7.

TABELUL II.7

Temperatura °C	p torr
—10	1,97
0	4,58
20	17,5
50	92,5
60	149,4
100	760
150	3 580
200	11 700

Dacă lichidul nu se află în întregime la aceeași temperatură, presiunea vaporilor saturați corespunde temperaturii minime existente în sistem.

Dacă echilibrul dintre lichid și vaporii săi se stabilește în prezența altor substanțe gazoase, presiunea vaporilor saturați ai lichidului studiat nu este influențată de prezența acestor gaze; însă, în general, viteza cu care se stabilește acest echilibru scade mult. Dalton a constatat valabilitatea aproximativă a următoarei legi (pentru vaporii saturați și nesaturați): presiunea exercitată de un amestec de vaporii (sau gaze)\* este egală cu suma presiunilor pe care le-ar exercita fiecare component al amestecului dacă ar ocupa separat întregul volum al amestecului, la temperatura acestuia.

Proprietățile vaporilor saturați se explică ușor, din punct de vedere calitativ, pe baze cinetico-moleculare: dependența valorii presiunii vaporilor saturați de natura lichidului se leagă de faptul că forțele de coeziune, și deci și energia necesară străbaterii stratului superficial al lichidului, diferă de la lichid la lichid. O dată cu creșterea temperaturii, crește numărul de molecule capabile să părăsească lichidul și aceasta determină creșterea presiunii vaporilor saturați. Rezultă de aici și faptul că, deoarece prin vaporizare lichidul este părăsit de o parte din moleculele sale cu cea mai ridicată energie, lichidul se răcește, în condiții în care el nu primește căldură din exterior. Pentru ca vaporizarea să aibă loc la temperatură constantă, trebuie ca din exterior să se furnizeze căldură lichidului. Această căldură se numește *căldură latentă de vaporizare* și se notează cu  $lv$ . Căldura latentă specifică de vaporizare este cantitatea de căldură necesară pentru vaporizarea izotermă a unității de masă dintr-un lichid. Pe proprietatea lichidelor de a se răci atunci când se transformă în vaporii, fără să primească căldură din exterior, se bazează o metodă de coborîre a temperaturii.

Cînd vaporii se condensează, datorită atracției dintre molecule, are loc o creștere a energiei cinetice medii și deci a temperaturii lichidului. Dacă procesul este condus izoterm se va degaja o cantitate de căldură—*căldura latentă de condensare*—egală cu căldura latentă de vaporizare.

b) **Fierberea.** Se spune că un lichid fierbe atunci cînd suferă procesul de vaporizare în toată masa sa. Pentru a realiza fierberea unui lichid este necesară încălzirea sa. Se constată că: 1. fierberea are loc la acea temperatură la care

\* Pentru distincția dintre vaporii și gaze vezi § 6.5.

presiunea vaporilor saturați ai lichidului respectiv este egală cu presiunea externă; 2. în tot timpul fierberii temperatura rămâne constantă. Înainte de a începe fierberea unui lichid, se poate observa existența unor bule de vaporii în porțiunile de lichid cele mai apropiate de sursa de căldură. Dacă se urmăresc aceste bule, se observă că ele dispar înainte de a ajunge la suprafața lichidului, adică are loc condensarea lor în interiorul lichidului. Căldura latentă degajată prin această condensare contribuie la uniformizarea temperaturii în lichid. Atunci când temperatura de fierbere a fost atinsă, nu mai are loc dispariția bulelor de gaz formate în lichid, ele degajându-se la suprafața lichidului. Apariția primelor bule de gaz în lichid este posibilă datorită prezenței de aer dizolvat în lichid. În jurul bulelor de aer cresc cele de gaz. Absența din lichid a aerului dizolvat și a altor impurități poate întârzia fierberea, lichidul putând fi încălzit un timp peste temperatura de fierbere (lichid supraîncălzit). Fierberea lichidului supraîncălzit are un caracter violent. Dacă în condițiile ei se introduc în lichid mici particule solide care conțin aer adsorbit\*, fierberea își revine caracterul obișnuit. Existența bulelor cere ca presiunea vaporilor din ele, la temperatura dată, plus presiunea gazelor străine din ele să egaleze presiunea de la exteriorul bulei (considerăm doar bulele suficient de mari, la care efectele de tensiune superficială sînt neglijabile). La temperatura de fierbere, presiunea vaporilor saturați egalînd-o pe cea externă, bulele care conțin și alte gaze nu mai sînt în echilibru; ele cresc și o pornesc spre suprafața apei. Se poate observa că în locul bulei plecate, în care rămîne o mică porțiune din ea, se formează o nouă bulă. În acest fel, procesul de formare a bulelor continuă.

În practică trebuie să se țină seama de faptul că dependența de presiune, a punctului de fierbere, este destul de pronunțată. De exemplu, atunci când se face gradarea unui termometru cu mercur, termometrul nu trebuie introdus în apa care fierbe, ci în vaporii săi, deoarece temperatura lor este cu siguranță cea de echilibru apă-vapori. Nivelul mercurului în termometru corespunde temperaturii de echilibru apă-vapori, la presiunea exterioară la care se lucrează, aceasta fiind, în general, diferită de presiunea normală. Această presiune exterioară trebuie măsurată și în dreptul nivelului mercurului scrisă temperatura  $t$  care corespunde presiunii de lucru, luată din tabele ( $t < 100$  dacă  $p < 1$  atm,  $t > 100$  dacă  $p > 1$  atm; în vecinătatea presiunii normale, o modificare a presiunii cu 1 cm Hg provoacă o modificare de același sens, de aproximativ  $0,4^{\circ}\text{C}$ , a punctului de fierbere).

c) **Evaporarea.** Evaporarea este tot o vaporizare, care are însă loc strict la suprafața unui lichid, la orice temperatură (cuprinsă între cea de solidificare și cea de fierbere), dacă presiunea vaporilor lichidului considerat în spațiul de deasupra lichidului este inferioară presiunii vaporilor saturați ai acestui lichid și dacă presiunea atmosferică depășește această presiune a vaporilor saturați (pentru a nu avea loc fierberea). Masa de lichid care se evaporă în unitatea de timp definește viteza de evaporare. Dalton a stabilit următoarea formulă empirică pentru viteza de evaporare:

$$v = \frac{KS(p_m - p)}{H}, \quad (6.1)$$

---

\* Fenomenul de aderare (fixare) a moleculelor unui gaz, ale unui lichid, sau ale unui corp dizolvat sau în suspensie, la suprafața unui corp solid.

unde  $K$  este o constantă depinzând de factori externi,  $S$  — suprafața liberă a lichidului,  $H$  — valoarea presiunii atmosferice,  $p_m$  — valoarea presiunii vaporilor nesaturați ai lichidului, existenți la suprafața sa.

### 6.3. PUNCTUL TRIPLU

Să considerăm o diagramă presiune-temperatură și să luăm cazul apei (fig. II. 6.3). Fie  $OM$  curba care reprezintă presiunea vaporilor saturați în funcție de temperatură. Stările de pe această curbă sînt stări în care vaporii și lichidul se află în echilibru. Există situații în care gheața și vaporii de apă sînt în echilibru; acestea sînt reprezentate prin curba  $ON$ . Curba  $OP$  reprezintă stările de echilibru gheață-apă sau, altfel spus, legătura între presiune și temperatură pentru punctul de topire al gheții. Panta curbei  $OP$  este negativă, spre deosebire de a celorlalte curbe,  $OM$  și  $ON$ , deoarece temperatura de topire a gheții coboară cu creșterea presiunii, în timp ce, de exemplu, presiunea vaporilor saturați crește cu temperatura. Desenul arată intersectarea celor trei curbe în punctul  $O$ . Punctul  $O$  se numește *punctul triplu al apei* și reprezintă o stare unică a acesteia, în care gheața, apa și vaporii de apă pot exista simultan în echilibru. Starea corespunde presiunii de 4,57 mm Hg și temperaturii de 0,0075°C. Orice mică abatere de la valorile indicate ale presiunii și temperaturii punctului triplu conduce la dispariția uneia din faze. Faptul că punctul triplu este atît de net definit a contribuit decisiv la alegerea sa ca punct fix al scării temperaturii absolute.

În stările din figura II.6.3 cuprinse între curbele  $OP$  și  $OM$ , apa se află în stare lichidă, în stările dintre curbele  $ON$  și  $OP$  ca gheață, iar sub curbele  $ON$  și  $OM$  apa există în stare de vaporii.

### 6.4. NOȚIUNI DE HIGROMETRIE

În atmosfera înconjurătoare sînt totdeauna prezenți vaporii de apă și ei își lasă amprenta asupra multor fenomene din natură. *Higrometria* se ocupă cu

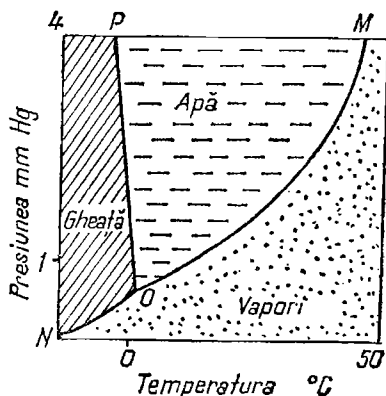


Fig. II.6.3

studiul conținutului în vapori de apă al atmosferei. Cantitatea de vapori de apă conținută în unitatea de volum se numește *umiditatea absolută*. Această mărime nu spune prea mult despre starea atmosferei. Mai utilă este mărimea *umiditate relativă*, care reprezintă raportul dintre masa  $m$  a vaporilor de apă dintr-un volum dat din atmosferă și masa  $M$  de vapori de apă, care ar satura atmosfera în aceleași condiții:

$$U = \frac{m}{M}, \quad (6.2)$$

Cum vaporii ascultă aproximativ de legea Boyle-Mariotte,

$$U = \frac{p}{p_s}, \quad (6.3)$$

$p$  fiind presiunea parțială a vaporilor de apă prezenți în atmosferă, iar  $p_s$  — presiunea vaporilor saturați la temperatura aerului.

Cantitatea de vapori de apă existentă în aer ar putea satura atmosfera, dacă temperatura ar fi mai scăzută. Temperatura aceasta se numește *punct de rouă* sau *de aburire*.

Aparatele cu ajutorul cărora se măsoară umiditatea atmosferei se numesc *higrometre*. Există diferite principii care stau la baza construcției lor.

*Higrometrele chimice* se bazează pe evidențierea absorbției vaporilor de apă, dintr-un volum determinat de apă, de către anumite substanțe chimice.

*Higrometrele cu fir de păr* evidențiază proprietatea firului de păr degresat de a se lungi atunci când absoarbe vapori de apă.

*Higrometrele de condensare* determină valoarea punctului de rouă. Cunoscând punctul de rouă, se determină presiunea  $p$  a vaporilor de apă existenți în atmosferă, deoarece  $p = p'_s$ , unde  $p'_s$  este valoarea presiunii vaporilor saturați la temperatura punctului de rouă. Valorile presiunii vaporilor saturați de apă la diferite temperaturi sînt mărimi tabelate. Descriem higrometrul Aluard (fig. II.6.4) din categoria higrometrelor de condensare. Aparatul se compune

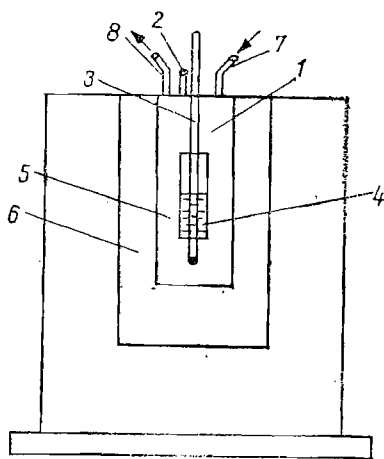


Fig. II.6.4

din rezervorul metalic 1, în care se introduce, prin pîlnia 2, un lichid care se evaporă ușor, de obicei eter. În rezervor se află termometrul 3. Fereastra de sticlă 4 permite urmărirea nivelului lichidului care se evaporă. Rezervorul 1 este prevăzut cu o plăcuță metalică bine lustruită 5, identică cu plăcuța 6, care nu este legată de rezervor și care servește drept etalon, pentru a putea observa, prin comparație, momentul cînd plăcuța 5 se aburește. Prin tuburile cu robinet 7 și 8 se suflă aer, pentru a se mări viteza de evaporare. Se toarnă eter prin pîlnia 2 în rezervorul 1, pînă ce nivelul de eter astupă rezervorul termometrului 3. Se suflă încet aer prin tubul 7, urmărind cu atenție cele două plăcuțe identice 5 și 6 și se stabilește momentul în care plăcuța 5 s-a aburit. Exact în momentul în care se produce aburirea, se citește temperatura cu ajutorul termometrului 3. Fie această temperatură  $t_1$ . Se lasă să se încălzească rezervorul 1 și se citește temperatura lui  $t_2$ , corespunzătoare momentului în care aburirea dispare de pe plăcuța 5. Se consideră ca temperatură a punctului de rouă  $t_r$  media celor două temperaturi, adică  $t_r = \frac{t_1 + t_2}{2}$ . Teoretic, cele două temperaturi  $t_1$  și  $t_2$  ar trebui să fie egale, în practică însă ele variază cu 1—2°C. Se citește din tabele presiunea actuală a vaporilor corespunzătoare temperaturii de rouă  $t_r$ , precum și presiunea vaporilor saturați corespunzătoare temperaturii camerei. Aceste două valori ale presiunii se introduc în relația (6.3), determinîndu-se umiditatea relativă a aerului.

## 6.5. LICHEFIEREA GAZELOR

a) **Izotermele bioxidului de carbon. Temperatura critică.** În 1869 Andrews a efectuat experiențe devenite clasice, de comprimare izotermă a bioxidului de carbon. Aparatul cu care s-a lucrat este redat schematic în figura II. 6.5. Două tuburi 1 și 2, calibrate, sînt scufundate în apă. Porțiunea  $AB$  a tuburilor este capilară. Tuburile conțin dopurile de mercur 3 și 4. În tubul 1 se află  $\text{CO}_2$ , iar în tubul 2 aer. În partea inferioară a vasului cu apă se află două pistoane, care prin comprimarea apei comprimă și gazele din tuburile capilare. Tubul 2 umplut cu aer servește la măsurarea presiunii. S-a lucrat considerînd aerul ca un gaz perfect. Tubul 2 cu aer este menținut mereu la temperatura camerei, în timp ce tubul cu  $\text{CO}_2$  se aduce la temperatura dorită. Comprimînd  $\text{CO}_2$  la o temperatură suficient de joasă (sub 31,1°C), se obține în diagrama ( $p, V$ ) o izotermă cu aspectul din figura II.6.6. La presiuni joase, comprimarea  $\text{CO}_2$  urmează îndeaproape legea Boyle-Mariotte (capătul dinspre  $G$  al porțiunii  $GA$  a izotermei). Cînd  $\text{CO}_2$  ajunge în starea  $A$ , se observă apariția bioxidului de carbon lichid. În timpul lichefierii, volumul ocupat de gazul  $\text{CO}_2$  scade, dar presiunea rămîne constantă (porțiunea  $AB$  de pe grafic). Comportarea gazului în prezența lichidului care se formează este cea a vaporilor saturați: presiunea la temperatură constantă este independentă de volum (altfel spus, este independentă de raportul maselor de lichid și respectiv de gaz, în echilibru). În starea  $B$ , în tubul 1 se află doar  $\text{CO}_2$  lichid. Comprimarea lichidului se face în continuare cu greutate (porțiunea  $BL$  a izotermei), după cum se știe. Constatăm deci că prin comprimarea izotermă a  $\text{CO}_2$ , s-a realizat lichefierea sa.

În figura II. 6.7 sînt reprezentate izotermele  $\text{CO}_2$  la diferite temperaturi. Cu creșterea temperaturii, se observă micșorarea întinderii porțiunii orizontale

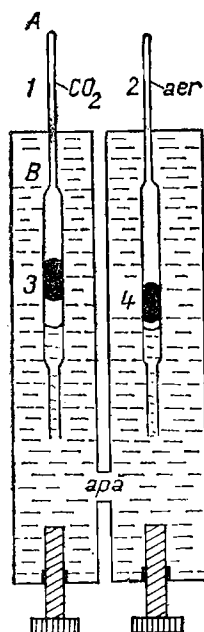


Fig. II.6.5

a izotermei. La izoterma corespunzătoare temperaturii de  $31,1^{\circ}C$ , porțiunea orizontală este înlocuită printr-un punct de inflexiune al curbei, în care tangenta la curbă este paralelă cu axa ordonatelor. La această temperatură de  $31,1^{\circ}C$  toată masa de  $CO_2$  s-a lichefiat deodată. Starea în care acest proces a avut loc este unică între stările bioxidului de carbon și se numește *stare critică*. Temperatura de  $31,1^{\circ}C$  este *temperatura critică* a  $CO_2$ , iar valoarea presiunii stării critice se numește *presiune critică*.

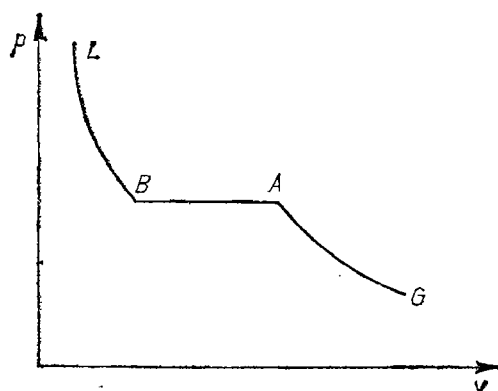


Fig. II.6.6



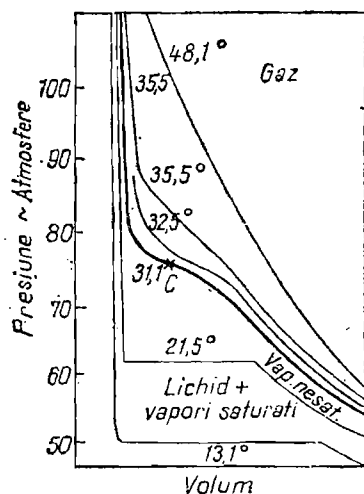


Fig. II.6.7

La temperaturi deasupra temperaturii critice, comprimarea izotermă a  $\text{CO}_2$  nu mai conduce la lichefierea sa. Izotermele se aseamănă tot mai bine, pe măsură ce temperatura este mai ridicată, cu izotermele gazului perfect. Situația de la  $\text{CO}_2$  se întâlnește la orice gaz, valorile critice sînt însă altele.

Temperatura critică este temperatura deasupra căreia este imposibilă lichefierea gazului prin comprimare izotermă. Deasupra temperaturii critice substanța poate exista doar în stare gazoasă.

Unind punctele extreme ale porțiunilor orizontale ale izotermelor de sub temperatura critică, se obține o curbă (fig. II. 6.8) numită *curbă de saturație*,

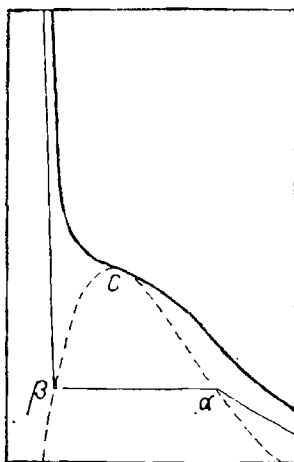


Fig. II.6.8

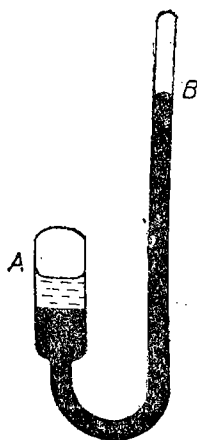


Fig. II.6.9

care are aproximativ forma unui clopot cu vârful în punctul critic. Ramura stîngă a curbei reprezintă stări în care începe vaporizarea, ramura dreaptă stări în care vaporizarea s-a terminat. Stările de sub curbă sînt stări de echilibru vapor-lichid.

Existența stării critice permite să se facă distincția de denumire: *gaz* pentru stări ale substanței situate deasupra temperaturii critice, *vapori* pentru stări ale substanței situate sub temperatura critică. Folosind acest limbaj, vom spune că vaporii pot fi transformați în lichide prin comprimare izotermă, în timp ce gazele nu. În timpul lichefierii izoterme, vaporii sînt saturați.

În starea critică nu există practic deosebire între lichid și vapori: densitatea vaporilor și cea a lichidului coincid, căldura latentă de vaporizare este nulă, tensiunea superficială se anulează. Starea critică a unei substanțe se identifică, de exemplu, tocmai prin dispariția suprafeței de separare dintre lichid și gaz, datorită descreșterii tensiunii superficiale.

Pentru a măsura valoarea presiunii critice, Cagnard de la Tour a construit un aparat ca cel din figura II. 6.9, constituit dintr-un tub de sticlă umplut cu mercur de la *A* la *B*. Deasupra nivelului *A* se află lichidul de studiat și vaporii acestuia, deasupra nivelului *B* se află aer. Presiunea se calculează pe baza volumului ocupat de masa de aer, aplicînd legea gazelor perfecte.

b) **Problema lichefierii gazelor și a obținerii temperaturilor joase.** Majoritatea gazelor (între care azotul, aerul, oxigenul, heliul) au o temperatură critică scăzută. Ca urmare, lichefierea lor necesită o răcire prealabilă. Există diferite metode de coborîre a temperaturii:

— *Realizarea unor amestecuri refrigerente* (vezi § 6.1c).

— *Evaporarea intensivă a unor substanțe* — Kamerling Onnes a realizat o metodă de răcire în trepte, care constă în principiu în următoarele: se lichefiază inițial un gaz, cu temperatură critică nu prea coborîtă, de exemplu  $\text{CO}_2$ ; prin evaporarea forțată a acestuia se obține o temperatură scăzută, la care devine posibilă lichefierea altui gaz, de exemplu oxigenul. Oxigenul lichefiat evaporat intensiv, permite obținerea unei temperaturi la care este posibilă

lichifierea aerului. Continuînd în același mod se poate lichefia hidrogenul. Pe această cale, în 1908, Kamerling Onnes a lichefiat heliul, gazul cu temperatura critică cea mai coborîtă.

— Lichefierea gazelor se face pe cale industrială prin *metoda detentei*, bazată pe proprietatea gazelor de a se răci la destindere bruscă. La temperaturi joase, substanțele au proprietăți diferite de cele cunoscute la temperatura camerei: cauciucul introdus în azot lichid ( $-195^{\circ}\text{C}$ ) își pierde proprietățile elastice, devenind casant, astfel încît poate fi spart cu ciocanul, valoarea conductibilității electrice a rezistențelor crește foarte mult (fenomenul este cunoscut sub denumirea de *supraconductibilitate*), viscozitatea unor lichide devine neglijabilă (fenomenul de *suprafluiditate*). Această comportare deosebită a substanțelor face ca fizica temperaturilor joase să constituie un capitol interesant al fizicii moderne.

Cea mai joasă temperatură obținută este de ordinul milionimilor de grad Kelvin (!).

## 7. Teoria cinetică a gazelor

### 7.1. ECHILIBRU TERMODINAMIC ȘI ECHILIBRU STATISTIC

Toate proprietățile macroscopice ale unui sistem sînt determinate de mișcarea moleculelor din interiorul său. Se poate face un studiu al comportării sistemelor la scară macroscopică, pornind numai de la cunoștințele despre el la scară microscopică: natura componenților și forțele care se exercită între ei. Disciplina fizicii care întreprinde acest studiu este *fizica statistică*. La scară microscopică avem de-a face cu problema a  $N$  molecule ( $N$  — numărul total de molecule din corp), care se mișcă sub influența forțelor dintre ele, deci cu o problemă de mecanică\*. Starea sistemului la scară microscopică se caracterizează printr-un număr uriaș de  $6N$  parametri: pozițiile și vitezele acestor particule la un moment dat. Valorile acestor parametri nu sînt accesibile experienței. De altfel cunoașterea lor nu ar fi folositoare. La scară macroscopică stările de echilibru ale sistemului (le vom numi aici stări de echilibru termodinamic) sînt caracterizate printr-un număr extrem de mic de parametri. Fizica statistică este interesată de corelația dintre parametrii macroscopici și cei microscopici. În legătură cu această corelație este esențial să observăm că în timp ce la scară macroscopică avem echilibru (valorile parametrilor de stare sînt constanți în timp), cei  $6N$  parametri microscopici își schimbă neconținut valoarea, încît unei stări de echilibru termodinamic îi corespund, în general, o infinitate de stări ale sistemului microscopic, dar evident nu orice stări. Rezultă că determinarea proprietăților macroscopice ale unui sistem nu o fac valorile individuale ale parametrilor care caracterizează mișcarea moleculelor. Numai anumite atribute globale ale acestei mișcări au implicații asupra stării macroscopice. Un exemplu în acest sens am întîlnit în § 3.5, unde am reușit să exprimăm presiunea unui gaz perfect prin formula:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (7.1)$$

Presiunea este direct legată de un atribut global al vitezelor moleculelor: de energia cinetică medie a unei molecule. Confruntînd rezultatul (7.1) al teoriei

---

\* Admitem că moleculele se mișcă după legile mecanicii clasice, așa cum se face în fizica statistică clasică. De faptul că moleculele se mișcă după legile mecanicii cuantice se ține seama în fizica statistică cuantică. Multe din rezultatele fizicii statistice clasice sînt înusă corecte.

cinetico-moleculare cu legea Boyle — Mariotte s-a obținut interpretarea cinetico-moleculară a temperaturii:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} kT. \quad (7.2)$$

Acestea sînt rezultate fundamentale ale teoriei cinetice a gazelor. În continuare vom prezenta alte rezultate ale acestei teorii, tot pentru gazul perfect.

Mișcarea moleculelor dintr-un sistem la echilibru termodinamic se deosebește de cea din cazul în care sistemul suferă transformări. Se admite, în cazul echilibrului termodinamic, că, deși fiecare moleculă își schimbă neconținut poziția și viteza, numărul de molecule dintr-un subvolum macroscopic al volumului gazului este mereu același, de asemenea este mereu același numărul de molecule care au viteza într-o vecinătate bine determinată a unei anumite valori  $\vec{v}$ . Atunci cînd aceste condiții sînt îndeplinite de sistemul de molecule în mișcare, se zice că sistemul se află într-o stare de *echilibru statistic*. În condițiile acestui echilibru statistic ne-am plasat atunci cînd am dedus formula (7.1) a presiunii. Valorile parametrilor macroscopici ai sistemului sînt determinate de anumite atribute ale distribuției după poziții și viteze ale moleculelor.

## 7.2. DISTRIBUȚIA MOLECULELOR DUPĂ POZIȚII

Presupunem că gazul de studiat este închis într-un paralelipiped drept, de volum  $V$ . Distribuția după poziții înseamnă clasificarea moleculelor după pozițiile lor. Pentru a o reda, împărțim paralelipipedul care conține gazul în paralelipipe mici, egale, de laturi  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Volumul fiecărui paralelipiped este egal cu  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ , iar numărul de paralelipipe obținute este egal cu  $\frac{V}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ . Fie  $x, y, z$ , coordonatele vîrfului celui mai apropiat de origină al unui asemenea paralelipiped. Informații despre distribuția după poziții ne dau numerele  $\Delta N_{x,y,z}$ , de molecule conținute în fiecare paralelipiped. Evident

$$\sum_{x,y,z} \Delta N_{x,y,z} = N. \quad (7.3)$$

În (7.3) se însumează contribuțiile tuturor paralelipipedelor indexate cu ajutorul coordonatelor  $x, y, z$  ale vîrfului lor cel mai apropiat de origine. Raportul  $\frac{\Delta N_{x,y,z}}{\Delta V}$  dă numărul de molecule pe unitatea de volum în paralelipipedul considerat. Dacă din cele  $N$  molecule,  $\Delta N_{x,y,z}$ , se află la momentul  $t$  în volumul  $\Delta V$ , rezultă că  $\frac{\Delta N_{x,y,z}}{N}$  este tocmai frecvența relativă de gă-

sire a unei molecule în acest volum.  $N$  fiind un număr urias,  $\frac{\Delta N_{x,y,z}}{N}$  este practic egal cu probabilitatea de găsire a unei molecule în  $\Delta V$ . Vom vedea că, deși comportarea individuală a fiecărei molecule nu poate fi prevăzută, probabilitatea de găsire a ei într-un volum  $\Delta V$  din gaz poate fi calculată. Modul descris pentru caracterizarea distribuției după poziții este cu atît mai apropiat de realitate, cu cît paralelipipele considerate sînt mai mici. Dacă luăm

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  infinit mici, atunci și  $\Delta N$  va fi infinit mic. Vom nota cu  $dN$  numărul de molecule dintr-un paralelipiped infinit mic de laturi  $dx, dy, dz$ . Distribuția după poziții este riguros caracterizată prin funcția de distribuție  $\mathfrak{E}(x, y, z)$ , care este prin definiție acea funcție de coordonate care înmulțită cu numărul de molecule din elementul de volum  $dV = dx dy dz$  și cu mărimea acestui element de volum, ne dă numărul de molecule  $dN$  din interiorul lui  $dV$ :

$$dN = N \mathfrak{E}(x, y, z) dV. \quad (7.4)^*$$

Prin trecerea la limită  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , volumul este împărțit într-o infinitate de paralelipede elementare.

Pentru gaz perfect la echilibru, în absența unor forțe externe (de exemplu forța gravitațională), densitatea gazului este peste tot aceeași. Ca urmare,  $\Delta N_{x,y,z}$ , este independent de timp și este egal cu volumul  $\Delta V$  înmulțit cu numărul de molecule din unitatea de volum din gaz:

$$\Delta N_{x,y,z} = \frac{N}{V} \Delta V.$$

Trecând la limită ( $\Delta V \rightarrow 0$ ), se obține:

$$\mathfrak{E}(x, y, z) = \frac{1}{V}. \quad (7.5)$$

$\mathfrak{E}(x, y, z)$  este independentă de timp (această proprietate o are întotdeauna la echilibru), dar și de punct.

### 7.3. DISTRIBUȚIA MAXWELL DUPĂ VITEZE

Distribuția după viteze înseamnă clasificarea moleculelor după viteze. În § 3.5 am arătat cum se face comod această clasificare în spațiul vitezei. Am notat cu  $\Delta N_{\vec{v}}$  numărul de molecule care au vîrf vectorului viteză într-un paralelipiped drept, de laturi  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$  și cu vîrf cel mai apropiat de origine de coordonate  $v_x, v_y, v_z$ . Raportul  $\frac{\Delta N_{\vec{v}}}{N}$  dă frecvența relativă pentru ca o moleculă să aibă vîrf vitezei în interiorul paralelipedului considerat și este foarte apropiată de probabilitatea acestui eveniment. Mărimea  $\frac{\Delta N_{\vec{v}}}{\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z}$  ne dă numărul de puncte din unitatea de volum din spațiul vitezei, în vecinătatea punctului de coordonate  $v_x, v_y, v_z$ . Distribuția după viteze este riguros caracterizată de funcția de distribuție  $g(v_x, v_y, v_z)$  în spațiul vitezei, care se definește la fel ca în cazul distribuției după poziții prin relația:

$$dN_{\vec{v}} = N g(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z, \quad (7.6)$$

unde  $dN_{\vec{v}}$  este numărul de molecule dintr-un paralelipiped drept infinit mic din spațiul vitezei, de laturi  $dv_x, dv_y, dv_z$ .

\* Definiția echivalentă pentru funcția de distribuție este următoarea:

$$\mathfrak{E}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N_{x,y,z}}{N \Delta V}.$$

Funcțiile de distribuție caracterizează statistica unor mărimi care variază continuu, cum este cazul aici, al coordonatelor  $(x, y, z)$  ale moleculei.

La echilibru statistic, funcția  $g(v_x, v_y, v_z)$  este independentă de timp, dar depinde de viteză. Maxwell a dedus expresia acestei funcții pornind de la două ipoteze:

1) *ipoteza independenței legilor de distribuție a diferitelor componente ale vitezei*. Aceasta înseamnă că distribuția după componenta  $v_x$  a vitezei, de exemplu, este independentă de valorile pe care le iau  $v_y$  și  $v_z$ . Ipoteza se traduce prin formula:

$$g(v_x, v_y, v_z) = h(v_x)h(v_y)h(v_z), \quad (7.7)$$

unde  $h$  este o funcție de o singură variabilă, care apare pe rînd cu argumentele  $v_x, v_y, v_z$ .

2) *ipoteza izotropiei distribuției după viteze*. Aceasta înseamnă că distribuția după viteze nu depinde decît de mărimea vitezei:

$$g(v_x, v_y, v_z) = H(v^2). \quad (7.8)$$

Trebuie deci îndeplinită condiția:

$$H(v^2) = h(v_x)h(v_y)h(v_z). \quad (7.9)$$

Notăm  $h(0) = a$  (este o constantă). Făcînd în (7.9)  $v_y = v_z = 0$ , obținem  $H(v_x^2) = h(v_x)a^2$ , deci  $h(v_x) = \frac{H(v_x^2)}{a^2}$ . Procedînd asemănător în raport cu celelalte componente, (7.9) devine:

$$H(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{a^6} H(v_x^2)H(v_y^2)H(v_z^2). \quad (7.10)$$

Soluția unică a acestei ecuații este:

$$H(v^2) = a^3 e^{-\alpha v^2}, \quad (7.11)$$

cu  $\alpha$  constantă. În continuare vom arăta că  $\alpha$  și  $a$  nu sînt independente. Din (7.11) rezultă  $g(v_x, v_y, v_z) = a^3 e^{-\alpha v^2}$  și deci

$$dN_{\vec{v}} = N a^3 e^{-\alpha v^2} dv_x dv_y dv_z \quad (7.12)$$

sau, cu bună aproximație,

$$\Delta N_v = N a^3 e^{-\alpha v^2} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (7.13)$$

cu condiția ca  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$  să fie suficient de mici.

Vom discuta în continuare numai *distribuția după mărimea vitezei*. Să calculăm numărul de molecule care au mărimea vitezei cuprinsă între două valori apropiate  $v, v + \Delta v$ . Acest număr îl vom nota cu  $\Delta N_v$  (deosebirea față de notația precedentă este dată de indicele inferior, care acum nu mai poartă săgeată, fiind vorba de o clasificare după mărimea vitezei:  $\Delta N_{\vec{v}} \neq \Delta N_v$ ). Mărimea  $\Delta N_v$  reprezintă în spațiul vitezei numărul de puncte cuprins între două sfere concentrice de raze  $v, v + \Delta v$ . Datorită izotropiei distribuției după viteze, punctele conținute între aceste sfere sînt uniform distribuite și, ca urmare,

$$\Delta N_v = N a^3 e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 \Delta v, \quad (7.14)$$

unde  $4\pi v^2 \Delta v$  este aproximativ volumul păturii sferice de grosime  $\Delta v$ , considerată anterior, obținut prin înmulțirea suprafeței sferei de rază  $v$  cu grosimea  $\Delta v$  a păturii, presupusă foarte mică. Atunci, pentru  $\Delta v$  infinit mic,

$$dN_v = Na^3 e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 dv. \quad (7.15)$$

Condiția  $\sum_v \Delta N_v = N$  (numărul total de puncte din spațiul vitezei este egal cu numărul  $N$  de molecule al gazului) se scrie cu ajutorul lui  $dN_v$ ,

$$\int_0^\infty dN_v = N. \quad (7.16)$$

Condiția nu poate fi îndeplinită decât dacă  $\alpha > 0$ , altfel integrala din stînga are o valoare infinită. Impunînd această condiție, rezultă:

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}. \quad (7.17)^*$$

Ca urmare,

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 dv. \quad (7.18)$$

Distribuția după viteze este acum exprimată cu ajutorul unui singur parametru  $\alpha$ . Valoarea lui  $\alpha$  o vom obține folosind rezultatul (7.2) — rezultat combinat al teoriei cinetice și al unor cunoștințe despre gazul perfect la scară microscopică. Cunoscînd  $dN_v$  putem calcula  $\bar{v}^2$ :

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 dN_v = \frac{3}{2\alpha}. \quad (7.19)**$$

Impunînd egalitatea (7.2)  $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$ , rezultă

$$\alpha = \frac{m}{2kT}, \quad (7.20)$$

deci

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (7.21)$$

\* Pentru calcul trebuie cunoscut că  $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ . Pentru efectuarea unor calcule ale căror rezultate sînt date în continuare, trebuie cunoscut că  $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^4 dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$ .

\*\* Calculul îl lăsăm în seama cititorului.



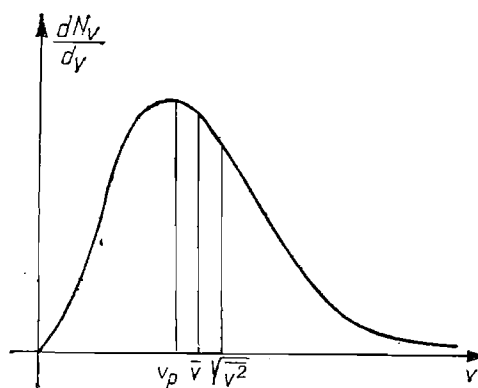


Fig. II.7.1

Formula obținută dă distribuția după viteze a moleculelor dintr-un gaz perfect la echilibru (distribuția Maxwell). Descriem dependența de viteze conținută în formula de mai sus.

La viteze mici, exponențiala este apropiată de valoarea 1 și raportul  $\frac{dN_v}{dv}$  crește cu  $v^2$ . La viteze mari, funcția tinde spre 0. Funcția  $\frac{dN_v}{dv}$  trece obligatoriu printr-un maxim. Graficul ei este redat în figura II. 7.1. Curba de distribuție este asimetrică. Numărul de molecule cu viteze foarte mici sau foarte mari este destul de mic. Abscisa punctului de maxim al funcțiunii are valoarea  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ . Mărimea  $v_p^2$  se numește *viteza cea mai probabilă*. Un calcul simplu ne dă valoarea medie a vitezei:

$$v_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

În fig. II. 7.1. sînt indicate pe abscisă punctele de coordonate  $v_m$ ,  $v_p$  și  $\sqrt{v^2}$ .

#### 7.4. LEGEA ECHIPARTIȚIEI ENERGIEI. PROBLEMA CĂLDURILOR SPECIFICE

Relația  $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$  se poate interpreta astfel: fiecărui grad de libertate al moleculei îi revine, în medie, energia  $\frac{1}{2} kT$ . Acest rezultat constituie *legea echipartiției energiei*\*\*.

\* Și acest calcul îl lăsăm cititorului.

\*\* Interpretarea rezultatului este corectă și se justifică în fizica statistică.

Pe baza formulei precedente, am dedus pentru gazul perfect monoatomic expresia energiei interne,  $U = \frac{3}{2} NkT$ . Dacă admitem legea echipartiției energiei pentru un gaz biatomic, unde fiecare moleculă are cinci grade de libertate (dacă se neglijează mișcarea de vibrație), rezultă pentru energia internă

$$U_{\text{gaz biatomic}} = \frac{5}{2} NkT \quad (7.22)$$

și de aici o expresie pentru căldura specifică la volum constant  $C_V = \frac{5}{2} R$ .

Pe baza relației Mayer se obține  $C_p = \frac{7}{2} R$ , deci  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$ , rezultat în acord cu experiența.

De asemenea, dacă se aplică legea echipartiției energiei pentru un corp solid care are  $3N$  grade de libertate, rezultă

$$U_{\text{corp solid}} = 3NkT \quad (7.23)$$

și deci  $C_V = 3R$ . Cum la solide,  $C_p \cong C_V$ , rezultă justificarea legii empirice a lui Dulong și Petit. Am menționat în § 5.4 că legea lui Dulong și Petit nu este valabilă la orice temperatură și deci acordul între rezultatul fizicii statistice și experiență nu este complet.

## 7.5. DRUM LIBER MEDIU. FASCICULE MOLECULARE

Moleculele unui gaz, după cum am mai arătat, se mișcă continuu și dezordonat. Dacă între molecule nu se exercită forțe de interacțiune, atunci moleculele interacționează numai un timp foarte scurt, cît timp are loc ciocnirea dintre ele. Între două ciocniri, moleculele se mișcă liber, adică uniform și rectiliniu. Spațiul parcurs de o moleculă între două ciocniri se numește *drum liber*. Drumurile libere ale unei molecule, pentru mai multe ciocniri succesive, sînt prezentate în fig. II.7.2. Aceste drumuri libere  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  au lungimi diferite. Se definește *drumul liber mediu*  $\bar{\lambda}$  ca suma tuturor drumurilor libere, străbătute de o moleculă, împărțită la numărul lor.

Dacă o moleculă are viteza medie  $\bar{v}$  și drumul liber mediu  $\bar{\lambda}$ , rezultă imediat că

$$\bar{\lambda} = \bar{v} \bar{\tau} = \frac{\bar{v}}{\bar{\nu}}, \quad (7.24)$$

în care  $\bar{\tau}$  este timpul mediu dintre două ciocniri, iar  $\bar{\nu}$  este numărul mediu de ciocniri din unitatea de timp. Dacă se cunoaște acest număr, atunci se poate determina drumul liber mediu. Pentru a calcula numărul mediu de ciocniri intermoleculare din unitatea de timp, considerăm că toate moleculele sînt fixe, în afară de o singură moleculă care are viteza relativă medie

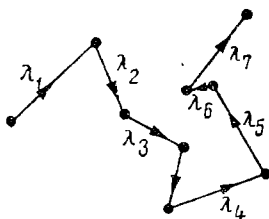


Fig. II.7.2

$\bar{v}$ , față de celelalte\*. Numărul mediu de ciocniri într-o secundă este egal cu numărul de molecule care sînt ciocnite de molecula mobilă (fig. II.7.3), care străbate într-o secundă spațiul  $v_r$ . Toate moleculele care se află într-un cilindru de volum  $\pi\sigma^2\bar{v}_r$  vor fi ciocnite de molecula mobilă care are diametrul  $\sigma$ . Dacă notăm cu  $n$  numărul de molecule din unitatea de volum, atunci în cilindrul de diametru  $\sigma$  și generatoare  $\bar{v}_r$  se găsesc  $\pi\sigma^2\bar{v}_r n$  molecule, număr care este de fapt egal cu numărul mediu de ciocniri  $\bar{v}$ .

Introducînd valoarea lui  $\bar{v}$  în relația (7.24), obținem

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\pi\sigma^2\bar{v}_r n}. \quad (7.25)$$

Folosind distribuția după viteze se poate calcula  $\bar{v}_r$ :

$$\bar{v}_r = \sqrt{2}\bar{v}. \quad (7.26)$$

Relația (7.25) se poate scrie sub forma

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi\sigma^2 n}, \quad (7.27)$$

care reprezintă *formula lui Maxwell* pentru drumul liber mediu al moleculelor

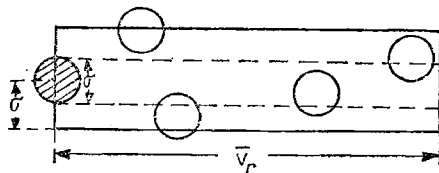


Fig. II.7.3

unui gaz. Din formula fundamentală a teoriei cinetice se știe că  $n = \frac{p}{kT}$ , astfel că în final relația (7.27) devine

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi\sigma^2 p}, \quad (7.28)$$

\*  $\bar{v}_r$  înseamnă valoarea medie a mărimii vitezei relative a două molecule. Pentru două molecule 1 și 2, de viteze  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ , viteza relativă este definită prin:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

adică drumul liber mediu al moleculelor de gaz este direct proporțional cu temperatura și invers proporțional cu presiunea și cu pătratul diametrului molecular  $\sigma$ . În tabelul II.8 sînt date valorile drumului liber mediu, în condiții normale, pentru diverse gaze. Dacă temperatura este constantă, se vede că drumul liber mediu este invers proporțional cu presiunea,  $\bar{\lambda}p = \text{const.}$  Cu cît presiunea unui gaz este mai mică, cu atît drumul liber mediu va fi mai mare, astfel că la presiuni suficient de joase, drumul liber mediu poate avea valori comparabile cu dimensiunile vasului în care se află gazul respectiv. În acest caz, o moleculă poate parcurge tot vasul fără a se ciocni cu o altă moleculă.

TABELUL II.8

Gazul	$\lambda \cdot 10^8 \text{cm}$
Heliu	1,798
Hidrogen	1,123
Argon	0,666
Oxigen	0,642
Azot	0,599

Justețea afirmațiilor făcute pînă acum despre distribuția după viteza moleculelor și mișcarea lor în interiorul unui gaz a fost confirmată de experiențe cu *fascicule moleculare*, adică cu molecule care se mișcă pe traiectorii paralele. Primele experiențe cu particule moleculare au fost realizate de Louis Dunoyer (1911) cu vapori de sodiu. S-a lucrat cu un vas de sticlă împărțit în trei compartimente de pereți despărțitori prevăzuți cu fante (fig. II.7.4). În compartimentul I se află sodiu, care prin încălzire se transformă în vapori de sodiu. În prealabil, presiunea din vasul de sticlă este micșorată, pînă la valoarea pentru care drumul liber mediu al moleculelor de sodiu depășește dimensiunile vasului. Moleculele de sodiu din compartimentul I trec prin fanta  $F_1$  și se răspîndesc în compartimentul II după toate direcțiile. O parte din aceste molecule pot pătrunde și în compartimentul III și anume, acelea a căror direcție de deplasare este paralelă cu pereții laterali ai vasului. Aceste molecule se depun pe peretele  $P$ , care este răcit, formînd un strat vizibil de metal  $O$ . Cu cît fantele  $F_1$  și  $F_2$  sînt mai mici, cu atît pata  $O$  de sodiu depus va fi mai mică. Experiențele cu fascicule moleculare au pus în evi-

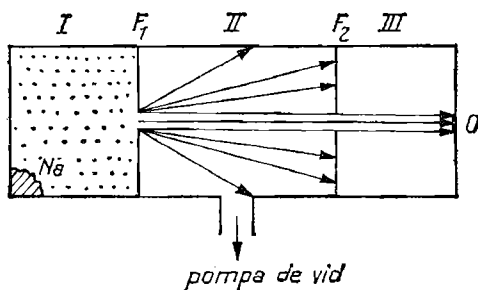


Fig. II.7.4

dență faptul că moleculele se mișcă în toate direcțiile, avînd traiectorii rectilinii, în cazul cînd ele nu se ciocnesc de alte molecule. S-au putut astfel măsura, pentru prima oară, vitezele moleculelor.

## 7.6. FENOMENE DE TRANSPORT

a) **Introducere.** Teoria cinetică a gazelor permite înțelegerea calitativă și, uneori, efectuarea unui studiu cantitativ al stărilor de neechilibru ale gazelor. Este relativ ușor de abordat cazul în care abaterea de la starea de echilibru este foarte mică. Orice sistem izolat aflat într-o stare de neechilibru tinde către o stare de echilibru. Atingerea echilibrului se realizează de la sine, datorită mișcării termice și ciocnirilor moleculare. Pentru mai multă claritate, să considerăm exemplul unui gaz oarecare, închis într-un vas, la temperatura  $T$ . Vasul este despărțit în două compartimente de un ecran care are o fantă mică, însă de dimensiuni mult mai mari decît drumul liber mediu al moleculelor (fig. II.7.5). Într-un compartiment gazul are densitatea  $\rho_1$ , iar în celălalt compartiment, densitatea  $\rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ). Gazul din vas se află astfel într-o stare de neechilibru, deoarece densitatea sa are valori diferite în cele două compartimente. După un anumit interval de timp, sistemul ajunge într-o stare de echilibru, stare în care densitatea are aceeași valoare în tot sistemul. Această stare se realizează datorită mișcării termice: în vas ia naștere un transport ordonat de molecule, din compartimentul cu densitate mai mare în compartimentul cu densitate mai mică, pînă în momentul în care densitatea gazului este peste tot aceeași. Deci trecerea sistemului de la o stare de neechilibru, la o stare de echilibru, se realizează în exemplul considerat prin stabilirea unui transport ordonat de substanță.

În general, se numește *fenomen de transport* fenomenul în care apare un transport ordonat de substanță, de energie sau de impuls, datorită unei neomogenități a densității, a temperaturii, respectiv a vitezelor moleculare. Fenomenele de transport au loc atît la gaze, cît și la lichide sau solide. Dacă considerăm două puncte în care un parametru, de exemplu densitatea, are valori diferite, atunci neomogenitatea este caracterizată cantitativ prin diferența dintre densitățile în cele două puncte, raportată la distanța dintre ele, adică prin mărimea  $\frac{\Delta \rho}{\Delta r}$ .

Fenomenele de transport despre care se va vorbi în continuare sînt *difuzia*, *conductibilitatea termică* și *viscozitatea*. Ele corespund celor trei tipuri de neomogenitate menționate.

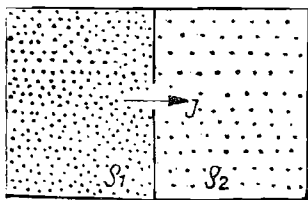


Fig. II.7.5

b) **Difuzia.** Dacă într-un sistem densitatea are valori diferite în două regiuni sau variază continuu de la un punct la altul, atunci va apare o mișcare ordonată de substanță, de la regiunea cu densitate mai mare la regiunea cu densitate mai mică. Fenomenul în care se stabilește un flux de substanță, provocat de neomogenitatea densității se numește *difuzie*. Legătura dintre aceste două mărimi este exprimată de *legea lui Fick* (1855):

$$j = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta r}, \quad (7.29)$$

unde  $j$  este fluxul de substanță, adică masa de gaz care în unitatea de timp străbate perpendicular o suprafață de mărime unitate,  $\Delta \rho / \Delta r$  — neomogenitatea densității pe direcția normalei la suprafața considerată, iar  $D$  — un coeficient de proporționalitate denumit *coeficient de difuzie*.

Din relația (7.29) se vede că coeficientul de difuzie reprezintă masa de gaz care străbate în unitate de timp, perpendicular, o suprafață de mărime unitate, sub acțiunea unei diferențe de densitate, egală cu unitatea, pe unitatea de lungime. Se poate arăta, bazați pe considerente de teorie cinetică, că acest coeficient este direct proporțional cu drumul liber mediu și cu viteza medie a moleculelor. Pentru o temperatură dată, coeficientul de difuzie  $D$  este invers proporțional cu presiunea. Semnul minus din (7.29) arată că fluxul de substanță circulă în sensul descreșterii densității, adică în sensul micșorării cauzei care a provocat fluxul respectiv. Când densitatea devine peste tot aceeași, se anulează și fluxul de substanță.

Din (7.29) rezultă dimensiunile lui  $D$ :  $[D] = \text{L}^2 \text{T}^{-1}$ . Unitățile pentru coeficientul de difuzie  $D$  sînt deci  $[D]_{\text{SI}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  și  $[D]_{\text{CGS}} = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cea mai simplă metodă de măsurare a coeficientului de difuzie la gaze este metoda descrisă de Loschmidt. Dispozitivul experimental este format din două tuburi de sticlă așezate vertical, care pot comunica între ele, avînd lungimea de 5 m și diametrul de 2,6 cm în care se află gazele de studiat. Gazul cu densitate mai mare se introduce în tubul de jos, iar gazul cu densitate mai mică se introduce în tubul de sus, pentru a se reduce influența gravitației. După ce se face legătura între cele două tuburi, gazele încep să difuzeze unul în altul. După un anumit interval de timp, se face analiza chimică a gazelor aflate într-un tub. Cunoșcîndu-se timpul în care a avut loc difuzia, precum și geometria sistemului, se poate determina valoarea lui  $D$ . Coeficientul de difuzie la gaze este de ordinul de mărime  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , iar la lichide de ordinul  $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ .

c) **Conductibilitatea termică.** Dacă temperatura în două regiuni dintr-un sistem este diferită sau dacă variază continuu punct cu punct, atunci apare un flux de căldură de la regiunea cu temperatură mai ridicată către regiunea cu temperatură mai scăzută. Fenomenul se numește *conductibilitate termică*. Relația dintre fluxul de căldură  $q$  și diferența de temperatură  $\Delta T$  care îl provoacă este dată de *legea lui Fourier* (1822)

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta r}, \quad (7.30)$$

în care  $\frac{\Delta T}{\Delta r}$  reprezintă neomogenitatea temperaturii după direcția normalei la suprafața prin care este considerat fluxul, iar  $\kappa$  este un coeficient de propor-

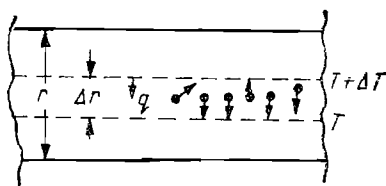


Fig. II.7.6

ționalitate numit *coeficient de conductibilitate termică* sau *conductivitate termică*. Semnul minus din relația precedentă ne arată că transportul de căldură are loc în sensul descreșterii temperaturii.

Din punct de vedere cinetico-molecular, fenomenul de conductibilitate termică se explică astfel: moleculele care au energie cinetică medie de translație mai mare, adică cele aflate la o temperatură mai ridicată, pătrund în regiunea în care moleculele au energie medie de translație mai mică (regiunea cu temperatură mai scăzută), transmitând acestor molecule, prin ciocniri, o parte din energia lor (fig. II.7.6). Și moleculele care au o energie medie de translație mai mică pătrund în regiunea în care această energie este mai mare, preluând prin ciocniri o parte din această energie. În acest fel, regiunea mai caldă se răcește, în timp ce regiunea mai rece se încălzește.

Unitățile de măsură pentru coeficientul de conductibilitate termică sînt

$$[\kappa]_{SI} = \frac{J}{m \cdot s \cdot grad} \text{ și } [\kappa]_{CGS} = \frac{erg}{cm \cdot s \cdot grad}.$$

Coeficientul de conductibilitate termică pentru aer la 0°C are valoarea  $\kappa_{aer} = 2,41 \cdot 10^{-2} J/m \cdot s \cdot grad$ , iar pentru cupru  $\kappa_{cu} = 384,5 J/m \cdot s \cdot grad$ .

d) **Viscozitatea.** Să considerăm un fluid în mișcare, ale cărui straturi se deplasează ordonat cu viteze diferite. După un anumit interval de timp vitezele straturilor se egalizează, fluidul ajungînd într-o stare de echilibru. Din punct de vedere cinetico-molecular, acest lucru se explică prin trecerea atît a moleculelor din straturile cu viteză mai mare în straturile cu viteză mai mică, mărindu-se astfel viteza de deplasare a celor din urmă, cît și a moleculelor din straturile cu viteză mică în straturile cu viteză mai mare, care provoacă micșorarea vitezei de deplasare a acestora. Ca rezultat global apare un transport de impuls de la straturile cu viteze mai mari către straturile cu viteze mai mici (fig. II.7.7).

Fenomenul descris se supune unei legi analoge legii lui Fick sau legii lui Fourier:

$$P = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta r}, \quad (7.31)$$

unde  $P$  este fluxul de impuls,  $\Delta v/\Delta r$  reprezintă neomogenitatea vitezei după

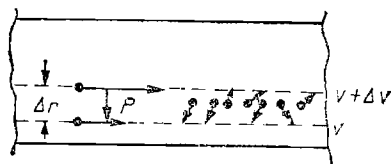


Fig. II.7.7

direcția dată, iar  $\eta$  este un coeficient de proporționalitate numit *coeficient de frecare internă* sau *coeficient de viscozitate*. Semnul minus din relația (7.31) ne arată că fluxul de impuls  $P$  are sensul descreșterii vitezei.

Variația de impuls din unitatea de timp de la un strat la altul ne dă forța de frecare  $F_f$  care acționează între aceste straturi, adică  $F_f = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ . Deoarece fluxul de impuls  $P$  este legat de impulsul  $p$  prin relația  $P = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta s}$ , rezultă că  $P = \frac{F}{\Delta s} f$  și introducând această relație în (7.31) obținem:

$$F_f = -\eta \Delta s \frac{\Delta v}{\Delta r}, \quad (7.32)$$

expresie cunoscută sub denumirea de *legea lui Newton*. Conform acestei legi, forța de frecare care ia naștere între două straturi care au suprafețe egale cu unitatea este proporțională cu variația de viteză pe unitatea de lungime. Unitatea de măsură pentru coeficientul de viscozitate se deduce din (7.32); deoarece  $[\eta] = [F] \text{TL}^{-2}$ , avem  $[\eta]_{\text{SI}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$  și  $[\eta]_{\text{CGS}} = \frac{\text{dyn} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2}$ . Unitatea de măsură în sistemul CGS se numește *poise* și are simbolul  $P$ .

## PROBLEME

1. Între doi stilpi, care se găsesc unul față de altul la distanța de 100 m, este întins perfect un cablu de staniu, la temperatura de 80°C. Pînă la ce temperatură va trebui să se răcească cablul pentru a se rupe, dacă limita de rupere a staniului este  $\sigma_r = 19,6 \text{ N/mm}^2$ , coeficientul termic de dilatare  $\alpha = 21 \cdot 10^{-6} \text{ grd}^{-1}$ , iar modulul lui Young  $E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ . Nu se va lua în considerație greutatea proprie a cablului. Se consideră că pînă în momentul ruperii legea lui Hooke își păstrează valabilitatea.

R:  $t = 48,4^\circ\text{C}$ .

2. La capătul unei sîrme de oțel este prins un corp cu masa de 1 kg. Secțiunea sîrmei este de  $1 \text{ mm}^2$ , iar lungimea ei de 6 m. Temperatura inițială a sîrmei este de 300°C. Prinsă de capătul liber sîrma este învîrtită împreună cu corpul într-un plan orizontal. Cu ce viteză unghiulară trebuie învîrtită sîrma cu corpul, la temperatura de 0°C, pentru ca dilatarea elastică datorită forței centrifuge să poată compensa contractarea termică a sîrmei, dacă se neglijează masa sîrmei. Se dă  $\alpha_{\text{oțel}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ grd}^{-1}$ ,  $E = 22 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

R:  $\omega = 11,4 \text{ s}^{-1}$ .

3. Intervalul de temperatură 100—200°C este măsurat cu ajutorul unui termometru cu rezistență de zinc ( $R_0 = 100 \Omega$  a 100°C). Sensibilitatea termocuplului este de  $50 \mu\text{V/grd}$ , iar coeficientul termic al rezistenței  $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$ . Cu care din termometre se măsoară mai precis intervalul de temperatură considerat, dacă rezistența se măsoară cu o precizie de  $0,1 \Omega$ , iar tensiunea termoelectromotoare cu o precizie de  $0,1 \text{ mV}$ ?

R: Cu termometrul cu rezistență.



4. Într-un calorimetru cu echivalentul în apă de 0,02 kcal/grd se află o bucată de staniu cu masa de 0,02 kg, la temperatura de 10°C. Să se afle ce curent trebuie să treacă prin rezistența unui fierbător pentru ca bucata de staniu să se topească complet în timp de 5 minute, dacă temperatura de topire a staniului este de 232°C, rezistența fierbătorului de 50  $\Omega$ , randamentul său de 0,9, iar viteza de variație a temperaturii datorită pierderilor de căldură 0,4 grd/min.

R:  $I \simeq 1,24$  A.

5. Așezat într-un amestec cu gheață și apă, un termometru indică temperatura de -3°C, iar într-un amestec de apă care fierbe, cu vaporii ei la presiune normală, indică 101,4°C. Ce temperatură va indica acest termometru, dacă se introduce în alcool metilic care fierbe, știind că temperatura lui de fierbere este de 66,9°C?

R:  $t = 67,7^\circ\text{C}$ .

6. Să se afle numărul de curse într-un singur sens, pe care trebuie să le execute pistonul unei pompe de aer cu volumul de 40 cm<sup>3</sup> pentru a umple cu aer o cameră de bicicletă, inițial goală, pînă la o presiune la care suprafața de contact dintre roată și șosea să fie de 60 cm<sup>2</sup>. Greutatea care se exercită pe roată este de 360 N, volumul camerei de 2000 cm<sup>3</sup>, iar presiunea atmosferică de  $9,81 \cdot 10^4$  N/m<sup>2</sup>. Se neglijează rezistența pe care o opune anvelopa.

R:  $n \simeq 80$ .

7. Două incinte de volum  $V_1 = 250$  cm<sup>3</sup> și  $V_2 = 400$  cm<sup>3</sup> sînt termostatate la temperatura constantă de 100°C, respectiv la -20°C, și comunică între ele printr-un tub cu robinet. În incinta 1 presiunea aerului este de 400 torr, iar în incinta 2 de 150 torr. Să se afle masa de aer din fiecare incintă după deschiderea robinetului.

R:  $m_1 = 0,68$  g;  $m_2 = 1,6$  g.

8. Un avion zboară la altitudinea de 10 km. În cabină se menține o presiune constantă egală cu 0,75% din presiunea de la nivelul mării. Să se determine: 1. Ce altitudine corespunde presiunii din cabină? 2. Care este raportul dintre presiunea din interior și cea din exterior, dacă se consideră temperatura medie a atmosferei egală cu 0°C? 3. Care este raportul dintre densitatea aerului din interior și densitatea aerului din exterior, dacă temperatura din cabină este de 20°C, iar temperatura din exterior de -20°C?

R: 1. 2,3 km; 2. 2,62; 3. 2,26.

9. O masă de  $28,028 \cdot 10^2$  kg bioxid de carbon gaz se află la temperatura de 100°C. Să se determine: 1. Volumul gazului în cazul în care presiunea reală calculată din ecuația lui Van der Waals  $p_r$  este egală cu presiunea calculată din ecuația de stare a gazelor ideale  $p_i$ . 2. Raportul dintre presiunile  $p_r/p_i$  în cazurile: a)  $V = 2,84$  m<sup>3</sup> și b)  $V = 4,26 \cdot 10^2$  m<sup>3</sup>. Să se comenteze rezultatele.

R: 1.  $V = 4,26$  m<sup>3</sup>; 2. a)  $p_r/p_i = 19,8$ ; b)  $p_r/p_i = 0,99$ .

10. Un mol de bioxid de carbon primește o cantitate de căldură de 414 cal pentru a se destinde de la un volum de 510 cm<sup>3</sup> la un volum de 910 cm<sup>3</sup>,

la temperatură constantă. Să se determine temperatura gazului, dacă acesta se supune ecuației Van der Waals ( $b = 110 \text{ cm}^3/\text{mol}$ ).

R:  $T = 300^\circ\text{K}$ .

11. Fie un amestec de gaz biatomic cu gaz monoatomic, în proporția 2:1 în greutate. Raportul maselor molare ale gazelor este egal cu 2. Amestecul, al cărui volum inițial este de 1 l, este încălzit izobar la presiunea de  $10 \text{ N/cm}^2$ , până la o temperatură absolută finală egală cu dublul temperaturii absolute inițiale. Să se afle căldura absorbită de amestec în această transformare.

R:  $Q = 72 \text{ cal}$ .

12. Într-un balon sferic cu diametrul de 10 cm se află molecule de aer. Începând cu ce valoare a concentrației moleculelor, ciocnirile dintre acestea devin foarte puțin probabile? Ce presiune corespunde acestei concentrații, dacă temperatura este  $17^\circ\text{C}$ ? Care este densitatea corespunzătoare? Masa molară a aerului este de  $28,9 \text{ kg/mol}$ , iar diametrul molecular  $\sigma = 3 \text{ \AA}$ .

R:  $n = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ;  $p = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ torr}$ ;  $\rho = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ .

13. Un tub capilar este cufundat în poziție verticală într-un vas cu apă. Capătul superior al tubului este închis. Pentru ca nivelul lichidului din tub să coincidă cu nivelul din vas, tubul trebuie să fie introdus în vas cu 1,3% din lungimea lui. Să se determine raza tubului capilar, dacă presiunea atmosferică este de 751 torr, tensiunea superficială a apei de  $72 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ , iar unghiul de udare  $\theta = 0$ .

R:  $r = 0,12 \text{ mm}$ .

14. Să se determine adâncimea unui lac dacă o bulă de aer cu diametrul de 1 mm, care se formează pe fundul lacului, ajunsă la suprafață își mărește diametrul de două ori. Se neglijează variațiile de temperatură ale apei din lac. Presiunea aerului atmosferic este de 760 torr.

R:  $h = 74,58 \text{ m}$ .

15. Să se calculeze viscozitatea unui gaz care umple spațiul dintre doi cilindri coaxiali de raze 5 cm și respectiv 5,2 cm și înalți de 25 cm. Cilindrul exterior se rotește cu 360 rot/min, iar cilindrul interior este menținut fix cu ajutorul unei forțe tangențiale de  $1,38 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ .

R:  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ .

16. O cantitate de 10 grame de oxigen se află la o presiune de 3 atm, la temperatura de  $10^\circ\text{C}$ . După dilatarea oxigenului la presiune constantă, gazul ocupă un volum de 10 l. Să se determine: 1. cantitatea de căldură cedată oxigenului; 2. energia internă a oxigenului, înainte și după încălzire.

R: 1.  $Q = 1940 \text{ cal}$ . 2.  $U_i = 1,8 \cdot 10^3 \text{ J}$ ,  $U_f = 7,8 \cdot 10^3 \text{ J}$ .

17. O cantitate de 2 grame de azot se află la o presiune de 2 atm și la temperatura de  $27^\circ\text{C}$ . După ce gazul se dilată izobar ocupă un volum de 8,2 l. Să se determine cantitatea de căldură cedată gazului pentru a se dilata, variația de energie internă, precum și lucrul mecanic efectuat de gaz prin dilatare.

R:  $Q = 1250 \text{ cal}$ ,  $U = 892,8 \text{ cal}$ ,  $L = 357,2 \text{ cal}$ .

18. Pentru comprimarea izobară a  $0,082 \text{ m}^3$  de oxigen, se consumă un lucru mecanic de  $8310 \text{ J}$ . Apoi sistemul se dilată izoterm la temperatura de  $27^\circ\text{C}$ . Să se determine presiunea finală a oxigenului, dacă lucrul mecanic de comprimare este egal cu lucrul mecanic de destindere izotermă, în condiții normale volumul oxigenului fiind de  $0,224 \text{ m}^3$ .

**R:**  $p = 2,87 \text{ atm}$ .

19. Să se calculeze randamentul unei mașini care lucrează după un ciclu format din două izobare ( $p, 2p$ ) și două izocore ( $V, 2V$ ), dacă substanța de lucru este un gaz perfect.

**R:**  $\eta = \frac{C_p - C_V}{C_V + 2C_p}$ .



**III**

**Electricitate, magnetism  
și elemente de electronică**



# 1. Electrostatica

## 1.1. NOȚIUNEA DE SARCINĂ ELECTRICĂ

a) **Natura electricității.** Mirajul electricității a stîrnit imaginația oamenilor încă din antichitate, din vremea lui Thales din Milet (640—548 î.e.n.) cînd s-a observat că unele corpuri (chihlimbarul, de pildă) după ce sînt frecate cu anumite materiale (stofă, blană de pisică etc.) pot să atragă alte corpuri mai ușoare (firicele de păr, bucățele de pergament etc.). Istoria fizicii ne arată că, în ciuda eforturilor depuse de numeroși oameni de știință, progresele în domeniul explicării naturii electricității s-au lăsat așteptate timp îndelungat. Ele au devenit mai vizibile spre sfîrșitul secolului al XVIII-lea și începutul secolului al XIX-lea, cînd au fost întreprinse experiențe, din ce în ce mai numeroase, mai ingenioase, iar apoi, prin dezvoltarea unei teorii a electricității elaborată pe baza unui aparat matematic din ce în ce mai complex. Teoria electricității macroscopice a fost elaborată abia după conturarea mecanicii și descoperirea calculului diferențial și integral și poate fi socotită încheiată în cursul secolului al XIX-lea. Clarificarea naturii electricității, a agentului microscopic purtător de sarcină electrică, a devenit o realitate la sfîrșitul acestui secol, odată cu semnarea actului de naștere a fizicii atomice. Deși avem de-a face cu o mare întîrziere în timp, vom renunța la expunerea strict istorică utilizînd, acolo unde este cazul, cuceririle fizicii moderne pentru a facilita înțelegerea unor fenomene descoperite cu mult înaintea fondării acesteia.

Revenind la problemele legate de natura electricității, trebuie să reamintim faptul că acțiunile mecanice între corpuri se manifestă fie direct, prin ciocnire, fie la distanță, prin intermediul atracției universale între corpuri. Forța newtoniană care descrie interacțiunea între corpuri este doar o forță de atracție. Ea exprimă matematic legea atracției universale. Din acest punct de vedere, acțiunile mecanice care se exercită între corpurile electrizate posedă o particularitate distinctă: două corpuri încărcate cu același tip de electricitate se resping. Cu alte cuvinte, acțiunile mecanice prin care se manifestă un corp electrizat pot fi nu numai de atracție ci și de respingere.

În limitele unor concepții naive (secolul al XVII-lea), se admitea existența a două fluide, unul pozitiv și altul negativ, care ar conferi corpului electrizat tipul de sarcină. Mai tîrziu, Benjamin Franklin a presupus că electrizarea corpurilor este efectul prezenței sau absenței unui singur fluid. Ciudată ipoteză, dar și mai ciudate erau precizările: prezența unui exces de fluid pe un corp, față de starea normală, conferă corpului o electricitate negativă (ebonita, de exemplu), iar absența lui indică o încărcare cu sarcină electrică pozitivă. Deci se mișcă numai un fluid — fluidul negativ.

Forțele de interacțiune dintre corpurile electrizate sînt dependente de cantitatea de fluid distribuită pe corpuri. Din punct de vedere macroscopic, sarcina electrică a fost divizată, pur și simplu, în *pozitivă* și *negativă*, în mod arbitrar. În plus, Franklin a presupus că, de fapt, fluidul negativ este compus din particule (sic!) încărcate, indicînd astfel, în mod corect, modul de electrizare a sticlei și ebonitei, cu 100 de ani înaintea descoperirii electronului.

Ajunși la acest punct, vom respecta principiul enunțat în legătură cu folosirea unor date din fizica modernă. După cum se știe, atomul a fost și este reprezentat ca cea mai mică parte dintr-un element, care-i mai păstrează caracteristicile chimice. S-a ajuns la această imagine încă de la Democrit considerîndu-se că un element chimic nu poate fi fragmentat la infinit. În mod similar, se poate concepe că o cantitate de electricitate, respectiv o sarcină electrică macroscopică nu poate fi divizată oricît de mult vrem; există și aici o sarcină elementară, care să mai păstreze caracteristicile sarcinii macroscopice. Pentru fluidul negativ, introdus de Franklin, sarcina elementară este cea a electronului, notată cu  $(-e)$ ,  $e > 0$ . În felul acesta, sarcina negativă a unui corp ( $q_-$ ) este reprezentată printr-un număr întreg de sarcini electronice:  $q_- = -Ne$ . În mod neașteptat apărea faptul că și sarcina pozitivă macroscopică are aceeași unitate măsură, adică este tot un multiplu de  $e$ :  $q_+ = N'e$ .

În lumina teoriei structurii atomului, edificiul lui este axat pe existența unei părți centrale grele, încărcată pozitiv — *nucleul*, în jurul căruia se mișcă electroni, la diferite distanțe. Atomul apare neutru deoarece numărul de electroni este egal cu numărul de sarcini pozitive din nucleu. Dacă va fi smuls un electron (poate fi plasat pe un alt corp), atomul rămîne cu o sarcină pozitivă necompensată și deci este încărcat cu  $+e$ . Ipoteza lui Franklin a căpătat astfel o consistență logică: dacă vor fi smulși 2, 3, ...,  $n$  electroni (de pildă prin frecare), un corp se încarcă cu  $-2e$ ,  $-3e$ , ...,  $-ne$  sarcini negative. Se poate spune că sarcina macroscopică posedă proprietatea de *aditivitate*, care are justificarea în raționamentul expus mai sus. Aceasta mai înseamnă că întotdeauna numărul de sarcini luate de pe un corp trebuie să fie egal cu numărul celor transferate pe un alt corp, sau pe un sistem de corpuri. Electronul își poartă sarcina electrică pretutindeni. Nu i se poate lua! Deci sarcina electrică nu poate fi distrusă. Această concluzie stă la baza *legii conservării sarcinii*, care se poate enunța astfel:

*Într-un sistem închis, suma algebrică a sarcinilor electrice rămîne totdeauna constantă.*

În continuare, vom semnală încă două particularități ale sarcinilor elementare. Deși sarcina pozitivă elementară, care se găsește în nucleu (protonul), sau în stare liberă, este egală în valoare absolută cu cea a electronului ( $e_p = e_e$ ), masele celor două particule diferă mult între ele ( $m_p \approx 1840 m_e$ ). Cea de-a doua particularitate este legată de faptul că nu au fost încă descoperite sarcini egale cu fracțiuni de  $e$ , sau cu un număr neîntreg, deși teoreticienii au introdus ipotetic și particule cu sarcini fracționare de  $e$  (*quark*-uri), dar nedescoperite încă.

În concluzie, corpurile încărcate negativ posedă un exces de electroni față de numărul protonilor conținuți în nucleeele substanței, iar cele încărcate pozitiv prezintă un deficit de electroni, adică un număr de protoni necompensați.



Din punctul de vedere al capacității de mișcare există *sarcini libere* și *sarcini legate*. Primele se pot mișca pe spații limitate în solide, lichide și gaze. Dacă numărul de sarcini libere este constant, independent de temperatură, substanța este *conducătoare*. Aceasta este situația metalelor și a majorității aliajelor lor, în care electronii sînt sarcini libere, sau a electrolitelor, în care ionii pozitivi și negativi sînt sarcini libere. Corpurile în care sarcinile electrice sînt legate sînt numite *izolatori*, sau *dielectrici*. Și ei se prezintă în toate stările de agregare. În izolatori, sarcinile sînt legate la nivelul atomului (gazele inerte), al moleculei covalente (de tipul  $H_2$ ,  $O_2$  etc.) sau al moleculei ionice (de tipul  $Na^+Cl^-$ ). În ultimul caz există o distribuție spațială de sarcini pozitive și negative plasate într-o rețea cristalină. Din acest punct de vedere, *semiconductorii* sînt substanțe în care numărul de sarcini libere nu este constant, el depinde de temperatură în felul următor: la  $0^\circ K$  toți electronii sînt legați, dar odată cu creșterea temperaturii o parte din electroni sînt ruși din legăturile de valență formate între atomii solidului respectiv, devenind liberi, astfel încît numărul lor crește.

b) **Distribuția sarcinilor electrice.** Din clasificarea expusă mai sus se poate conchide imediat că există o diferențiere și între modul de plasare al sarcinilor electrice în conductorii și izolatorii solizi, electrizati. În primul caz sarcina electronică în exces se va distribui pe toată suprafața, în timp ce în izolatori nu se va împrăștia, va rămîne localizată și se înmagazinează în adîncime (în volum).

De ce se dispune sarcina negativă în exces pe suprafața metalelor? Iată o întrebare interesantă. Răspunsul este legat de faptul că metalele în stare normală fiind neutre sarcina totală a ionilor pozitivi fixați în nodurile rețelei cristaline este egală cu sarcina electronilor liberi. Depunerea unui exces de sarcină electronică, ar face să apară forțe de repulsie între electroni, forțe dirijate din interior spre exterior, ceea ce duce la expulzarea lor spre suprafață.

Modul diferit de depozitare a electricității a relevat necesitatea descrierii distribuțiilor de sarcină. Se folosește în primul rînd noțiunea de *sarcină punctiformă*,  $Q = \pm Ne$ , cu  $N = 1, 2, \dots$ . Această noțiune constituie o idealizare a realității, căci electronii înșiși au un volum propriu, dar dimensiunile lor sînt incomparabil mai mici decît ale corpurilor macroscopice (raza electronului este  $\approx 10^{-13}$  cm). Sînt utilizate apoi *densitățile de sarcină* pentru a descrie matematic cantitatea de electricitate pe unitatea de volum, de suprafață, de lungime. Astfel sînt definite următoarele densități:

1) *Densitatea de sarcină în volum* ( $\rho_e$ ) este cantitatea de electricitate pe unitatea de volum:

$$\rho_e = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \text{ sau, mai exact, } \rho_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.1)$$

După cum se vede, definiția lui  $\rho_e$  este similară cu definiția densității corpurilor ( $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ ). Dacă avem de-a face cu o distribuție uniformă, atunci sarcina totală este  $Q = \rho_e V$ .

2) *Densitatea superficială* reprezintă cantitatea de electricitate pe unitatea de suprafață:

$$\sigma_e = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \text{ sau, mai riguros, } \sigma_e = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}, \quad (1.2)$$

astfel că în cazul unei distribuții uniforme pe o suprafață, sarcina totală este  $Q = \sigma_e S$ .

3) În sfârșit, definim în mod analog o *densitate liniară* (unidimensională) de sarcină:

$$\zeta_e = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \text{ sau } \zeta_e = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}. \quad (1.3)$$

Să observăm că dacă vrem să calculăm sarcina totală a unei distribuții de  $n$  sarcini punctiforme, trebuie să efectuăm suma algebrică a lor:  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ .

Pentru o distribuție continuă va trebui să sumăm sarcinile din fiecare element de volum, respectiv de suprafață, sau de lungime:  $dQ = \rho_e dV$  ( $dQ = \sigma_e dS$ ,  $dQ = \zeta_e dl$ ). Sumarea aceasta se face prin integrare, iar pentru cele trei cazuri, simbolurile lor sînt reprezentate astfel:

$$Q_{\text{vol}} = \iiint \rho_e dV, \quad Q_{\text{sup}} = \iint \sigma_e dS, \quad Q_{\text{lin}} = \int \zeta_e dl.$$

Numărul de simboluri  $\int$  arată numărul de variabile independente. Legătura între integralele de acest tip și cele cunoscute este destul de complicată, astfel încît toate relațiile care vor fi scrise în continuare se vor referi la distribuții discrete de sarcini.

Legea conservării sarcinii electrice poate fi exprimată acum sub forma cea mai generală, astfel:

$$Q_{\text{punctif}} + Q_{\text{vol}} + Q_{\text{sup}} + Q_{\text{lin}} = \text{const.}, \quad (1.4)$$

sau explicitat,

$$\sum_{i=1}^n q_i + \iiint \rho_e dV + \iint \sigma_e dS + \int \zeta_e dl = \text{const.} \quad (1.4')$$

## 1.2. INTERACȚIUNI ÎNTRE SARCINILE ELECTRICE

a) **Forța coulombiană.** Încă din rîndurile anterioare s-a desprins ideea existenței interacțiunilor între sarcinile electrice, interacțiuni ce se manifestă printr-o acțiune mecanică. De aceea și expresia lor trebuie să țină de natura forței. Într-adevăr, așa se și exprimă: *două sarcini electrice  $q_1$  și  $q_2$  interacționează reciproc (se atrag, sau se resping) cu o forță a cărei valoare absolută  $F$  este proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul*

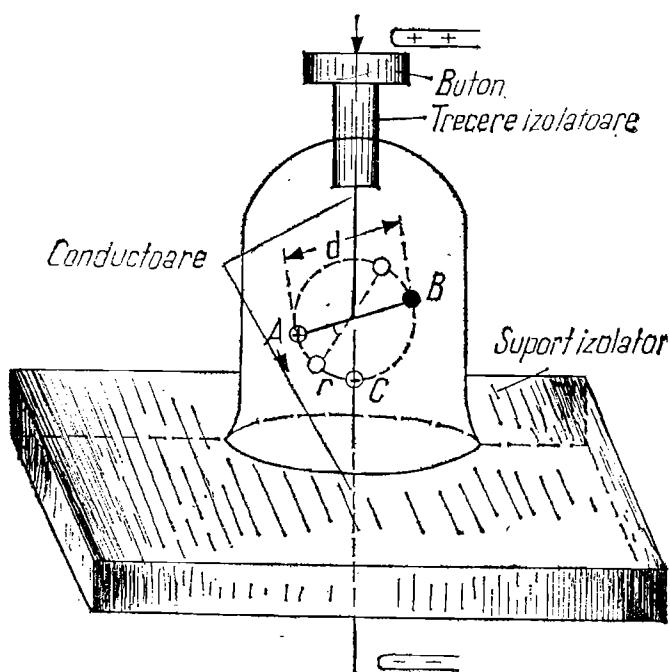


Fig. III.1.1

distanței dintre ele ( $r_{12} = r$ ), iar direcția ei de acțiune coincide cu linia ce unește cele două sarcini.

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.5)$$

Egalitatea se scrie cu ajutorul unei constante de proporționalitate care depinde de mediul în care sînt plasate sarcinile:  $F = \text{const.} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . Aceasta este legea interacțiunii electrostatice sau *legea lui Coulomb*. Verificarea experimentală se poate face cu ajutorul balanței de torsiune a lui Coulomb (fig. III.1.1.), plasată într-un clopot în care este vid de obicei, pentru a înlătura efectul perturbator al curenților de aer. În interior sînt montate în echilibru două sfere mici, de greutate egală, una fiind conductoare (A) și alta, izolatoare (B). Sferele sînt legate la capetele unei tije conductoare, care este suspendată de un buton cu o sîrmă, printr-o trecere practică în sticlă. În partea inferioară există o altă sferă conductoare (C) pe cercul de rază ( $d/2$ ), care este pusă în legătură cu exteriorul printr-o tijă metalică rigidă. Dacă A și C sînt neutre, tija AB se găsește într-o poziție de echilibru. Dacă încercăm sferele A și C cu sarcinile electrice presupuse cunoscute,  $q_A$  și respectiv  $q_C$ , de semn contrar, datorită forței de atracție  $F_{AC}$ , tija AB se rotește cu un unghi ( $\alpha$ ) pînă cînd momentul forței elastice (moment de torsiune sau răsucire) care apare în sîrma de suspensie datorită torsiunii, egalează momentul forței electrice ( $F_{AC} \cdot d/2$ ).

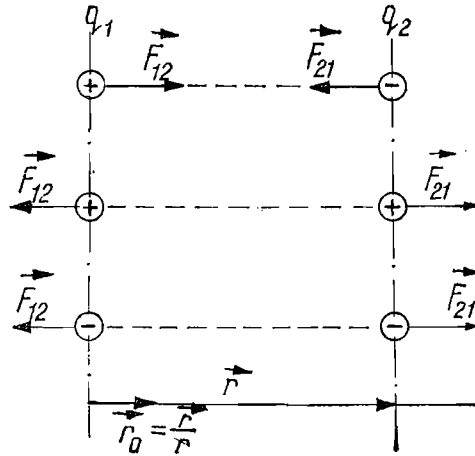


Fig. III.1.2

Se știe că momentul de torsiune  $M_t$ , este proporțional cu unghiul  $\alpha$ ,  $M_t = C\alpha$ ,  $C$  fiind constanta de torsiune a firului, astfel că forța electrostatică are expresia:

$$F_{AC} = \frac{2}{d} C\alpha. \quad (1.6)$$

Constanta  $C$  se obține printr-o etalonare prealabilă a balanței, supunând-o acțiunii unei forțe exterioare cunoscute, tangență la cercul de rază  $d/2$ .

Să revenim acum la expresia forței lui Coulomb. Deoarece forța este o mărime vectorială, o vom scrie folosind versorul direcției  $\vec{r}$  după care este dirijată (fig. III.1.2):  $\vec{r}_0 = \vec{r}/r$ .

Deoarece trebuie respectat principiul al treilea al mecanicii, cu privire la caracterul reciproc al interacțiunilor între două corpuri, este necesară o precizare cu privire la sensul forței coulombiene. Vom nota, în acest scop, cu  $\vec{F}_{ij}$ , forța cu care interacționează sarcina  $j$  asupra sarcinii  $i$ , iar cu  $\vec{F}_{ji}$  — acțiunea reciprocă, astfel încât  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ . Pentru cazul concret din fig. III.1.2, forțele atractive sînt scrise sub forma:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= F_{12}\vec{r}_0 = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \\ \vec{F}_{21} &= -\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

În general vorbind, sarcina  $q_1$  atrage (sau respinge) sarcina  $q_2$  cu aceeași forță cu care sarcina  $q_2$  atrage (sau respinge) sarcina  $q_1$ .

În cazul forțelor repulsive, desenate în aceeași figură, expresiile celor două forțe se schimbă între ele. Formulele (1.7) pot fi transcrise și pentru cazul în care am fixa direcția lui  $\vec{r}_0$  în sens invers. Esențial rămîne faptul că dacă

forța este atractivă, ea este dirijată de la o sarcină spre cealaltă, iar dacă este repulsivă, este dirijată în sens invers.

b) **Sisteme de unități.** Se definește sistemul CGS electrostatic ca fiind sistemul de unități în care constanta din expresia forței are valoarea 1 ( $k = 1$ ) când sarcinile sînt în vid:

$$F_{\text{CGS}}^{(\text{vid})} = \frac{q_1 q_2}{r(\text{cm})^2} \quad (1.8)$$

În sistemul CGS, sarcina electrică poate fi definită cu ajutorul mărimilor mecanice. Ecuația dimensională pentru sarcină poate fi extrasă ușor:

$$[q] = [F^{1/2}][r] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}, \quad (1.9)$$

de unde rezultă definiția pentru unitatea de sarcină electrostatică în acest sistem — stat-coulombul (SC), sau franklinul:

$$1 \text{ SC} = (1 \text{ dyn})^{1/2} \cdot 1 \text{ cm}. \quad (1.9')$$

Se poate preciza această relație în felul următor: *un stat-coulomb (franklin) este mărimea acelei sarcini care plasată în vid la distanța de 1 cm de o sarcină egală cu ea în valoare absolută, interacționează reciproc cu o forță de o dynă.*

Interacțiunea electrostatică este influențată de mediul în care sînt plasate sarcinile (apă, ulei, smoală etc.). S-a constatat experimental că forța de interacțiune într-un mediu este mai mică decît forța exercitată în vid:

$$F_{\text{CGS}}^{(\text{mediu})} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad (1.10)$$

$\epsilon_r$  poartă numele de *permitivitate electrică relativă* (constantă dielectrică) a mediului respectiv și ne arată de cîte ori este mai mare forța de interacțiune electrostatică exercitată în vid în raport cu interacțiunea exercitată într-un mediu oarecare:  $\epsilon_r = F_{\text{CGS}}^{(\text{vid})} / F_{\text{CGS}}^{(\text{mediu})}$ . Această modificare reflectă faptul că interacțiunea electrostatică are loc prin intermediul unui suport material, prin intermediul a „ceva” care este afectat de prezența substanțelor.

În sistemul internațional (SI) de unități, ales ca sistem de bază, constanta de proporționalitate nu mai este adimensională; ea va permite stabilirea legăturii între cele două sisteme de unități. Forța lui Coulomb se scrie acum:

$$F_{\text{SI}}^{(\text{vid})} = k \frac{q_1(\text{C}) q_2(\text{C})}{r(\text{m})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.11)$$

Unitatea de sarcină electrică în SI este coulombul (C):  $1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ SC}$ . Valoarea lui  $k$  se găsește efectuînd trecerea de la (1.8) la (1.11)

$$1 \text{ dyn} = \frac{1 (\text{SC})^2}{1 \text{ cm}^2} = 10^{-5} \text{ N} = k \frac{9^{-1} 10^{-18} \text{ C}^2}{10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2. \quad (1.12)$$

În (1.11) s-a folosit pentru  $k$  forma  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , care este caracteristică sistemului

internațional. Prin analogie cu (1.10),  $\epsilon_0$  este denumit *permitivitatea vidului* și are valoarea  $\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ . Dimensiunile lui  $\epsilon_0$  sînt:

$$[\epsilon_0] = [q]^2[r]^{-2}[F]^{-1} = \text{M}^{-1}\text{L}^{-3}\text{T}^2\text{Q}^2.$$

Produsul  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon$ , poartă numele de *permitivitatea electrică absolută a mediului*, iar forța coulombiană are expresia:

$$F_{\text{SI}}^{(\text{mediu})} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}. \quad (1.11')$$

### 1.3. CÎMPUL ELECTRIC

a) **Generalități.** Descrierea matematică a interacțiunilor electrostatice a implicat introducerea mărimii sarcinii electrice prin intermediul unor mărimi mecanice. Fenomenul însuși este influențat de mediul în care sînt plasate sarcinile, de aceea se poate trage concluzia că el se exercită efectiv printr-o formă a materiei, o formă care nu mai este percepută direct de simțurile noastre. Cu alte cuvinte, o sarcină electrică își exercită acțiunile electrostatice asupra altor sarcini situate în spațiul înconjurător prin intermediul unei stări a materiei, numită *cîmp electric*. Sintetizînd, se poate da următoarea definiție:

*Cîmpul electric este o formă de existență a materiei, prin intermediul căreia sarcinile electrice interacționează între ele. El există independent de existența interacțiunii, ca o consecință a existenței sarcinilor.*

Deoarece sarcinile de mărime diferită interacționează mai puternic sau mai slab, și cîmpul electric creat de ele trebuie să reflecte această calitate. Pentru a caracteriza acest aspect al lui s-a introdus *intensitatea cîmpului electric* ( $\vec{E}$ ). Prin definiție, *intensitatea cîmpului electric este egală cu forța exercitată de un cîmp electric asupra unei sarcini etalon egală cu unitatea*. Este necesar să precizăm că definiția admite o idealizare și anume, aceea că sarcina etalon nu modifică configurația cîmpului electric. Expresia lui  $E$  și ecuația dimensională sînt respectiv

$$E = \frac{F}{q} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q}{r^2}, \quad (1.13)$$

$$[E] = [F] [Q^{-1}] = (\text{MLT}^{-2})(\text{M}^{1/3}\text{L}^{2/3}\text{T}^{-1})^{-1} = \text{M}^{1/3}\text{L}^{-1/3}\text{T}^{-1}. \quad (1.13')$$

Din (1.13) rezultă că dacă două sarcini sînt diferite și intensitățile cîmpului create de ele sînt diferite:

$$F = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^2}, \quad E_1 = \frac{F}{q_2}, \quad E_2 = \frac{F}{q_1} \implies E_1 \neq E_2.$$

Unitățile de măsură pentru intensitatea câmpului electric sînt:

$$[E]_{\text{CGS}} = \frac{\text{dyn}}{\text{SC(fr)}}, [E]_{\text{SI}} = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Alte unități practice vor fi indicate ulterior.

Ca și forța, intensitatea câmpului electric este un vector:

$$\vec{E} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \quad (1.13'')$$

unde  $\vec{r}$  este orientat de la sarcină spre punctul în care dorim să-l aflăm pe  $\vec{E}$

b) **Linia de câmp și principiul superpoziției.** Am considerat pînă acum cazul static al interacțiunilor între sarcini. Dacă vom menține „fixată” sarcina care generează câmpul și vom lăsa liberă sarcina sondă, aceasta din urmă se va mișca pe anumite traiectorii. Aceste traiectorii constituie *liniile câmpului electric*, iar sensul care li se acordă a fost fixat prin convenție ca fiind acela în care s-ar mișca sarcina pozitivă egală cu unitatea. În realitate, mărimea sarcinii sondă contribuie la perturbarea câmpului. Corectă ar fi investigarea cu o sarcină-sondă infinitezimală, adică atunci cînd ar fi îndeplinită relația:

$$E = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta q} = \frac{dF}{dq} \quad (1.14)$$

În experiențe trebuie alese deci sarcini sondă cît mai mici cu putință.

Din convenția aleasă rezultă imediat de ce liniile de câmp ale sarcinilor punctiforme sînt radiale, îndreptate spre sarcina generatoare dacă este negativă, sau dirijate dinspre ea cînd are semnul pozitiv. Ținînd seama de toate acestea, pot fi trasate grafic și liniile ansamblului de două sarcini de același semn, sau de semn contrar, de mărime egală, sau neegală. În fig. III.1.3 sînt prezentate liniile de câmp pentru două sarcini de semn opus, egale (a) și respectiv, neegale (b).

Pentru studierea formei liniilor de câmp indicăm cititorului următoarea experiență. Se presară polen într-un pahar ce conține un lichid dielectric, de pildă apă distilată. Cu ajutorul a două pensete de plastic sînt introduse două sîrme metalice rigide de care sînt suspendate două bile egale, sau neegale. Se încarcă pe rînd bilele, în diverse moduri și se va vedea cum particulele fine de polen se dispun după anumite traiectorii obținîndu-se astfel o vizualizare a liniilor de câmp.

Liniile de câmp sînt descrise de ecuații caracteristice geometriei analitice. După cum s-a arătat și în capitolul consacrat mecanicii, cînd există o mișcare a unui mobil pe o traiectorie, sub acțiunea unei forțe, aceasta din urmă este dirijată după tangenta la traiectorie și are sensul mișcării cînd accelerația este pozitivă. În cazul concret al câmpului electric, vectorul  $\vec{E}$  este di-

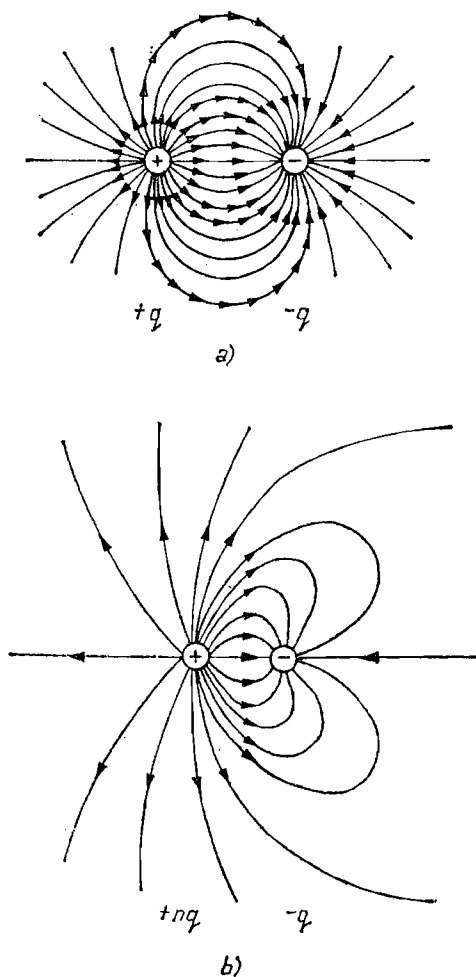


Fig. III.1.3

riajat după tangenta la linia de câmp (fig.III. 1.4). Pentru a găsi ecuația liniei de câmp vom pleca de la scrierea formală a afirmației precedente, adică:

$$\vec{E} = E\vec{t}, \quad (1.15)$$

unde  $E$  este mărimea intensității câmpului, iar  $\vec{t}$  este versorul tangentei.

Cîmpul electric se supune principiului superpoziției (aditivitatea acțiunilor) în sensul că dacă există în spațiu un ansamblu de sarcini electrice punctiforme  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , atunci intensitatea cîmpului rezultat este egală cu suma intensităților cîmpurilor individuale. Dacă ținem seama de faptul că forța cu



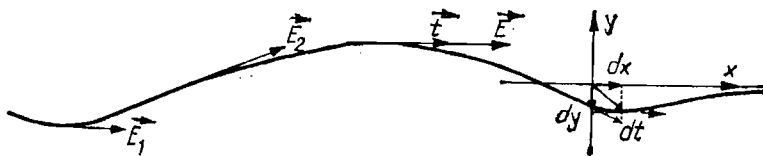


Fig. III.1.4

care interacționează ansamblul de sarcini asupra unei sonde cu sarcina  $q$  este dată de relația:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^n \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i = q \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

rezultă expresia câmpului resultant:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.16)$$

c) **Câmpul electric în zona vîrfurilor.** Numeroase experiențe au arătat că în regiunea vîrfurilor corpurilor conductoare electrizate există o mare concentrație de linii de câmp, că ele sînt deci sediul unor câmpuri electrice foarte intense. O explicație riguroasă este greu de prezentat în paginile de față, dar acest fenomen ar fi înțeles dacă facem o analogie (este drept, destul de forțată) cu acțiunea legii curgerii staționare a unui lichid printr-un tub ce prezintă unele gîtuituri. În zona acestora, viteza curentului este mai mare în raport cu porțiunile cu diametru mare. În cazul vîrfurilor, prezența sarcinilor electrice în porțiunile ascuțite creează o densitate de sarcini, superficială, mai mare decît în porțiunile netede, deci și un câmp electric mai intens. Datorită acestor cîm-

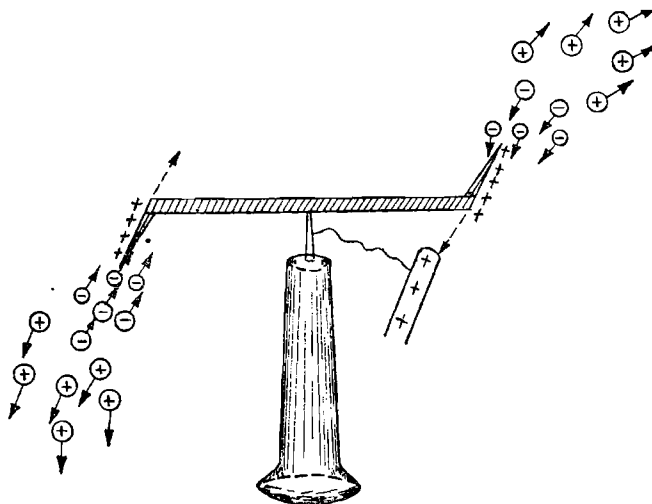


Fig. III.1.5

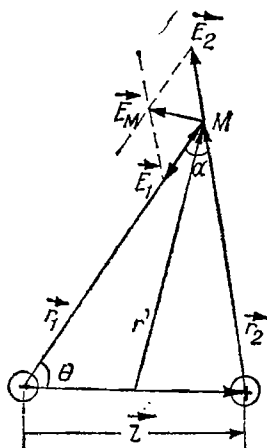


Fig. III.1.6

puri electrice puternice pot fi smulși electroni din moleculele aerului înconjurător și prin vîrfuri se produce o scurgere de electricitate; pe un vîrf vin sau pleacă electronii după cum este încărcat pozitiv, respectiv, negativ. Pe acest principiu poate fi construită o morișcă (fig. III.1.5) dintr-un braț metalic cu două capete ascuțite, ce se poate roti în jurul unui suport izolator. Să încărcăm lama metalică, de exemplu, cu electricitate pozitivă. Din cauza cîmpului puternic la capete, electronii smulși din moleculele aerului se îndreaptă spre morișcă, o lovesc și se depun pe ea. Prin lovire, se transferă aceștia cantitatea de mișcare cîștigată pe spațiul parcurs de la apariția lor și pînă la depunere, astfel că morișca începe să se rotească.

d) **Dipolul electric.** Pentru a exemplifica modul de aplicare al principiului superpoziției vom introduce noțiunea de *dipol electric*, care este un ansamblu de două sarcini electrice punctiforme, egale, dar de semn contrar ( $q$  și  $-q$ ) situate la o distanță mică ( $l$ ) una de alta (fig. III.1.6).

Să calculăm intensitatea cîmpului electric într-un punct  $M$  ( $\vec{E}_M$ ) situat la distanță mare în comparație cu  $l$ . Conform principiului superpoziției, cîmpul va fi dat de:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -q \frac{k}{\epsilon_r} \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right).$$

Dacă introducem următoarele notații:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}, \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{l} \text{ și } r_2^2 = r^2 \left( 1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2l}{r} \cos \theta \right) \simeq r^2 \left( 1 - \frac{2l}{r} \cos \theta \right)$$

în care s-a neglijat termenul  $\left(\frac{l^2}{r^2}\right)$  deoarece  $l \ll r$ , expresia intensității cîmpului electric devine:

$$\vec{E}_M \simeq -q \frac{k}{\epsilon_r} \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} - \vec{l}}{r^3 \left( 1 - \frac{2l}{r} \cos \theta \right)^{3/2}} \right]. \quad (1.17)$$

În continuare, folosim dezvoltarea în serie a fracției ce conține funcția  $\cos \theta$ , limitându-ne la primii doi termeni

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2l}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \simeq 1 + \frac{3l}{r} \cos \theta \quad (\text{vezi p. 862}),$$

astfel că  $\vec{E}_M$  capătă următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \vec{E}_M &\simeq -q \frac{k}{\epsilon_r} \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} - l\vec{l}}{r^3} \left( 1 + \frac{3l}{r} \cos \theta \right) \right] \simeq \\ &\simeq -\frac{k}{\epsilon_r} \left[ \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3r(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \right]. \end{aligned} \quad (1.17')$$

În (1.17') s-a folosit:

$$ql \cos \theta = p \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r},$$

în care  $\vec{p}$  se numește *momentul dipolului*, definit prin analogie cu momentul unui cuplu ( $M = Fd$ ). Momentul dipolului este un vector avînd sensul lui  $\vec{l}$  dirijat de la sarcina negativă spre cea pozitivă. [Pentru deducerea relației (1.17') a fost neglijat și termenul  $\vec{l} \cos \theta / r^4$ ].

În calcule se folosește noțiunea de *dipol punctiform* care reprezintă o idealizare a cazului real în care  $l \rightarrow 0$ , iar  $q \rightarrow \infty$ , astfel încît să existe un  $p \neq 0$  și finit ( $p = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} ql$ ). Pentru acest caz al dipolului punctiform, cînd sarcinile își pierd individualitatea, formula (1.17') este exactă.

c) **Fluxul electric.** Caracterizarea deosebirilor între valorile intensității cîmpului generat de diverse sarcini este reflectată de o mărime care descrie densitatea liniilor de cîmp în diferite puncte ale spațiului. Dacă în calea lor este pusă o suprafață unitate, cîmpul va fi cu atît mai puternic cu cît este mai mare numărul de linii care o străbat. Noțiunea nouă introdusă astfel se numește *flux electric* ( $\Phi$ ) și este definită ca fiind numărul de linii de cîmp ( $N$ ) care străbat o suprafață ( $S$ ) dispusă perpendicular pe direcția cîmpului electric ( $\vec{E}$ ):

$$N = \Phi = ES. \quad (1.18)$$

Să introducem acum noțiunea de suprafață orientată, dată de sensul versorului normalei  $\vec{n}$  (fig. III.1.7a)  $\vec{S} = S\vec{n}$ . Cînd  $\vec{E}$  are același sens cu  $\vec{n}$ , fluxul este pozitiv, iar cînd cei doi vectori sînt dirijați în sens opus, fluxul are semnul minus.

Cînd suprafața este înclinată față de direcția cîmpului astfel că între  $\vec{n}$  și  $\vec{E}$  există unghiul  $\alpha$  (fig. III.1.7), atunci fluxul este calculat fie cu ajutorul proiecției suprafeței pe planul perpendicular pe  $\vec{E}$  ( $S_{\perp} = S \cos \alpha$ ) fie cu proiecția lui  $\vec{E}$  pe direcția normalei la plan ( $E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} = E \cos \alpha$ ):

$$\Phi = ES_{\perp} = ES \cos \alpha = \Phi_{\max} \cos \alpha = E_n S = \vec{E} \cdot \vec{n} S = \vec{E} \cdot \vec{S}. \quad (1.19)$$

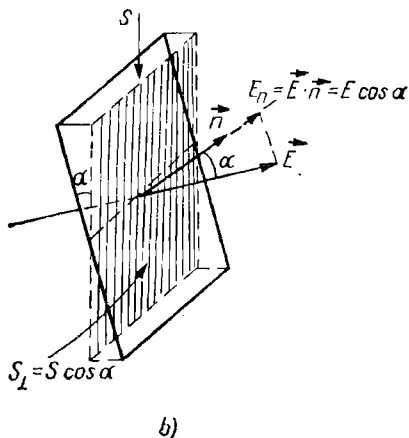
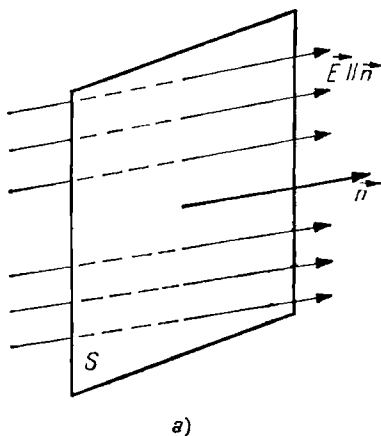


Fig. III.1.7

Se observă deci că fluxul este definit prin produsul scalar dintre intensitatea câmpului și suprafața orientată. În cazul în care suprafața nu este plană (fig. III.1. 8), aceasta este descompusă în suprafețe elementare  $\Delta \vec{S}_i = \Delta \vec{S} n_i$  avînd normalele  $\vec{n}_i$ , astfel că fluxul prin toată suprafața se scrie:

$$\Phi = \sum_i \Delta \Phi_i = \sum_i E n_i \Delta S. \quad (1.20)$$

Să evaluăm acum fluxul unei sarcini punctiforme  $q$  printr-o suprafață sferică de rază  $r$ , cu centrul în punctul unde se află sarcina. Deoarece  $\vec{E}$  este radial și are aceeași valoare în toate punctele suprafeței iar normala în orice punct al unei suprafețe sferice are tot direcția razei:

$$\begin{aligned} \Phi &= ES = E 4\pi r^2 = \\ &= \frac{h}{\epsilon_r} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{h}{\epsilon_r} 4\pi q. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dacă sarcina se află în vid, și lucrăm în SI,  $\Phi_{SI}^{vid} = q/\epsilon_0$ . Relația scrisă presupune distribuția uniformă a sarcinii, iar câmpul posedă o simetrie sferică, adică  $E_n$  este constant în orice punct al suprafeței. Formula dedusă este un caz particular al *teoremei lui Gauss*, care demonstrează că fluxul intensității câmpului printr-o suprafață închisă este egal cu mărimea sarcinii electrice din interiorul ei, înmulțită cu  $\frac{h}{\epsilon_r} 4\pi$ . În virtutea aces-

tei teoreme, fluxul total printr-o suprafață închisă nu depinde de forma suprafeței. Să calculăm acum intensitatea câmpului creat la distanța  $r$  de centrul unei sfere conductoare de rază  $R$ , încărcată cu sarcina  $q$  și aflată în vid (fig. III.1.9). Deoarece distribuția sarcinii este uniformă, intensitatea câmpului pe sfere concentrice cu sfera conductoare are aceeași mărime. Din teorema lui Gauss, obținem pentru  $r > R$ :

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_{SI}^{vid} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.22)$$

Expresia ne arată un rezultat, care ar fi obținut dacă toată sarcina ar fi concentrată în centru. Dacă  $r < R$ , fluxul este zero, deoarece sarcina este

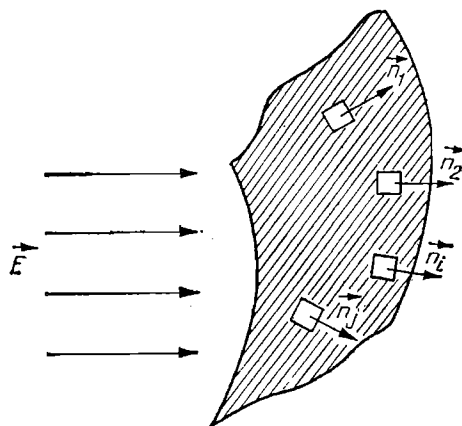


Fig. III.1.8

situată în exteriorul suprafeței, deci și câmpul electric este nul:  $E_{int} = 0$ . Am obținut astfel o consecință foarte importantă și anume faptul că în interiorul unei sfere conductoare încărcate, câmpul electric este nul. Dependența lui  $E$  de distanța de la centrul sferei este redată în fig. III.1.9. Această depen-

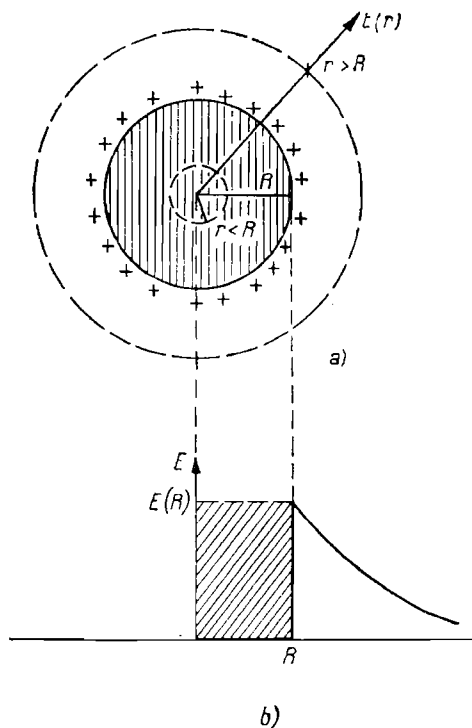


Fig. III.1.9

dență, pentru  $r > R$  este analogă celei obținute pentru intensitatea câmpului creat de o sarcină punctiformă. Faptul că în interior intensitatea câmpului este nulă sugerează impresia că sfera ar acționa ca un ecran pentru interiorul ei. În realitate, intensitatea nulă înseamnă potențial constant. Pentru a acționa ca un ecran („cușcă” Faraday), sfera trebuie pusă la „pământ” pentru a nu se acumula sarcini pe suprafața ei.

#### 1.4. POTENȚIALUL CÂMPULUI ELECTROSTATIC

a) **Definiția potențialului.** După cum am văzut, o sarcină sondă ( $q$ ), se poate mișca în câmpul creat de o altă sarcină ( $Q$ ). Dacă dorim să îndepărtăm sonda de sarcina  $Q$ , atunci când sarcinile au același semn, câmpul exercită un lucru mecanic, deci își micșorează energia totală, iar dacă au semne contrarii, lucrul mecanic este consumat din exterior pentru învingerea forței de atracție exercitată prin intermediul câmpului.

Să considerăm o situație de tipul celei din fig. III.1.10 în care sarcina  $Q$  este fixată, iar sarcina  $q$  este deplasată pe distanța  $\Delta r = r_2 - r_1$ . Lucrul mecanic consumat se poate scrie ca în mecanică, dar forța nefiind constantă [ $F_1 = F(r_1) \neq F(r_2) = F_2$ ], se utilizează o forță medie ( $F_m$ ). Deoarece forța lui Coulomb nu variază proporțional cu distanța, ci invers proporțional cu pătratul ei, se utilizează media geometrică:

$$F_m = \sqrt{F_1 F_2} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Qq}{r_1 r_2}, \quad (1.23)$$

astfel că lucrul mecanic  $\mathcal{E}_{12}$  devine:

$$\mathcal{E}_{12} = F_m(r_2 - r_1) = \frac{k}{\epsilon_r} Qq \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

de unde rezultă:

$$\frac{\mathcal{E}_{12}}{q} = \frac{k}{\epsilon_r} Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.24)$$

Atunci când punctul  $P_2$  este situat la infinit, lucrul mecanic pentru deplasarea unității de sarcină devine:

$$\frac{\mathcal{E}_{1\infty}}{q} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q}{r_1} = V_1. \quad (1.25)$$

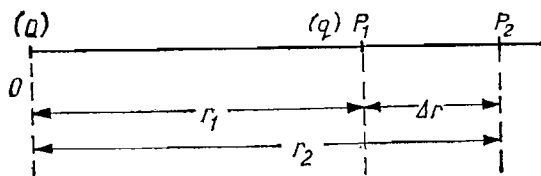


Fig. III.1.10

$V_1$  poartă numele de *potențial al câmpului electrostatic* creat de sarcina  $Q$  în punctul  $P_1(r_1)$  și este egal cu lucrul mecanic consumat pentru a deplasa sarcina electrică pozitivă egală cu unitatea, din acel punct la infinit.

Denumirea de potențial este justificată de faptul că deoarece câmpul electric poate face această deplasare, el dispune de posibilitatea de a efectua un lucru mecanic, conform definiției energiei potențiale.

Aceeași formulă se poate deduce pornind și de la expresia diferențială a lucrului mecanic pentru deplasarea rectilinie, în lungul unei direcții care trece prin sarcina care generează câmpul:

$$d\mathcal{E} = Fdr \Rightarrow \mathcal{E}_{12} = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \frac{kQq}{\varepsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{\varepsilon_r} Qq \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Expresia lui  $V_1$  în sistemul SI este dată de:

$$V_{SI} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r} \text{ cu } [V] = \frac{[\mathcal{E}]}{[q]} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}. \quad (1.26)$$

Unitățile de măsură sînt: în CGS — *stat-voltul*, care reprezintă potențialul într-un punct, atunci cînd se consumă un lucru mecanic de un erg pentru a deplasa din acel punct la infinit, o sarcină de un stat-coulomb ( $1SV = \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ sc}}$ ); în sistemul SI unitatea este *voltul*, care reprezintă potențialul atunci cînd se consumă un lucru mecanic de 1 joule pentru a deplasa sarcina de 1 coulomb din acel punct la infinit:

$$1V = \frac{1J}{1C} = \frac{1}{300} SV.$$

Este interesant de reținut că unitatea din SI este mai mică decît cea din sistemul CGS.

O altă consecință poate fi extrasă din definiția potențialului, și anume, mărimea lucrului mecanic consumat pentru a deplasa o sarcină  $q$  între două puncte caracterizate de potențialele  $V_1$  și  $V_2$  este egală cu:

$$\mathcal{E}_{12} = q(V_1 - V_2) = q\Delta V = qU, \quad (1.27)$$

în care  $\Delta V$  definește diferența de potențial dintre cele două puncte ale câmpului, sau *tensiunea electrică*. Dacă  $\mathcal{E} = 0$ , înseamnă că  $V_1 = V_2$ . Deci pentru deplasarea sarcinii între aceste două puncte, lucrul mecanic este zero. O astfel de situație poate fi comparată cu echilibrul instabil din mecanică al unei sfere puse pe o suprafață plană. Dacă am presupune un caz ideal, în care nu avem frecare, atunci pentru menținerea vitezei constante pe suprafața plană nu am cheltui lucru mecanic, indiferent de traiectoria pe care s-ar mișca. Revenind la cazul nostru, vom defini locul geometric al punctelor pentru care potențialul este constant *suprafață echipotențială*. Vă oferim două exemple de suprafețe echipotențiale, pe care dv. le puteți desena cu ușurință: a) pentru câmpul creat de o sarcină punctiformă, descris de linii radiale, suprafețele echipotențiale sînt sfere concentrice; b) pentru câmpul creat de un plan infinit, încărcat uniform, ale cărui linii sînt perpendiculare pe plan, suprafețele echipotențiale sînt plane paralele cu planul încărcat.

b) **Deducerea câmpului din potențial.** Din compararea formulelor:

$$E(r) = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \text{ și } V(r) = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{Q}{r},$$

rezultă legătura dimensională între  $E$  și  $V$ :

$$E = \frac{V}{r} \text{ și } [E] = [V]L^{-1}, \quad (1.28)$$

de unde unitatea utilizată mai frecvent pentru câmp: voltul pe metru (V/m). Deseori este utilizată o unitate hibridă, voltul pe centimetru (V/cm).

Relația (1.28) este corectă pentru sarcini punctiforme. Dacă există un câmp a cărui intensitate este constantă și dirijată după o direcție (de exemplu după  $Ox$ ), atunci legătura dintre  $V$  și  $E$  este

$$V = Ex. \quad (1.28')$$

Legătura dintre  $V$  și  $E$  poate fi scrisă și sub forma

$$E(r) = -\frac{k}{\epsilon_r} Q \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}. \quad (1.29)$$

Deși (1.29) a fost dedusă pentru o sarcină punctiformă, se poate arăta că ea rămâne valabilă pentru orice distribuție de sarcini care admite un potențial ce nu depinde de coordonatele  $x, y, z$  în mod independent, ci doar de distanța de la un punct ales ca origine, pînă la punctul în care se face calculul, adică de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Plecînd tot de la acest caz particular, putem scrie relația dintre  $\vec{E}$  și  $V$ , într-o formă mai generală, valabilă și în cazul în care  $V$  depinde de fiecare din variabile în mod independent. Pentru aceasta, vom scrie vectorul  $\vec{E}$  în coordonate carteziene:

$$\vec{E} = \vec{E}_x i + \vec{E}_y j + \vec{E}_z k \text{ cu } E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \quad (1.30)$$

Pentru simplificare, vom lucra în vid, folosind sistemul SI. Vom scrie la început proiecțiile  $E_x, E_y, E_z$  cu ajutorul cosinuşilor directori (fig. III.1.11):

$$\cos \alpha = \cos(\vec{E}, Ox), \cos \beta = \cos(\vec{E}, Oy), \cos \gamma = \cos(\vec{E}, Oz):$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E \cos \alpha = E \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{x}{r} \\ E_y &= E \cos \beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{y}{r} \\ E_z &= E \cos \gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{z}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$



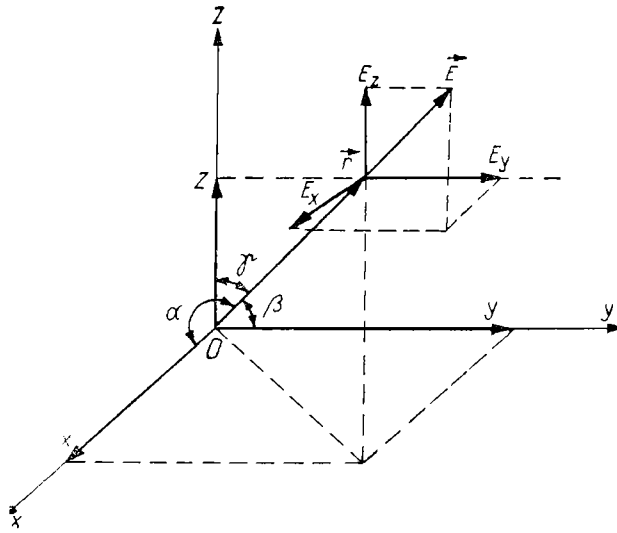


Fig. III.1.11

Ținînd seama că  $V(r) = \frac{Q}{r}$ , iar  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , se obțin proiecțiile intensității câmpului prin derivare, avînd grijă ca la derivata în raport cu o variabilă, celelalte să fie menținute constante, simbolul de derivare fiind luat  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (1.32)$$

iar intensitatea câmpului are expresia:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } V. \quad (1.32')$$

Se poate arăta că relațiile de mai sus sînt valabile și în cazul cel mai general, cînd distribuția de sarcină admite un potențial care depinde explicit de fiecare din cele trei coordonate. Dacă potențialul distribuției de sarcini depinde de o singură variabilă, de exemplu de  $x$ , atunci  $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$  și  $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} = -\frac{dV}{dx} \vec{i}$ . Expresia rezultată ne indică reducerea gradientului la derivata după o direcție.

Legătura dintre  $E$  și  $V$ , stabilită prin (1.29) respectiv (1.32') ne arată în ce mod *cîmpul derivă din potențial*.

O altă caracteristică esențială a cîmpului electric o constituie *acțiunea sa conservativă*. Pentru a facilita înțelegerea ei să revenim la mișcarea sarcinii  $q$  în cîmpul sarcinii  $Q$ , între punctele  $P_1(r_1)$  și  $P_n(r_n)$ , dar urmînd o curbă ab-

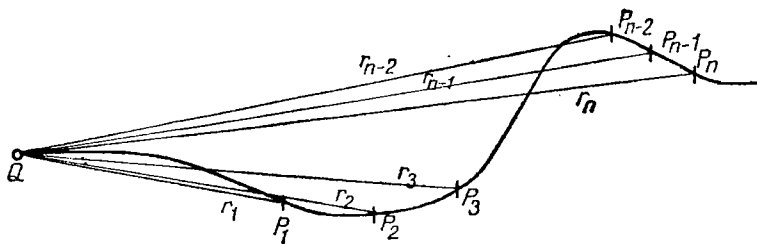


Fig. III.1.12

solut arbitrară (fig. III.1.12), trecînd prile punctele  $P_2, P_3, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}$ , foarte apropiate, astfel că lucrul mecanic pentru a deplasa sarcina  $q$  de la  $P_1$  la  $P_n$ ,  $\mathcal{E}_{1n}$ , este o sumă a lucrurilor mecanice efectuate între punctele  $P_1P_2, P_2P_3, \dots$ , adică:

$$\mathcal{E}_{1n} = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{23} + \dots + \mathcal{E}_{n-1,n} = q[V_1 - V_2 + V_2 - V_3 + \dots + V_{n-1} - V_n] = q(V_1 - V_n),$$

deci

$$V_1 - V_n = U_{1n} = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n-3,n-2} + U_{n-2,n-1} + \\ + U_{n-1,n} = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i,i+1}.$$

Expresia scrisă ne arată două lucruri. În primul rînd, diferența de potențial între două puncte ale cîmpului poate fi scrisă ca o sumă de diferențe de potențial între punctele succesive situate pe o curbă arbitrară. În al doilea rînd, ea nu depinde decît de poziția capetelor, poziția inițială ( $r_i$ ) și finală ( $r_f$ ). Deci

$$\frac{\mathcal{E}_{if}}{q} = V_i - V_f. \quad (1.33)$$

Atunci cînd cele două poziții coincid, adică sarcina a parcurs o traiectorie închisă,  $\frac{\mathcal{E}_{if}}{q} = 0$ , pentru că  $V_i = V_f$ .

Deci, dacă este parcursă o curbă închisă, lucrul mecanic total este zero. Aceasta reprezintă acțiunea conservativă a cîmpului, în sensul că, pe un astfel de drum închis, lucrul mecanic total fiind zero, energia consumată din exterior pentru a deplasa sarcina împotriva forțelor cîmpului este egală cu energia eliberată atunci cînd forțele cîmpului efectuează lucru mecanic.

c) **Principiul superpoziției** este folosit în calculul potențialului cîmpului creat de o distribuție de sarcini. Discuția noastră se va limita la un ansamblu de sarcini punctiforme  $q_1, \dots, q_n$ , plasate la distanțele  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de punctul în care calculăm potențialul rezultat. Potențialul poate fi calculat ținînd seama de faptul că sarcina unitate se va găsi sub acțiunea independentă a forțelor electrostatice exercitate prin intermediul cîmpurilor create de  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , se va găsi, deci, sub acțiunea unui cîmp rezultat

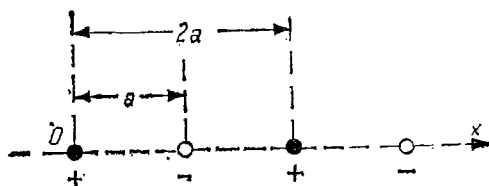


Fig. III.1.13

$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$ . Dacă potențialul câmpului creat de sarcina  $q_i$  este  $V_i$ , atunci po-

tențialul câmpului rezultat este

$$V = \sum_{i=1}^n V_i.$$

Se obține astfel potențialul rezultat, ca fiind suma potențialelor câmpurilor generate de cele  $n$  sarcini, ca și cum acestea ar fi independente una de alta.

Principiul superpoziției ilustrat aici, servește la calcularea energiei de coeziune a cristalelor ionice, cum ar fi cele de tipul  $Na^+Cl^-$ . În rețeaua cristalină, fiecare ion este „cufundat” în câmpul electric creat de ceilalți  $(N-1)$  ioni. Energia de legătură a unui ion este egală cu sarcina lui înmulțită cu potențialul câmpului electric creat de restul ionilor. Acesta este *potențialul Madelung*. Ne putem forma o idee despre metodica de calcul prin evaluarea potențialului câmpului electric creat de un lanț infinit de ioni de două tipuri de sarcină,  $+q$  și respectiv  $-q$ , egal distanțați cu distanța  $a$  (fig. III.1.13). Potențialul calculat, într-un punct cu un ion negativ al lanțului ales ca origine, este dat de:

$$\begin{aligned} V(0) &= 2 \frac{k}{\epsilon_r} \left( \frac{q}{a} - \frac{q}{2a} + \frac{q}{3a} - \dots - \frac{q}{2i} + \frac{q}{2i+1} - \dots \right) = \\ &= 2 \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q}{a} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2i} + \frac{1}{2i+1} - \dots \right) \end{aligned}$$

(cifra 2 apare din considerarea interacțiunii ionului, luat ca origine, cu perechi-le de ioni vecini).

Se poate arăta că, în cazul în care numărul  $i$  de ioni din lanțisor este suficient de mare, expresia dintre paranteze poate fi aproximată prin  $\ln 2$ , de unde rezultă că

$$V(0) \simeq \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q}{a} 2 \ln 2. \quad (1.34)$$

Acest caz constituie o simplificare, deoarece sumele ce trebuie efectuate pentru rețelele cristaline în spațiul cu trei dimensiuni sînt foarte complicate și de aceea se utilizează metode speciale de calcul.

## 1.5. MECANISME DE ELECTRIZARE. MĂRIMI CARACTERISTICE

a) **Metode experimentale.** Antichitatea cunoștea doar două moduri de electrizare: 1) electrizarea prin frecare descrisă de Thales din Milet (sec. VII î.e.n.) și care a determinat construirea primei mașini de electrizare de către Otto von Guericke (sec. XVII e.n.); 2) vechii hinduși cunoșteau proprietatea de electrizare a unor cristale (ca turmalina) în urma încălzirii, azi denumită *piro-electricitate*, studiată ulterior și de A.C. Becquerel. După secolul al XVIII-lea au mai fost găsite și alte moduri de electrizare: 3) electrizarea prin contact; 4) electrizarea prin influență; 5) electrizarea norilor (proces extrem de complex).

Au fost descoperite ulterior și alte mecanisme de obținere a electricității, pe care le prezentăm: 1) pila Volta (1800); 2) termoelectricitatea (Seebeck — 1821); 3) inducția electromagnetică (Faraday — 1831); 4) pile fotovoltaice (A.C. Becquerel — 1839); 5) piezoelectricitatea (Jacques și Pierre Curie — 1880); 6) razele catodice, (Hittorf — 1869); 7) emisia termoelectrică, descoperită de Edison (1884); 8) fotoelectricitatea (H. Hertz — 1887); 9) radioactivitatea (emisia  $\beta$ , Pierre și Marie Curie — 1898); 10) emisia electronică în urma unor reacții chimice violente (F. Haber — 1909).

Nu vom referi, în continuare, numai la electrizarea prin frecare, contact și influență. Prin frecarea a două substanțe, este posibil ca electronii de valență ai atomilor unei substanțe să fie rupți din legăturile lor și să treacă pe cealaltă. Nu este prea ușor de stabilit mecanismul intim care are loc la frecare, deoarece este greu de crezut că o simplă activitate mecanică ar duce la ionizare. Este posibil să avem de-a face mai degrabă cu o ionizare termică produsă de căldura ce se degajă prin frecare. Nu trebuie neglijat însă și tipul substanțelor care intră în joc: unele au o afinitate mai mare pentru electroni, altele au o afinitate mai mică. Este evident că cele din prima categorie vor accepta parte din electronii cedați de cele din categoria a doua și corpurile se vor încărca în mod egal cu aceeași cantitate de electricitate.

Sînt de reținut unele proprietăți și observații referitoare la producerea electricității prin frecare: 1) cînd se freacă doi dielectrici, corpul cu constantă dielectrică mai mare se încarcă cu electricitate pozitivă; 2) metalele nu se electrizează ci preiau o parte din electricitatea dielectricilor de care s-au frecat; pot fi reținute sarcinile dacă sînt terminați cu izolatori; 3) nici fenomenul de ionizare, nici cel de emisie termoelectronică (prin încălzire), nici emisia la rece, nu explică corect și complet electrizarea prin frecare; 4) este un fenomen superficial (de suprafață); 5) la frecare, electrizarea crește cu creșterea suprafeței lor specifice; de aceea pulberile se electrizează foarte ușor, la fel ca și peliculele. În urma acestor constatări pare plauzibilă ipoteza că la frecare se rup o serie de atomi de pe un corp și trec pe altul. În acest proces, atomii pot trece fie în stare neutră, fie încărcăți pozitiv. Acest lucru nu înseamnă că dacă suprafețele sînt mai rugoase se electrizează mai bine. Totul este să treacă cu o sarcină electrică netă. Iată cum un fenomen cunoscut de atîta vreme nu este clarificat pe deplin nici astăzi!

Electrizarea prin contact are loc la contactul a doi sau mai mulți conducători aflați la potențiale diferite; unii dintre ei pot chiar să fie neutri înaintea contactului. Trebuie precizat că trecerea sarcinilor la contactul a două corpuri are loc numai cînd potențialele sînt diferite și că această trecere

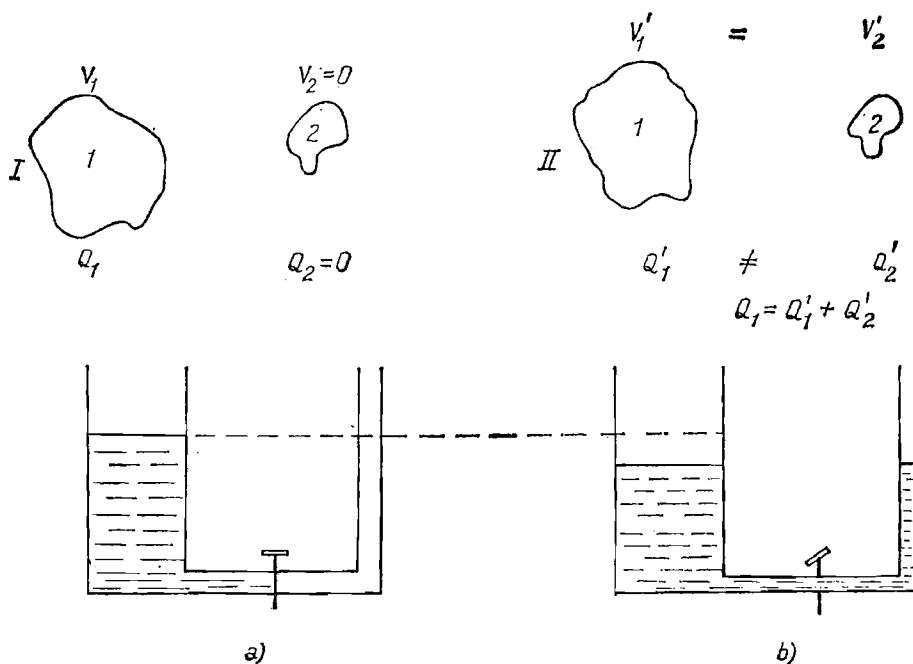


Fig. III.1.14

continuă pînă cînd se egalează cele două potențiale. În momentul egalării, nu mai poate fi efectuat un lucru mecanic și deplasarea globală de sarcină încetează. Electrizarea prin contact poate fi înțeleasă mai bine dacă se compară starea celor două corpuri, unul încărcat la început, și celălalt neutru ( $V = 0$ ;  $Q = 0$ ), cu două vase, unul avînd apă, celălalt fiind gol, care comunică printr-un robinet montat pe linia de legătură (fig. III.1.14a). Starea electrică a corpurilor după contact este comparată cu poziția apei după deschiderea robinetului (fig. III.1.14b).

În sfîrșit, electrizarea prin influență are loc la apropierea unui corp încărcat (C) de unul neutru. La capătul corpului neutru, mai apropiat de cel electrizat, va apare electricitate de semn opus, iar la capătul mai depărtat, va apare electricitate de același semn și în aceeași cantitate cu cea acumulată la prima extremitate. Electrizarea prin influență prezintă însă o deosebire în funcție de corpul studiat. Dacă este vorba de un conductor, de pildă, o sferă metalică, atunci are loc o deplasare de electroni (vezi, de exemplu, fig. III.1.15a) spre o extremitate, rămînînd necompensați un număr egal de ioni pozitivi la extremitatea opusă. Cînd se atinge sfera cu degetul, sau se leagă la pămînt, se scurg sarcinile de același semn cu cea a corpului încărcat (C) dacă semnul este negativ, dar vin electroni din „pămînt” dacă semnul este pozitiv și sfera rămîne încărcată, chiar după îndepărtarea corpului care a produs influența. În cazul dielectricului, electrizarea are loc din aproape în aproape prin fenomenul de *polarizare*. Deoarece nu există sarcini libere, atunci va apare în fața lui C un strat de sarcini de semn opus, apoi unul de același semn, ș.a.m.d. pînă la extremitatea opusă. Și aici, cele două extremități vor fi electrizate, ca

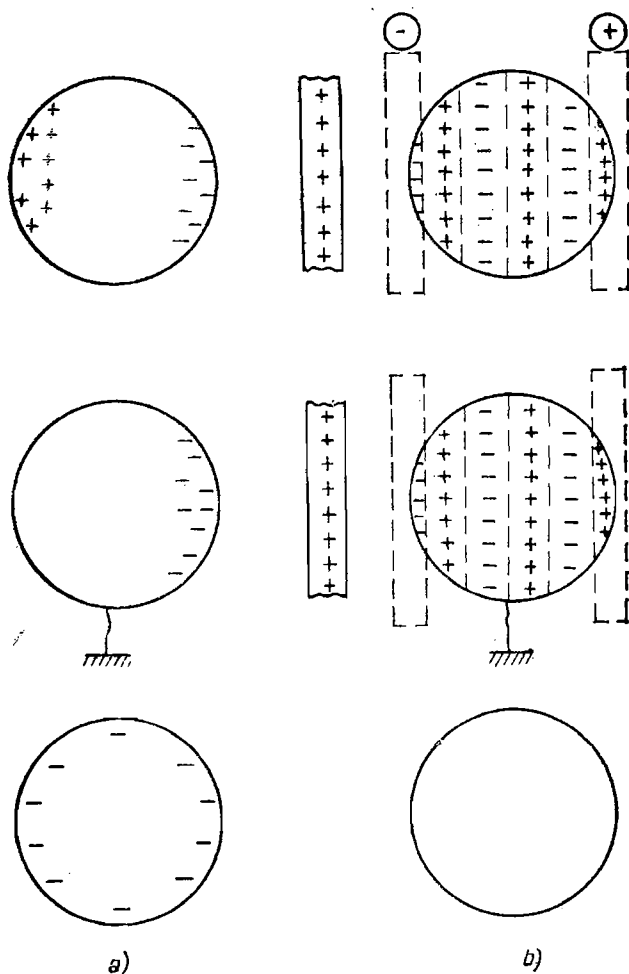


Fig. III.1.15

în cazul sferei conductoare, dar nu printr-o acumulare de sarcini, ci printr-o „stratificare” a lor. Mecanismul posibil de „stratificare” a sarcinilor electrice va fi discutat mai jos. Să repetăm însă experiența precedentă, de punere la pământ. Nu se mai întâmplă nimic: sarcinile fiind legate, nu se pot scurge la pământ, astfel că, după îndepărtarea corpului C, sfera dielectrică revine la starea neutră (fig. III.1.15b).

Există trei mecanisme de bază prin care se poate polariza un dielectric: a) polarizarea electronică; b) polarizarea ionică; c) polarizarea orientatională (sau dipolară).

*Polarizarea electronică* se manifestă în special la dielectricii formați din molecule simetrice, dar, mai ales este o caracteristică a atomilor și ionilor în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative (fig. III.1.16a) Apare naturală această coincidență, deoarece norul de electroni din jurul

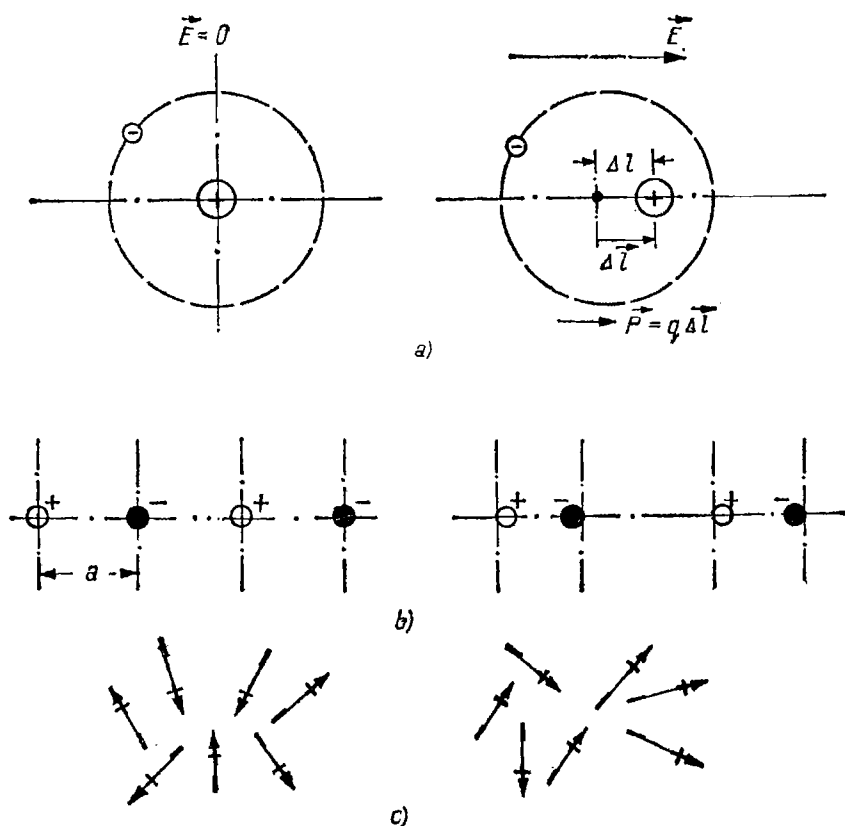


Fig. III.1.16

nucleului are centrul său în nucleu. În prezența unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative față de nucleu, astfel că întregul edificiu atomic (sau ionic) se manifestă ca un dipol electric. Polarizarea electronică nu depinde de agitația termică, deoarece avem de-a face cu mișcări în interiorul atomului.

*Polarizarea ionică* apare prin deplasarea ionilor din pozițiile lor de echilibru. Ilustrarea acestui tip de polarizare este reflectată de starea unui lăntșor format din două tipuri de ioni (fig. III.1.16b). Dacă dielectricul este lichid sau gaz, poate avea loc chiar și o separare a ionilor spre cele două extremități.

*Polarizarea orientatională* (sau dipolară) este prezentă în dielectricii constituiți din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu mai coincide cu cel al sarcinilor negative. Un exemplu foarte elocvent ni-l oferă oxidul de carbon ( $\text{CO} \rightarrow \text{C}^{2+} = \text{O}^{2-}$ ) în care moleculele posedă un moment dipolar permanent, datorită separării celor două sarcini, egale și de semn contrar. Din cauza agitației termice, moleculele dipolare sînt orientate haotic. În prezența unui câmp electric (fig. III.1.16c) ele tind să se alinieze în direcția acestuia.

Ultimele două tipuri de polarizare sînt afectate de agitația termică, astfel că efectul de orientare al dipolilor datorită cîmpului electric ar fi maxim la 0°K, adică atunci cînd încetează mișcarea de oscilație în jurul pozițiilor de echilibru, dipolii elementari fiind perfect aliniați.

Din rîndurile de mai sus se poate vedea că dipolul electric introdus mai înainte joacă un rol fundamental în înțelegerea proceselor de polarizare. De aceea, este necesar să introducem trei noi elemente în descrierea dipolului. Am calculat deja mărimea intensității cîmpului într-un punct arbitrar. Vom calcula în continuare, potențialul unui dipol într-un punct oarecare situat la o distanță  $r \gg l$ .

Ținînd seama de notațiile din fig. III.1.6 și de notațiile și aproximațiile introduse la calculul cîmpului unui dipol, potențialul are expresia:

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

În continuare, vom ține seama de relațiile folosite în deducerea relației (1.17),

$$r_1 = r, \quad r_2^2 \simeq r^2 \left( 1 - \frac{2l}{r} \cos \theta \right),$$

astfel că

$$r_1 r_2 \simeq r^2, \quad r_2 \simeq r \left( 1 - \frac{2l}{r} \cos \theta \right)^{1/2} \simeq r \left( 1 - \frac{l}{r} \cos \theta \right);$$

cu acesta  $V_M$  devine

$$V_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (135)$$

Într-un punct pe axul dipolului, potențialul devine ( $\cos \theta = \pm 1$ )

$$V_M = \mp \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}.$$

Un alt element legat de comportarea dipolului într-un cîmp extern îl constituie apariția unui cuplu de forțe. În fig. III.1.17 sînt reprezentate schematic două poziții ale unui dipol electric într-un cîmp uniform de intensitate  $\vec{E}$  creat între două plane conductoare a căror suprafață este foarte mare. Dacă dipolul are axa înclinată cu un unghi față de direcția cîmpului, atunci el este supus unui cuplu de forțe:  $|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = |\vec{F}|$ . Momentul cuplului pentru o orientare arbitrară a dipolului (poziția din mijlocul figurii III.1.17) este dat de:

$$\mathcal{M} = F \cdot d = qEl \sin \alpha = p \cdot E \sin \alpha, \quad (1.36)$$

sau sub formă vectorială:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times (q\vec{E}) = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (1.36')$$



Fig. III.1.17

În sfârșit, ultima mărime legată de comportarea dipolului este energia dipolului într-un câmp electric. Am ales pentru evaluarea ei, cazul cel mai simplu, atunci cînd axa dipolului este paralelă cu direcția câmpului. Fie  $Ox$  această direcție. Energia ei se obține prin însumarea energiei celor două sarcini aflate în puncte diferite cu potențialele  $V(x)$  și  $V(x + l)$ :

$$W = W_- + W_+ = -qV(x) + qV(x + l). \quad (1.37)$$

Dacă ne situăm în cazul  $x \gg l$ , dezvoltăm în serie pe  $V(x + l)$  în jurul valorii  $x$  (v. p. 862, relația (A.4)).

$$V(x + l) \simeq V(x) + \frac{dV}{dx} l$$

Folosind (1.32') rezultă

$$W \simeq ql \frac{dV}{dx} = -pE. \quad (1.37')$$

Ultima egalitate reprezintă o expresie banală pentru cazul particular discutat, forma corectă pentru cazul general fiind dată de:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (1.37'')$$

**b) Câmpul în interiorul dielectricilor.** Calcularea câmpului în interiorul dielectricilor constituie una dintre cele mai dificile probleme. În ce constă dificultatea? Pentru a clarifica întrebarea să ne fixăm atenția asupra unei substanțe dielectrice introdusă într-un câmp electric uniform  $\vec{E}_0$  creat între două suprafețe plane încărcate (fig. III.1.18). Apare evident de la bun început că în interiorul dielectricului polarizat, câmpul electric va poseda o intensitate diferită de  $\vec{E}_0$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{pol}}, \quad (1.38)$$

unde  $\vec{E}_{\text{pol}}$  reprezintă contribuția datorită polarizării dielectricului. Pentru a măsura pe  $\vec{E}$  trebuie introdusă o sondă în interiorul dielectricului, într-o cavitate.

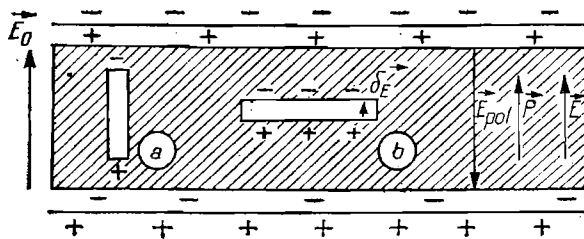


Fig. III.1.18

Cîmpul măsurat depinde de forma cavității datorită sarcinilor de polarizare care apar pe suprafața ei:  $\vec{E}_{\text{cav}} = \vec{E} + \delta\vec{E}$ ;  $\delta\vec{E}$  măsoară contribuția acestor sarcini care se suprapune peste valoarea cîmpului real. Să ne imaginăm o cavitate cilindrică de rază mică în raport cu lungimea, plasată în lungul cîmpului (fig. III.1.18a). Deoarece suprafața bazelor este foarte mică, se poate neglija contribuția sarcinilor de polarizare de pe ele, de aceea  $\delta\vec{E} = 0$ , astfel că  $\vec{E}_{\text{cav}} = \vec{E}$ , adică este măsurată intensitatea reală a cîmpului în dielectric.

Fie acum o cavitate de forma unui disc de suprafață foarte mare în raport cu înălțimea, plasat perpendicular pe direcția cîmpului (fig. III.1.18b). În acest caz, cîmpul din interiorul cavității este afectat de sarcinile de pe baza cavității, astfel că  $\vec{E}_{\text{cav}} \neq \vec{E}$ . Se vede, deci, că valoarea corectă a cîmpului în interior este dată de cavitatea cilindrică de mai sus. Cîmpul  $\vec{E}_{\text{pol}}$  mai este numit și *cîmp de depolarizare*, deoarece acționează în sens invers cîmpului exterior. Acest cîmp poate fi exprimat în funcție de momentul dipolar al substanței. În acest scop se introduce noțiunea de *intensitate de polarizare a mediului*,  $\vec{P}$ , ca fiind momentul dipolar al unității de volum. Momentul total al substanței este obținut din însumarea tuturor momentelor  $\vec{p}_i$ :

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (1.39)$$

Valoarea maximă a lui  $P$ , ( $P_{\text{max}}$ ), se obține atunci cînd dipolii sînt perfect aliniați, în care  $N$  este numărul de dipoli din volumul  $V$ . Valoarea cîmpului  $\vec{E}_{\text{pol}}$  este proporțională cu  $\vec{P}$  și îndreptată în sens opus (fig. III.1.18):

$$\vec{E}_{\text{pol}} = -N_E \vec{P},$$

unde  $N_E$  este o constantă numerică numită *factor de depolarizare* a cărui mărime depinde de forma dielectricului. Astfel, pentru un dielectric cilindric, subțire și lung  $N_E = 0$ , iar pentru unul sferic este  $\frac{1}{3\epsilon_0}$ . În acest din urmă caz, cîmpul în interiorul unui dielectric va fi:

$$\vec{E}_{\text{sferă}} = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

iar pentru un dielectric sub formă de disc, cu suprafață mare și grosime mică,

$$\vec{E}_{\text{disc}} = E_0 - \frac{1}{\epsilon} \vec{P}.$$

După cum se vede, primul termen din (1.38) descrie câmpul creat de sarcinile libere de pe planele conductoare încărcate, iar  $\vec{E}_{\text{pol}}$  descrie câmpul creat de sarcinile legate din interiorul dielectricului.

O altă noțiune folosită în electrostatică este *inducția electrică* ( $\vec{D}$ ), definită astfel:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}. \quad (1.40)$$

Se va vedea mai jos că ea reprezintă contribuția sarcinilor libere la câmpul total rezultat. Din datele experimentale și din (1.40) se constată că polarizarea este proporțională cu intensitatea rezultantă a câmpului electric:  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , unde  $\chi_e$  reprezintă *susceptibilitatea electrică* a materialului, astfel că legătura cu  $\epsilon$  (permitivitatea electrică sau constanta dielectrică) este dată de:

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.41)$$

În sistemul CGS relațiile de mai sus devin:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \epsilon_r \vec{E}, \quad \vec{P} = \chi_e \vec{E} \Rightarrow \epsilon_r = 1 + 4\pi \chi_e,$$

astfel că pentru vid ( $\chi_e = 0$ )  $\epsilon_r = 1$  și deci  $\vec{D} = \vec{E}$ .

Pentru a înțelege mai bine semnificația inducției  $\vec{D}$  vom apela la experiența în care montăm un condensator plan, avînd aer între plăci, la o baterie de tensiune  $V$ . Condensatorul se încarcă (fig. III.1.19), pînă cînd între placă și bornele bateriei nu mai există nici o diferență de potențial. Între plăci există un câmp de intensitate  $\vec{E}$ . Să introducem acum o lamelă dielectrică între plăci (fig. III.1.20). Datorită polarizării acesteia cu sarcini de sens contrar celor de pe plăcile metalice se creează un câmp electric de sens contrar celui produs de sarcinile acumulate. Pentru a menține o diferență de potențial nulă între fiecare placă și borna respectivă a bateriei, trebuie să se scurgă un număr de sarcini egal cu sarcinile de polarizare (fig. III.1.20) astfel că intensitatea câmpului creat de sarcinile de pe plăcile condensatorului este diferită de  $\vec{E}$ :  $\vec{D} = \epsilon_r \vec{E}$ .

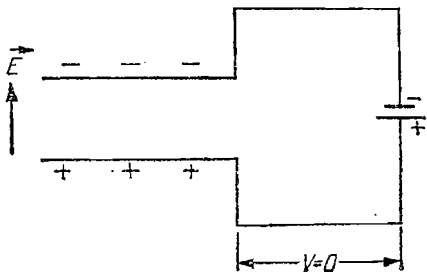


Fig. III.1.19

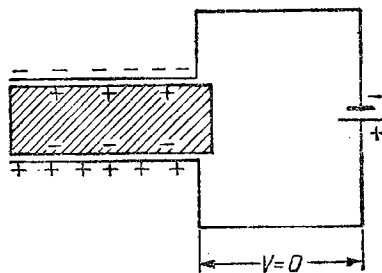


Fig. III.1.20

Cele două mărimi introduse,  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$ , pot fi măsurate separat, dacă vom utiliza cavitățile de formă cilindrică și respectiv de disc (fig. III.1.18), deoarece în prima sarcinile de pe suprafața cavității nu influențează câmpul electric, iar în cea de-a doua câmpul acestor sarcini anulează câmpul sarcinilor de pe suprafața dielectricului.

## 1.6. CAPACITATEA. CONDENSATORII

a) **Sisteme de corpuri electrizate.** Din experiența simplă a electrizării prin influență am văzut că starea electrică a unui corp este afectată de prezența altor corpuri ca și de legătura lui cu pământul. Dar fenomenul nu este chiar atât de simplu, cum ar părea la prima vedere. Să revenim pe scurt la experiența de electrizare a unei sfere conductoare sub influența unui conductor încărcat negativ. Dacă legăm sfera la pământ, sarcinile negative separate la extremitatea opusă conductorului negativ se scurg și sfera devine pozitivă. La rîndul ei, această sarcină influențează starea de electrizare a conductorului inducînd în acesta o electrizare prin influență ș.a.m.d. Este evident că procesul acesta al influenței reciproce ajunge la un echilibru. Este important de reținut deci faptul că influența electrică nu este dirijată într-un sens, ci ea este reciprocă, mutuală.

Pornind de la această constatare să analizăm comportarea a  $(n - 1)$  conductori aflați în prezența unui alt conductor (1), încărcat electric. Să presupunem că primul conductor este încărcat la potențialul  $V_1 = V$ , iar ceilalți sînt legați la pământ, deci au potențiale nule:  $V_2 = V_3 = \dots = V_n = 0$  (fig. III.1.21). Cei  $(n - 1)$  conductori se încarcă sub influența primului pînă cînd posedă fiecare o sarcină proporțională cu potențialul  $V_1$ :

$$Q_k = C_{k1} V_1, k = 2, 3, \dots, n. \quad (1.42)$$

Se constată experimental că acești coeficienți nu depind de mărimea lui  $V_1$  ci doar de forma și poziția relativă a conductoarelor.

Dacă încercăm acum conductorul (2) la potențialul  $V_2 = V$ , iar ceilalți, inclusiv (1) sînt legați la pământ, sarcinile lor vor fi proporționale cu  $V_2$ :

$$Q_k = C_{k2} V_2, k = 1, 3, \dots, n. \quad (1.42')$$

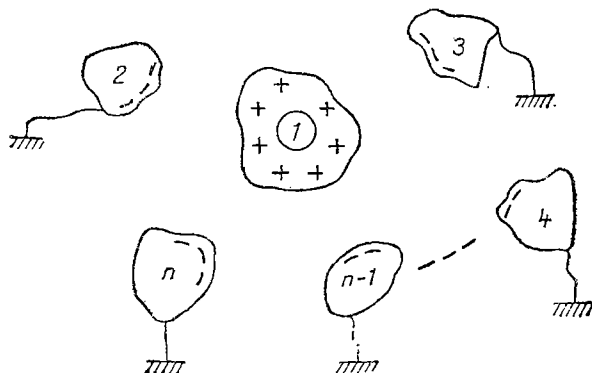


Fig. III.1.21

Continuăm experimentul pînă cînd va fi încărcat conductorul ( $i$ ) la potențialul  $V_i = V$ , obținînd atunci sarcinile:

$$Q_k = C_{ki} V_i, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n. \quad (1.42)$$

În cazul general, cînd conductorii nu mai sînt legați la pămînt, sarcina  $Q_k$  de pe fiecare conductor  $k$  este:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n C_{ki} V_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.43)$$

Coeficienții  $C_k$  ( $k \neq i$ ) sînt numiți *coeficienți de influență* iar  $C_{ii}$  sînt *coeficienți de capacitate*. Primii coeficienți exprimă starea de încărcare sub influența altor corpuri, iar ultimii, exprimă sarcina în funcție de potențialul propriu atunci cînd toate corpurile din jur sînt la potențialul nul (legate la pămînt).

Coeficienții introduși mai sus au următoarele proprietăți:

$$C_{ii} > 0, \quad C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{ij} (i \neq j) < 0, \quad \sum_j C_{ij} \geq 0.$$

Prima relație este evidentă deoarece semnul lui  $V$  este dat de semnul sarcinii. Înțelegerea relației secunde, pentru care există o demonstrație riguroasă, poate fi ușurată de aplicarea principiului acțiunii și reacțiunii în sens general, nu numai în sens mecanicist. Relația  $C_{ij} (i \neq j) < 0$  exprimă faptul că sarcina de influență pe un conductor legat la pămînt are semnul contrar sarcinii care produce influența. În sfîrșit, ultima relație ne arată că sarcina totală de influență (de pe toți conductorii) este mai mică, sau cel mult egală cu cea care generează influența.

Există ( $n$ ) ecuații de tipul (1.43). Ele pot fi rezolvate pentru a obține potențialele în funcție de mărimea sarcinilor:

$$V_i = \sum_{k=1}^n S_{ik} Q_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.44)$$

Coeficienții  $S_{ik}$  poartă numele de *elastanțe* și de asemenea,  $S_{ik} = S_{ki}$ .

b) **Capacitatea unui conductor. Condensatorii.** După cum am arătat mai sus, dacă toate corpurile, care înconjoară un alt corp ( $i$ ), sînt puse la pămînt, atunci sarcina ce se înmagazinează pe ( $i$ ) este proporțională cu potențialul la care este încărcat:  $Q_i = C_{ii} V_i$ . Dacă acest corp este complet izolat, atunci relația devine:

$$Q = C \cdot V, \quad (1.45)$$

unde coeficientul  $C$  diferă de  $C_{ii}$ . Mărimea  $C$  este numită *capacitate electrică* și este definită prin raportul dintre sarcina înmagazinată pe un corp și potențialul la care se află acesta. Ecuația dimensională:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}}{M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}} = L, \quad (1.46)$$

ne arată că acest coeficient are dimensiunea unei lungimi.

Pentru a introduce unitățile de capacitate este util să scriem capacitatea *condensatorului sferic*. Condensatorul reprezintă, în general, un ansamblu de

corpuri, cu o anumită geometrie și așezare spațială, pe care se înmagazinează electricitate. În cazul particular de mai sus, este vorba de o sferă conductoare de rază  $R$ . Capacitatea condensatorului sferic, încărcat cu sarcina  $Q$  și aflat într-un mediu de constantă  $\epsilon_r$ , este egală cu:

$$C_{\text{SI}}^{(\text{mediu})} = \frac{Q}{\frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q}{R}} = \frac{\epsilon_r}{k} R, \text{ iar în CGS, } C_{\text{CGS}}^{(\text{mediu})} = \epsilon_r R. \quad (1.47)$$

Unitatea electrostatică CGS de capacitate este *centimetrul*, sau *stat-faradul* (SF) și ea reprezintă capacitatea unei sfere conductoare cu raza de 1 cm, izolată și aflată în vid. În SI, unitatea de capacitate este *faradul*, care este definit de relația:

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ SF},$$

adică este capacitatea unui conductor izolat, încărcat cu un coulomb de electricitate sub un potențial de 1 volt. Deoarece faradul este o unitate enormă, în practică sînt folosiți submultipli acestuia ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ,  $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ,  $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ).

Energia înmagazinată într-un condensator poate fi calculată pe baza unui raționament fizic, fie pe cale pur matematică prin integrare. În primul caz, pornim de la starea inițială a unui condensator neîncărcat ( $Q_i = 0$ ) legat la un dispozitiv de încărcare la potențialul  $U$ , astfel că în starea finală va avea sarcina  $Q_f = Q$ . Se poate spune că sarcina medie deplasată în timpul încărcării sub acțiunea potențialului de încărcare este  $Q_m = \frac{Q_i + Q_f}{2} = \frac{Q}{2}$ , deci

energia înmagazinată ( $W$ ) este:

$$W = Q_m U = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.48)$$

Relația aceasta mai poate fi dedusă plecînd de la  $dW = VdQ$ . Cum  $dQ = = CdV$ , energia totală se obține prin integrare:

$$W = \int_0^U CVdV = \frac{CU^2}{2}. \quad (1.48')$$

Limitele de integrare au fost stabilite ținînd seama de variația potențialului condensatorului în timpul încărcării.

Un alt tip de condensator, des utilizat, este *condensatorul plan*, format din două suprafețe metalice plane (armături), dispuse paralel. Între armături poate să fie aer sau un alt dielectric. Pentru a calcula expresia capacității lui vom începe cu evaluarea cîmpului electric în cazul unui plan infinit, încărcat uniform, cu densitatea superficială  $\sigma_e$ . În aceste condiții liniile de cîmp sînt perpendiculare pe plan. Pentru a calcula cîmpul folosim o construcție ajutătoare construind un mic cilindru perpendicular pe plan, cu bazele  $S_1$  și  $S_2$  (fig. III.1.22) egale ca arie cu  $S$ . Ținînd seama că liniile de cîmp sînt paralele

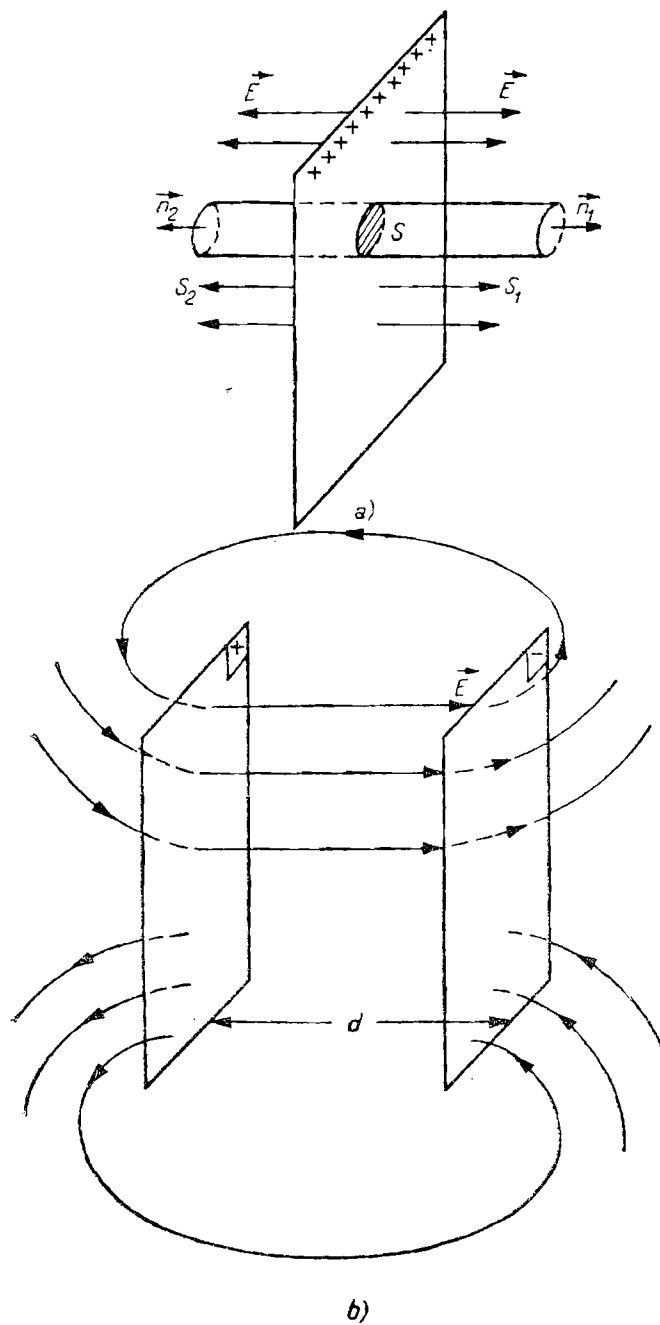


Fig. III.1.22

cu axul cilindrului, fluxul prin suprafața cilindrului este dat doar de liniile ce trec prin baze:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = L(S_1 + S_2) = 2SE. \quad (1.49)$$

Pentru a aplica teorema lui Gauss, în sistemul SI,  $\Phi = q/\varepsilon$  și trebuie calculată sarcina  $q$  din interiorul cilindrului:

$$q = \sigma_e S \Rightarrow \Phi = q/\varepsilon = \sigma_e S/\varepsilon \Rightarrow L = \sigma_e/2\varepsilon, \quad (1.50)$$

de unde rezultă că intensitatea cîmpului, în vecinătatea planului depinde numai de densitatea superficială de sarcină.

Să construim acum un condensator ipotetic cu două plane încărcate pozitiv, respectiv negativ (fig. III.1.22 b). Se poate vedea ușor că între plane intensitatea totală a cîmpului ( $E_{\text{int}}$ ) este dată de suma intensităților cîmpurilor create de fiecare plan în parte, iar în exterior este dată de diferența lor:

$$E_{\text{int}} = E_1 + E_2 = \sigma_e/\varepsilon, \quad E_{\text{ext}} = E_1 - E_2 = 0. \quad (1.51)$$

Este clar că dacă trecem de la cazul ipotetic la un condensator real, expresia intensității cîmpului este valabilă numai pentru regiunea centrală dintre plăci, deoarece la margini există o dispersie a liniilor de cîmp, acestea nu mai sînt perpendiculare pe plăci. Deducerea capacității condensatorului plan este valabilă deci numai pentru regiunea cu cîmp uniform. Fie  $S$  aria acestei regiuni pe care este înmagazinată sarcina  $Q$ . Intensitatea cîmpului este dată de

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{S}. \quad (1.52)$$

Neglijînd în continuare efectele de margine,  $E$  poate fi exprimat în funcție de tensiunea dintre plăci  $U$  și distanța  $d$ :  $E = \frac{U}{d}$  astfel că din egalitatea  $\frac{U}{d} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{S}$  rezultă expresia capacității unui condensator plan în sistemul SI:

$$C_{SI} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Capacitatea acestui condensator în CGS este dată de formula:

$$C_{\text{CGS}}^{(\text{vid})} = \frac{Q}{U} = \frac{S}{4\pi d}, \quad C_{\text{CGS}}^{(\text{mediu})} = \frac{\varepsilon_r S}{4\pi d}, \quad (1.53)$$

care este obținută prin împărțirea cu  $(4\pi\varepsilon_0)$ , factor ce apare din exprimarea tensiunii în acest sistem;  $\varepsilon$  reprezintă constanta dielectrică absolută a mediului dintre plăcile condensatorului.

c) **Gruparea condensatorilor.** Producția condensatorilor este standardizată, în sensul că sînt omologate numai anumite valori. În montajele electronice este însă nevoie de valori de cele mai multe ori diferite de valorile standard. De aceea se utilizează metoda grupării mai multor condensatori, la distanțe suficient de mari pentru a nu fi influențată mărimea capacității lor.

*Gruparea în serie* se realizează prin legarea unui șir de condensatori ca în fig. III. 1.23a, în care armătura unuia este în contact cu cea a vecinului ș.a.m.d.,



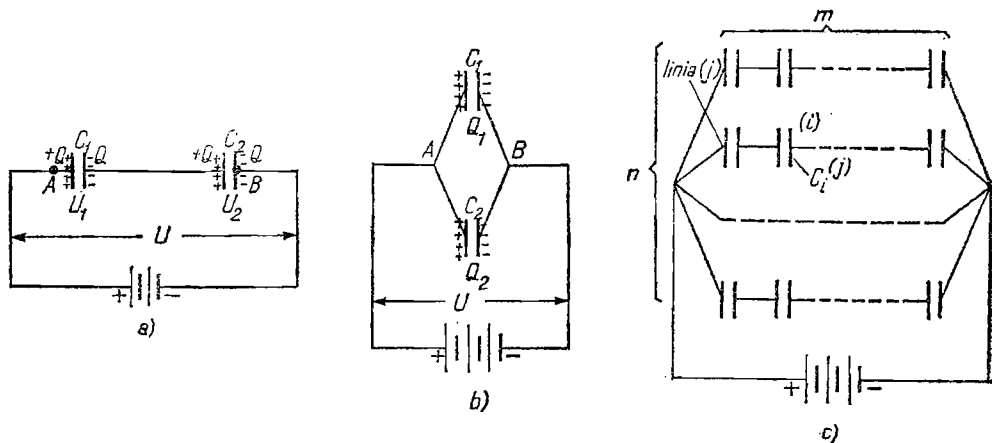


Fig. III.1.23

iar armăturile exterioare ale grupării sînt legate la o sursă de tensiune care furnizează circuitului tensiunea la borne  $U$ . Deoarece electrizarea plăcilor din interiorul grupării are loc prin influență, sarcinile de pe armăturile condensatorilor sînt egale între ele, în valoare absolută, dar vor fi diferite diferențele de potențial pentru că nu sînt egale capacitățile. Pentru bateria de doi condensatori din fig. III.1. 23a pot fi scrise relațiile:

$$Q_1 = Q_2 = Q = C_1 U_1 = C_2 U_2$$

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = U = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C},$$

Rezultă de aici capacitatea echivalentă pentru gruparea în serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.54)$$

În cazul general, cînd sînt grupați în serie  $n$  condensatori diferiți, capacitatea echivalentă se obține ușor:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (1.54')$$

Gruparea în paralel este realizată prin legarea tuturor armăturilor la două puncte în care se aplică și tensiunea sursei (fig. III.1.23b). În acest caz, diferențele de potențial pe fiecare condensator sînt egale, deoarece inegalitatea ar atrage o scurgere de sarcini pe una dintre ramuri între punctele A și B. În acest caz putem scrie relațiile:

$$U_{AB} = U = U_1 = U_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2},$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = U(C_1 + C_2) = UC.$$

Capacitatea echivalentă a bateriei de condensatori grupați în paralel este astfel egală cu suma capacităților lor:

$$C = C_1 + C_2, \quad (1.55)$$

sau în cazul general, a  $n$  condensatori, relația devine:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (1.55')$$

*Gruparea mixtă* este reprezentată schematic în fig. III.1.23c și este formată din  $n$  linii legate în paralel, pe fiecare șir, condensatorii fiind legați în serie. Capacitatea liniei  $j$  cu  $m_j$  condensatori este dată de

$$\frac{1}{C_j^{(\text{linie})}} = \sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{C_i^{(j)}},$$

iar capacitatea totală se obține prin însumarea contribuțiilor tuturor liniilor:

$$C_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^n C_j^{(\text{linie})} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sum_{i=1}^{m_j} \frac{1}{C_i^{(j)}}}, \quad (1.56)$$

Un caz particular este cel al grupării de condensatori identici, de capacitate  $C$ , avînd pe fiecare linie același număr de condensatori ( $m_1 = m_2 = \dots = m$ ). Capacitatea echivalentă a unei astfel de grupări este egală cu  $C_{\text{tot}} = \frac{n}{m} C$ .

*Tipuri de condensatori.* Clasificarea condensatorilor constituie o acțiune utilă avînd menirea să ușureze identificarea lor după anumite caracteristici: formă, dimensiune, tipul de dielectric folosit, variabilitate etc.

Astfel, am întîlnit deja condensatorii plan și sferic. După formă sînt separați și cei cilindrici (butelia de Leyda, de exemplu). După dimensiuni, condensatorii sînt *masivi* și *microminiaturizați*; în funcție de tipul de dielectric folosit există condensatori cu aer, cu hîrtie, cu ceramică sau chimici; în sfîrșit, ultimul criteriu ne oferă distincția între condensatorul fix și cel variabil.

În general, un condensator este caracterizat de mărimea capacității, tensiunea optimă de lucru, de gabaritul său. Capacități mari se obțin, de pildă, în cazul condensatorului plan prin utilizarea unei geometrii adecvate ( $S$  mare și  $d$  mic), dar și prin utilizarea unor dielectrice cu permitivitate mare. Nu orice dielectric cu  $\epsilon$  mare este și cel mai potrivit! Așa, de exemplu, apa are constanta  $\epsilon = 81$  și totuși cu greu ne-am imagina condensatori cu . . . apă, din cauza domeniului restrîns de temperatură în care apa își păstrează starea de agregare. Există, de altfel, materiale cum ar fi titanatul de bariu ( $\text{BaTiO}_3$ ) a căror constantă dielectrică relativă este mai mare de 1000.

Tensiunea optimă de lucru este legată de faptul că dielectricii nu pot suporta efectul cîmpurilor electrice oricît de intense. De la anumite valori ale intensității cîmpului electric are loc *străpungerea dielectricului* care se manifestă prin trecerea bruscă a curentului electric. Un exemplu de străpungere ni-l oferă stratele de aer dintre armăturile unui condensator plan, sau dintre două sfere metalice mari (eclatori sferici) legate la o mașină electrostatică. O dată cu creșterea tensiunii între eclatoare, crește intensitatea curen-

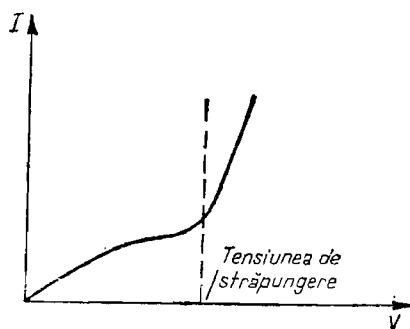


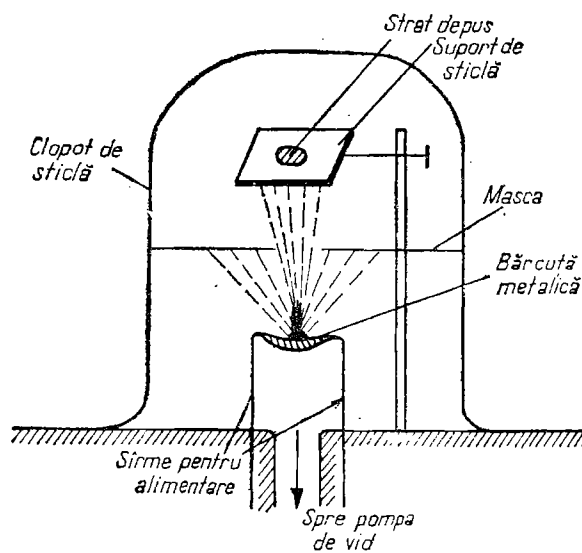
Fig. III.1.24

tului\* foarte slab, produs de mișcarea sarcinilor electrice, care pot exista în aer; în absența lor curentul este nul. La o valoare anumită a tensiunii, numită *tensiune de străpungere*, are loc o scurgere masivă de sarcini electrice, deci o creștere rapidă a intensității curentului electric (fig. III.1.24). Această creștere rapidă este produsă de sarcinile din aer care apar fie prin ionizări produse de radiația ultravioletă a Soarelui, sau prin smulgerea de pe eclatoare sub acțiunea câmpurilor electrice puternice. Sarcinile astfel produse, mai precis electronii, pot câștiga energie prin accelerarea în câmpuri și ei la rândul lor pot ioniza alte molecule, creîndu-se astfel în lungul traiectoriei lor o avalanșă. Și în dielectricii solizi pot să apară astfel de scurgeri masive de sarcini de la anumite valori ale intensității câmpurilor electrice, dar străpungerea lor este însoțită de o distrugere a rețelei cristaline. Mecanismele de străpungere a dielectricilor solizi nu mai sînt la fel de simple ca cele din gaze.

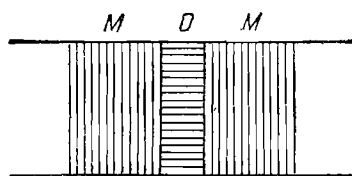
Ultima caracteristică a condensatorilor — gabaritul — are implicații nu numai asupra capacității, ci și a prețului de cost și funcționalității aparatelor electronice. În ultimii 5—6 ani a fost pusă la punct o tehnică de fabricație a unor condensatori din ce în ce mai mici, așa-numiții condensatori *miniaturizați* și *micro-miniaturizați*. În rîndul ultimilor sînt înscrși condensatorii de tip MOM (metal-oxid-metal).

Un sistem de acest gen este obținut într-o incintă vidată (fig. III.1.25a) unde este evaporat un metal dintr-o bărcuță metalică greu fuzibilă (wolfram, tantal) prin încălzire cu un curent electric. Metalul este depus pe un suport dielectric (de exemplu, plăcuțe de sticlă) după ce atomii trec printr-o mască metalică prevăzută cu orificii adecvate. Stratul metalic este oxidat apoi la suprafață, oxidul respectiv jucînd rolul de dielectric. În ultima etapă va fi evaporat un alt strat metalic, obținîndu-se astfel un condensator în miniatură. (O secțiune printr-un sistem MOM este indicată în fig. III.1.25b.) Unul dintre sistemele cele mai utilizate este Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Al. Există, desigur, și posibilitatea utilizării de metale diferite, ca de exemplu în sistemul Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Au. Un asemenea condensator, care ar avea suprafața de 1 cm<sup>2</sup>, și grosimea stratului de oxid de 1000 Å, are o capacitate de 0,4 μF pentru un ε<sub>r</sub> = 5. Deoarece cîmpul de străpungere este de ordinul (10<sup>5</sup> — 10<sup>6</sup>)  $\frac{V}{cm}$ , rezultă că el nu poate

\* Intensitatea curentului este definită în capitolul III.2 ca fiind cantitatea de electricitate ce se scurge în unitatea de timp printr-o secțiune.



a)



b)

Fig. III.1.25

lucra decât pînă la  $\approx 10$  V. Există unele materiale cum ar fi bioxidul de titan ( $\text{TiO}_2$ ) sau titanatul de plumb ( $\text{PbTiO}_3$ ) care rezistă pînă la  $\approx 30$  V. Este evident că acest tip de condensatori este util în instrumentele tranzistorizate, care lucrează, în general, la tensiuni mici.

## 1.7. ELECTRICITATEA ATMOSFERICĂ

Deși omul s-a întîlnit cu electricitatea atmosferică încă din cele mai vechi timpuri, explicarea ei a întîrziat mult, foarte mult în raport chiar cu fizica atomică. Întîrzierea este explicată pe de o parte de inaccesibilitatea abordării cercetărilor cu posibilități modeste, iar pe de altă parte, de fluctuațiile extrem de variate ale fenomenelor, de la un moment la altul, de la o zonă geografică

la alta, fluctuații dependente de altitudine etc. Mijloacele de investigare a electricității atmosferice sînt extrem de diverse și ele au evoluat extrem de mult. În ordine istorică aceste mijloace pot fi clasificate astfel: observație vizuală, sondaje prin baloane meteorologice, înregistrare fotografică, folosirea rachetelor sondă, a sateliților și, în sfîrșit, a rachetelor interplanetare. Se vede deci că puține țări pot dispune astăzi de condiții perfecționate de studiu a atmosferei folosind rachetele și sateliții, de aceea și electricitatea atmosferică a fost studiată în funcție de mijloacele afectate.

Poate să pară ciudată includerea acestui capitol la electrostatică. Într-adevăr, deși avem de-a face mai degrabă cu fenomene legate de mișcarea sarcinilor electrice, prezentăm aici electricitatea atmosferică pentru că la scara umană, fenomenele care se derulează la nivelul globului sînt asemănătoare cu cele puse în evidență în laboratorul de electrostatică: descărcarea condensatorilor, ionizarea produsă de vîrfuri, electrizarea prin influență etc. În rîndurile care urmează ne vom referi pe scurt la trei aspecte: a) electricitatea norilor și unele fenomene adiacente; b) cîmpul aeroelectric și c) centurile de radiație.

a) **Electricitatea norilor.** Se poate afirma fără a greși mult că întemeietorul cercetării sistematice a electricității norilor, mai bine zis a fenomenelor adiacente, a fost Franklin. El a elaborat metode speciale de studiere a descărcărilor produse în timpul furtunilor, a precauțiunilor ce trebuie luate pentru a evita accidentele și ceea ce este mai important este inventatorul paratrăsnetului. Electricitatea norilor a fost cunoscută în special prin două fenomene: *fulgerul* și *trăsnetul*. Se afirmă deseori că fulgerul este o descărcare electrică între doi nori încărcăți cu sarcini de semn opus, afirmație incorectă în general. De altfel, acest lucru poate fi stabilit și de dumneavoastră dacă veți urmări cu atenție fulgerele în timpul furtunilor; în general ele se declanșează pe direcția verticală sau oblică și mai rar pe direcție orizontală. Observațiile au arătat că fulgerul apare ca o descărcare între partea superioară și cea inferioară ale aceluiași nor, sau între doi nori diferiți situați la înălțimi diferite. Fulgerul poate să fie și orizontal, dar numai în interiorul aceluiași nor, între regiuni cu densități de sarcină diferită. Studiul distribuției sarcinilor în nori a arătat că în general aceștia sînt neutri în ansamblu, dar sînt polarizați. Există trei tipuri de nori polarizați: nori polar-pozitivi (fig. III. 1.26a), polar-negativi (fig. III.1.26b) și nori *tripolari* (fig. III.1.26c). Primii sînt cei mai răspîndiți, urmați de cei de-al treilea tip. Nu este încă pe deplin clar, de ce, în mod obișnuit norul este polar-pozitiv.

Cum are loc fulgerul? Se poate intui ușor că diferența de potențial favorabilă unei descărcări electrice este plasată între partea superioară și cea inferioară a norului astfel că fulgerul nu este altceva decît o descărcare electrică într-un nor între cele două extremități încărcate diferit.

Cel de-al doilea fenomen menționat — trăsnetul — este tot o descărcare electrică ce are loc între partea inferioară a unui nor și pămînt. Dar trăsnetul nu poate să apară pentru orice fel de nori, el apare numai pentru norii cei mai apropiați de Pămînt, norii care produc aversele de ploaie. De ce nu pot genera trăsnete și norii mai îndepărtați? Există mai multe explicații, care cumulate furnizează o explicație completă. Este vorba în primul rînd de faptul că Pămîntul este încărcat negativ(!) și deci nu s-ar produce o descărcare între baza negativă a norului și solul încărcat cu același tip de electricitate. În prezența norului are loc însă o electrizare prin influență a zonei terestre situată

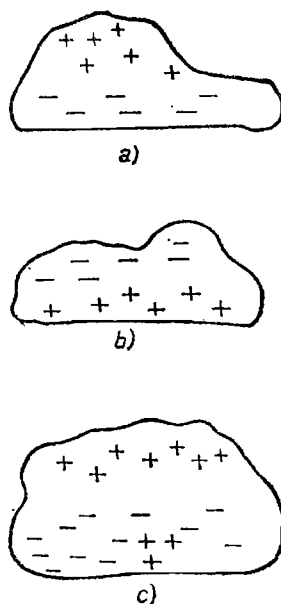


Fig. III.1.26

sub el. Sarcina pozitivă pe care o capătă Pământul este însă cu atât mai mică cu cât norii sînt situați la înălțime mai mare, ceea ce explică de ce fenomenul este produs mai frecvent de norii de joasă altitudine.

Să examinăm mai amănunțit mecanismul de producere a trăsnetului. Se știe la ora actuală că ploaia este în general „pozitivă”. O explicație a acestui fenomen este legată de electrizarea picăturilor prin frecare cu stratele atmosferice, astfel că pe sol sosește un transport de sarcină pozitivă, ceea ce face ca norul să nu mai fie neutru (se negativizează), deci poate să apară o diferență de potențial între baza lui inferioară și Pământul polarizat pozitiv, creîndu-se astfel un câmp electric a cărui intensitate este mai puternică în regiunea vîrfurilor (fig. III.1.27). Între vîrfuri și baza norului există un schimb permanent de sarcini, dar cînd intensitatea cîmpului electric depășește o anumită limită are loc străpungerea aerului producîndu-se o descărcare electrică între vîrf și baza norului. Acesta este tipul de trăsnet cel mai răspîndit. Pe un teren neted și omul poate juca rolul de „vîrf”. În plus, orice obiect metalic aflat asupra lui favorizează trăsnetul.

Există și un trăsnet însoțit de scurgerea inversă de sarcini atunci cînd avem de-a face cu un nor tripolar (fig. III. 1.27b). Acest caz este însă mai puțin frecvent. Pozitivarea unor regiuni din baza norilor nu poate fi explicată decît prin plecarea unor particule încărcate negativ, ceea ce se întîmplă în timpul grîindinilor sau a ninsorii. Nu vom discuta aici problema diferenței de încărcare a precipitațiilor lichide și solide, dar realitatea lor nu este astăzi contestată și ea explică existența celor două tipuri de trăsnete.

Vom prezenta în continuare o clasificare a formelor de descărcare a electricității acumulate în nori: a) descărcare între nori (scînteii lungi de circa

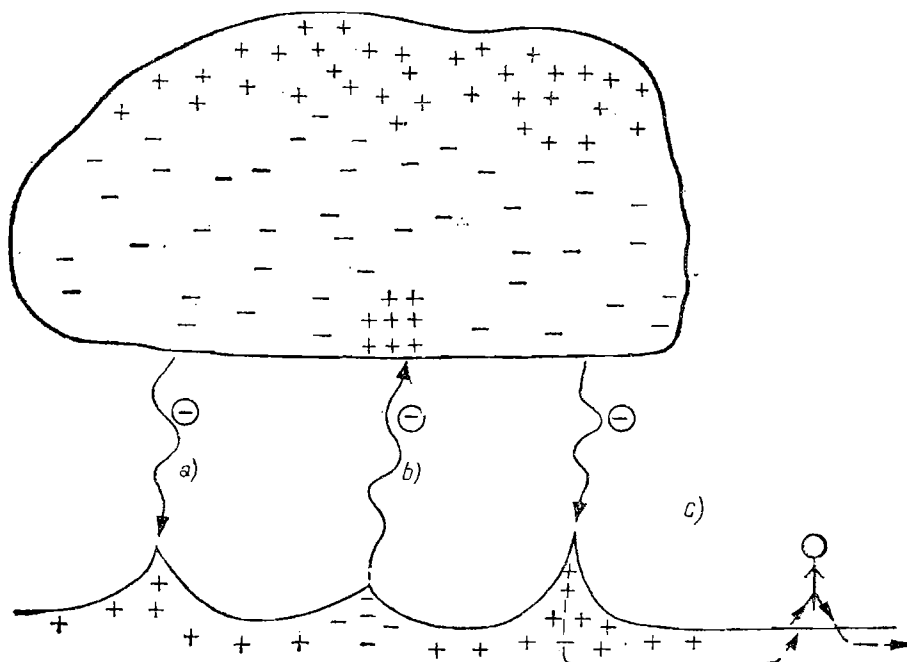


Fig. III.1.27

15 km); b) descărcarea în interiorul norului, de sus în jos (descendentă) însoțită de o iluminare a norilor; c) descărcare în interiorul norilor, de jos în sus (ascendentă), greu vizibilă de pe Pământ; d) trăsnet liniar, spre Pământ, sub formă de scînteie, care este însă de formă contorsionată, analogă semnului „atenție, înaltă tensiune” ( $\downarrow$ ); e) trăsnet globular care apare ca o sferă incandescentă; f) trăsnet perlat (succesiune de „perle” luminoase); g) trăsnet rachetă (punct luminos care înaintează rapid și lasă în urmă o trenă luminoasă ca o cometă). Dintre acestea menționăm trăsnetul globular ca fiind o sferă strălucitoare cu durată de viață relativ ridicată. Apare neașteptat în locuri diferite, poate „intra” și în casă în mod misterios. Mărturiile diferiților observatori sînt la fel de diferite ca și ipotezele asupra naturii lui.

Mai menționăm aici *trăsnetul indirect*, care poate lovi un om sau un alt obiect deși descărcarea a avut loc între baza norului și un alt punct de pe Pământ (fig. III.1.27c). Explicația lui este legată de faptul că obiectul situat la o oarecare distanță de punctul lovit este și el electricizat prin influență și electricitatea suplimentară sosită prin Pământ servește la neutralizarea parțială a sarcinii înmagazinată în el.

Credem că ar fi interesant de reținut unele date suplimentare asupra acestor fenomene. Astfel, un fulger este un fenomen discontinuu care se derulează într-un număr variabil de etape (fig. III.1.28). În faza incipientă (a, b, c cu —) descărcarea „caută” drumul cel mai convenabil prin ionizarea aerului și crearea unui „culoar” bun conductor. În această etapă luminozitatea este foarte slabă. La sfîrșitul etapei c (notația +) se dezvoltă faza principală care este foarte luminoasă.

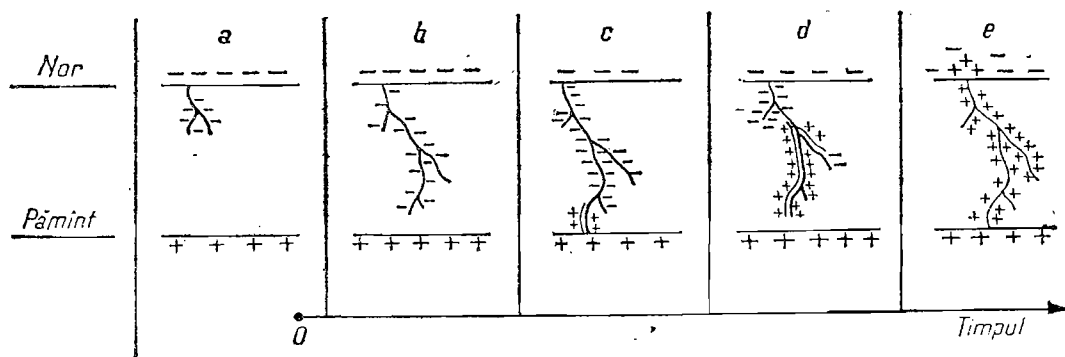


Fig. III.1.28

Diferența de potențial între cele două extremități ale norului este de  $10^8$  —  $10^9$  V (!), iar sarcina medie care se scurge în timpul descărcării este de aproximativ 20 C.

Energia care se degajă este de circa  $10^{10}$  J, iar timpul în care se epuizează fenomenul este de 6—24  $\mu$ s. Intensitatea curentului electric în zona fulgerului atinge valori maxime de peste 200 000 de amperi, media situându-se la 20 000 A.

b) **Paratrăsnetul** este o construcție care ajută la protecția clădirilor împotriva trăsnetelor, ferindu-le de incendii (fig. III.1.29) și se prezintă sub forma unor vergele metalice montate pe diverse construcții înalte. Paratrăsnetul este legat la pământ printr-o sîrmă groasă. Dacă trece pe *deasupra* lui un nor cu baza negativă, paratrăsnetul se electrizează prin influență avînd capătul pozitiv (fig. III.1.29a). Datorită cîmpului electric intens din zona vîrfurilor, sarcinile de la baza norilor sînt atrase, se scurg spre vîrf și apoi prin paratrăsnet spre Pămînt. Se evită astfel șocul violent al loviturii. Cînd norii au o

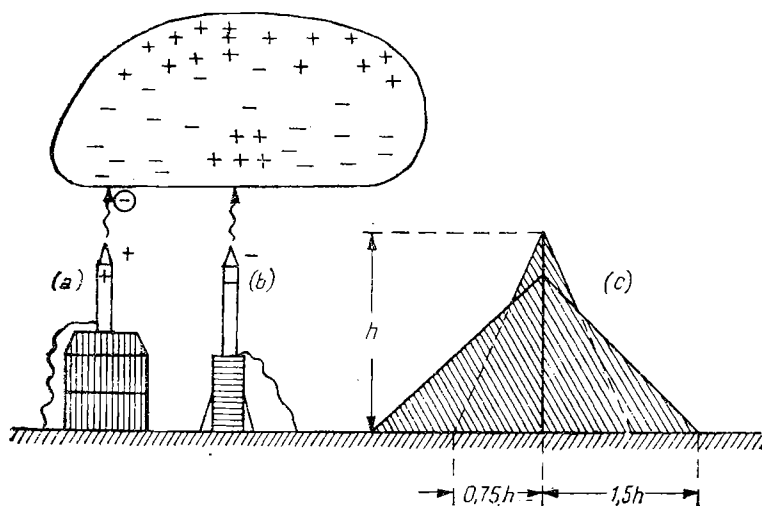


Fig. III.1.29



regiune pozitivă la bază, fenomenul este inversat (fig. III.1.29b), sarcinile negative se scurg de pe paratrăsnetul spre nor. Procesele astfel expuse sînt mai rare pentru că ar trebui să fie nori de joasă altitudine. În mod normal paratrăsnetul canalizează trăsnetul spre Pămînt. Zona protejată este o funcție de înălțimea  $h$  a paratrăsnetului (fig. III.1.29c).

c) **Cîmpul aeroelectric.** Am insistat mai mult asupra electricității norilor pentru că fenomenele respective, necontrolate încă de om, continuă să aibă acțiune distructivă materială și psihologică. Există însă și alte aspecte ale atmosferei, insesizabile, dar a căror prezență afectează atît telecomunicațiile cît și starea psihică a oamenilor. Cîmpul *aeroelectric* este unul dintre acestea, dar incomplet investigat. Este vorba de existența unui cîmp electric în jurul Pămîntului, dirijat de sus în jos, astfel că Pămîntul apare încărcat electric negativ în permanență. Intensitatea lui variază neregulat cu altitudinea, dar are și variații diurne regulate: este minim la ora 4 și maxim la ora 19 după meridianul Greenwich. Existența lui, fluctuațiile ca și descrierea detaliată au făcut obiectul multor cercetări. Printre modelele elaborate s-a impus vreme de peste 30 de ani cel elaborat de C.T.R. Wilson care a tratat acest cîmp în limitele condensatorului sferic. Deoarece există un aport continuu de ioni pozitivi spre Pămînt, menținerea intensității cîmpului aeroelectric la același nivel nu este încă pe deplin înțeleasă. Wilson însuși a presupus că are loc și un transfer de sarcini negative spre Pămînt, din baza negativă a norilor. În ultimii ani, prof. Alexandru Grigoriu a emis o nouă ipoteză pentru a explica menținerea acestui cîmp, ipoteză axată pe presupunerea evaporării apei sub formă de molecule încărcate pozitiv. Ideea este foarte interesantă deoarece pe baza ei au fost interpretate variațiile diurne ale cîmpului aeroelectric în felul următor: s-a calculat durata medie de expunere la Soare a uscatului și a oceanelor și s-a ținut seama de perioada optimă de evaporare, în limitele căreia, apa, care se încălzește mai greu, se evaporă după mult timp de la răsăritul Soarelui, spre deosebire de uscat, care se încălzește mai ușor și deci evaporarea va începe mai devreme. Statistica efectuată de dînsul, la scara globului, furnizează rezultate surprinzător de acceptabile. Sînt necesare desigur experiențe numeroase, în diverse puncte, diferențiate ca latitudine, longitudine și altitudine, pentru a certifica valabilitatea uneia sau alteia dintre ipoteze.

d) **Centurile de radiații**, sau centurile van Allen, au constituit una dintre veritabilele surprize oferite de sateliți și de rachetele sondă. S-a aflat astfel că Pămîntul este încorsetat de zone de particule încărcate, care se rotesc în jurul lui. Perturbarea acestor zone constituie una din sursele perturbatoare ale radiocomunicațiilor. În esență, există două centuri de radiații (fig. III.1.30): a) Centura I-a, numită și *centură protonică*, este formată din protoni (nuclee de hidrogen) și se întinde aproximativ între 500 și 6000 km altitudine. Ea se prezintă (vezi secțiunea V) sub forma a două calote puțin asimetrice, dispuse deasupra punctelor vest și est. Asimetria este legată de faptul că axa polilor magnetici este deplasată față de axa polilor geografici; b) Centura a II-a este *centura electronică*, plasată între 8000 și 60 000 km (fig. III.1.30). Perturbațiile acestei centuri sînt produse în special prin captarea electronilor din „vîntul” solar.

Punem punct aici acestei expuneri, mai lungă în raport cu precedentele, dar scurtă în raport cu varietatea fenomenelor prin care sperăm că am atras atenția tinerilor noștri cititori asupra fabuloasei bogății de aspecte evidențiate de electricitatea atmosferică.

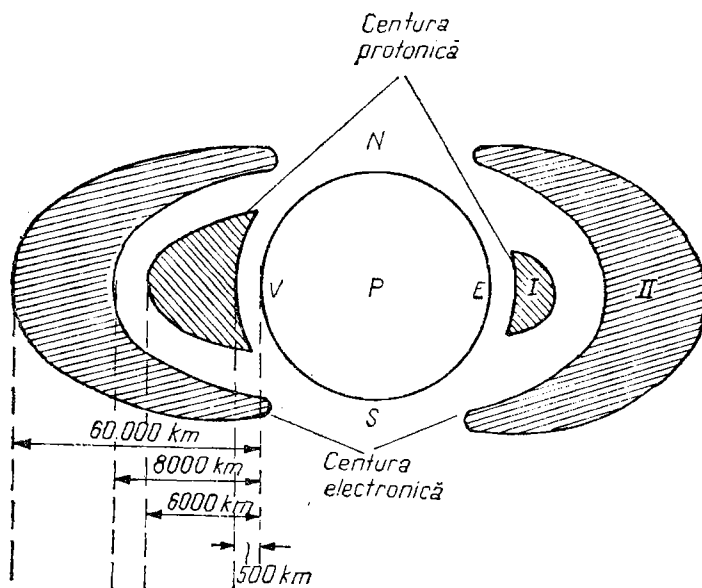


Fig. III.1.30

## 1.8. FEROELECTRICITATEA ȘI PIEZOELECTRICITATEA

a) **Feroelectricitatea** este o proprietate extrem de interesantă, pe care o posedă unele substanțe, dintre care cel mai cunoscut este titanatul de bariu ( $\text{BaTiO}_3$ ). Această proprietate constă în existența unei polarizări spontane, în interiorul unor cristale, în absența câmpului electric exterior. Dacă ne im-

aginăm un ansamblu de dipoli electrici orientați, pentru  $\vec{E} = 0$ , avem imaginea unui aranjament feroelectric. Ferroelectricitatea a fost descoperită în 1921 de Valasek pe sarea Rochelle, care a fost preparată prima dată în secolul al XVII-lea de doctorul de la Seignette ca ... laxativ. De aceea în Europa, această ordine spontană este numită și *seignetteoelectricitate*. Denumirea de feroelectricitate i-a fost atribuită prin analogie cu feromagnetismul, care este proprietatea unor metale și aliaje de a avea ordine magnetică spontană.

Câmpul electric joacă un rol aparte în aceste materiale deoarece în absența lui substanța nu ne apare polarizată spontan, adică nu posedă un capăt pozitiv, iar celălalt negativ. Fizicienii au demonstrat teoretic și experimental că ordinea feroelectrică există permanent, în anumite materiale, pe regiuni mici numite *domenii feroelectrice*, dar acestea sînt orientate astfel încît, în ansamblu, substanța nu ne apare polarizată. O ilustrare schematică a modelului expus este prezentată în fig. III.1.31a în care sînt desenate domenii feroelectrice în care vectorul polarizării are orientări antiparalele. Dacă se aplică un câmp electric extern intens ( $> 5 \cdot 10^3 \text{ V/cm}$ ) substanța ne apare polarizată în întregime (fig. III.1.31b). Trebuie menționat că, în general, ordinea feroelectrică este stabilă numai pînă la o anumită temperatură (temperatură de tranziție), caracteristică fiecărei substanțe. Peste această temperatură ordinea dispare

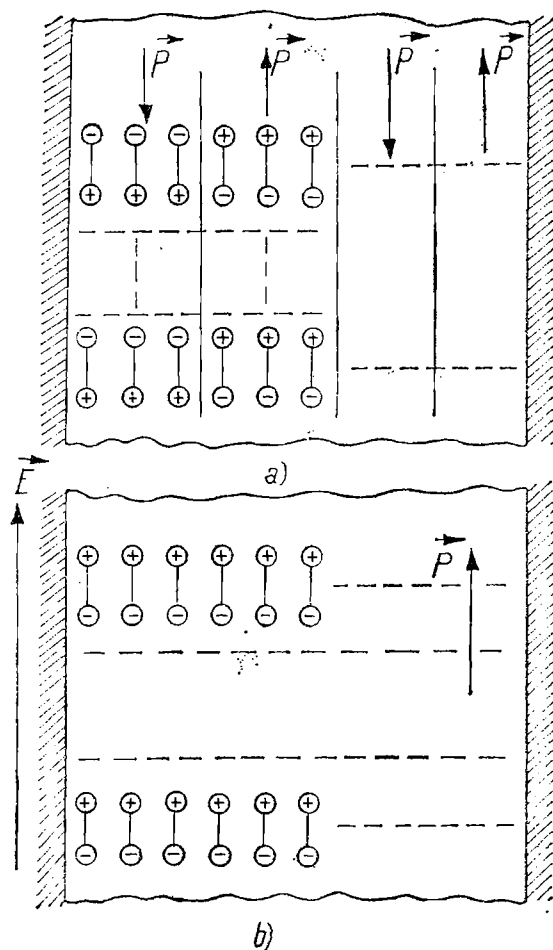


Fig. III.1.31

și substanța se comportă ca un dielectric format din dipoli dezordonați. Menționăm aici că există feroelectrici fără temperatură de tranziție, deoarece temperatura de topire este suficient de scăzută pentru ca materialul să se topească înaintea dispariției ordinii feroelectrice.

Teoretic, este posibil ca prin reducerea dimensiunilor unui feroelectric la forma de ac, acesta să nu mai posede o structură de domenii și deci să fie polarizat în absența câmpului extern, să ne apară deci ca un dipol macroscopic. Dacă plasăm un colectiv de ace polarizate într-o rășină topită (sau un material plastic topit) și le supunem acțiunii unui câmp electric extern, acele se vor orienta. Prin răcirea topiturii în câmp electric, întreaga masă rezultantă va fi polarizată electric rămânând în această stare și după înlăturarea câmpului. Produsul obținut este un *electret* asemănător celui fabricat prima dată în Japonia de Eguchi în 1922. Dar electreți pot fi obținuți nu numai pe această

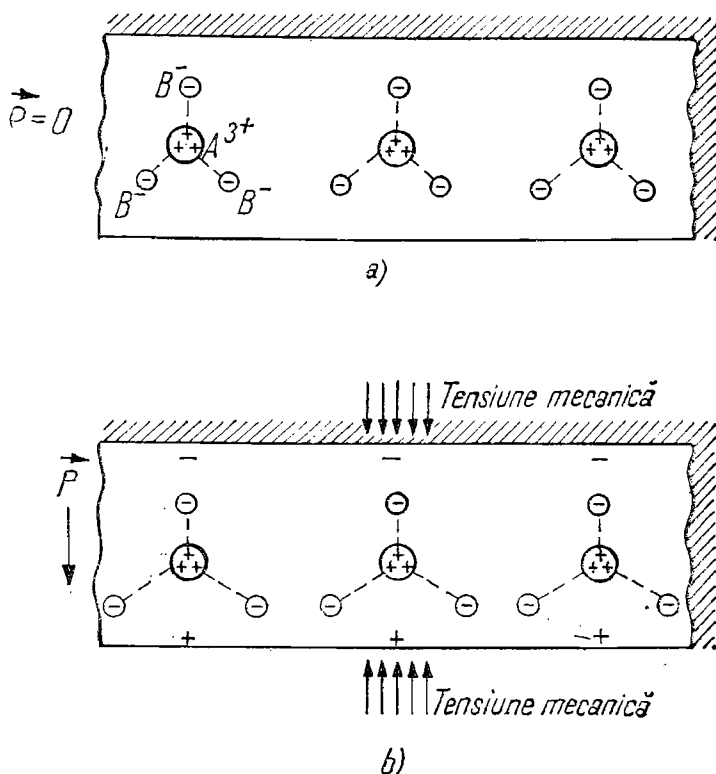


Fig. III.1.32

cale ci și din alte materiale, unele fiind și la îndemîna dumneavoastră: plexiglas, ceară de albine, asfalt etc.

b) **Piezoelectricitatea și electrostricțiunea.** S-a observat că unele materiale supuse deformației elastice, comprimare sau alungire, se electrizează într-un sens și respectiv, în sens invers. Aceasta este *efectul piezoelectric*. El a fost descoperit pe toate substanțele feroelectrice, dar și pe unele neferoelectrice, cum ar fi, de pildă, cuarțul. Prima explicație a fost elaborată de lordul Kelvin. Ea poate fi înțeleasă dacă facem apel la o construcție simplă (fig. III.1.32a) în care rețeaua cristalină este formată din molecule triunghiulare de tipul  $AB_3$ , în sensul că fiecare ion de tip A pozitiv, de pildă  $A^{3+}$  este înconjurat de trei ioni monovalenți negativi de tip B ( $B^-$ ). Dacă supunem cristalul unei tensiuni mecanice, o comprimare de exemplu (fig. III.1.32b), se deformează aranjamentul ionilor și substanța se polarizează. După înlăturarea tensiunii, în cazul deformației elastice, dispare și polarizarea odată cu deformația.

Fenomenul invers, numit *electrostricțiune*, constă în apariția unei deformații mecanice în prezența unui câmp electric. Dacă acest câmp va fi aplicat și întrerupt în mod regulat, atunci și substanța se va deforma și va reveni la starea normală, urmăriind la frecvențe mici pulsațiile câmpului electric. Modul cel

mai convenabil de studiere a electrostricțiunii îl constituie confecționarea unui condensator prin depunerea de strate metalice (argint, aur) subțiri, pe care se aplică un câmp electric alternativ astfel încît lamela cristalină va executa oscilații mecanice cu aceeași frecvență. Așa s-a născut *generatorul de ultrasunete* a cărui frecvență de lucru și amplitudine a oscilațiilor sînt controlate prin intermediul frecvenței și intensității câmpului electric aplicat din exterior.

Dar despre ultrasunete și aplicațiile lor ați învățat deja, așa încît ne vom opri aici!

## 2. Curentul electric staționar

### 2.1. NATURA CURENTULUI ELECTRIC

**Definiția curentului. Purtătorii de curent.** În capitolul precedent ne-am fixat atenția asupra modului de descriere a interacțiunilor între sarcinile electrice imobile, a fenomenelor de electrizare și modului de distribuire a electricității, fără a distinge elementul nou care apare prin punerea în mișcare a electricității. Electricitatea se mișcă atunci când legăm, de exemplu, un conductor încărcat de altul neutru pînă cînd se egalează potențialele celor două corpuri. Punerea în evidență a mișcării sarcinilor electrice se poate arăta cu ajutorul electroscopului, care este un aparat simplu (fig. III.2.1a), format dintr-o tijă metalică terminată cu două foițe metalice foarte subțiri, confecționate de obicei din aur. Atunci cînd vergeaua metalică este pusă în contact cu un conductor încărcat, foițele se resping (fig. III.2.1b), unghiul dintre ele fiind proporțional cu cantitatea de electricitate înmagazinată prin scurgerea pe electroscop.

Prin legarea electroscopului la un conductor neutru se observă cum unghiul dintre foițe se micșorează ceea ce ne arată o scurgere de sarcini de pe electroscop (fig. III.2.1c). Atunci cînd diferența de potențial dintre cele două corpuri a devenit nulă, curgerea de sarcină încetează. O sarcină electrică se poate însă mișca nu numai într-un conductor ci și în spațiul liber, prin aer sau vid, dacă este sub acțiunea cîmpului electric creat de o altă sarcină electrică. Generalizînd, se poate spune că un colectiv de sarcini electrice plasat într-un cîmp electric se mișcă între două regiuni dacă între ele există o diferență de potențial. Prin definiție, *sarcinile electrice aflate în mișcare constituie un curent electric*. Pînă la acest punct am legat mișcarea sarcinilor de existența unui cîmp electric, dar ele se pot mișca și sub acțiunea altor factori, cum ar fi, de exemplu, diferența de concentrație, sau diferența de temperatură între două regiuni ale unui conductor. Mișcarea sub acțiunea cîmpului electric constituie un *curent de conducție*, iar în ultimele cazuri avem de-a face cu un *curent de difuzie* și respectiv un *curent termoelectric*. Difuzia apare atunci cînd într-o regiune a unui conductor (sau semiconductor) au apărut într-un mod oarecare un număr de sarcini electrice în plus față de regiunile vecine și reprezintă tendința de egalizare a concentrației lor. Curentul termoelectric este tot o difuzie de sarcini din regiunile mai calde ale unui conductor (sau semiconductor) în regiunile mai reci pentru că odată cu transportul de sarcină are loc un transport de energie cinetică, mișcarea datorîndu-se tendinței de egalizare a temperaturilor.

Definiția curentului electric nu este legată nici de mediul prin care are loc mișcarea, ea cere doar existența sarcinilor electrice libere numite și *purtători*

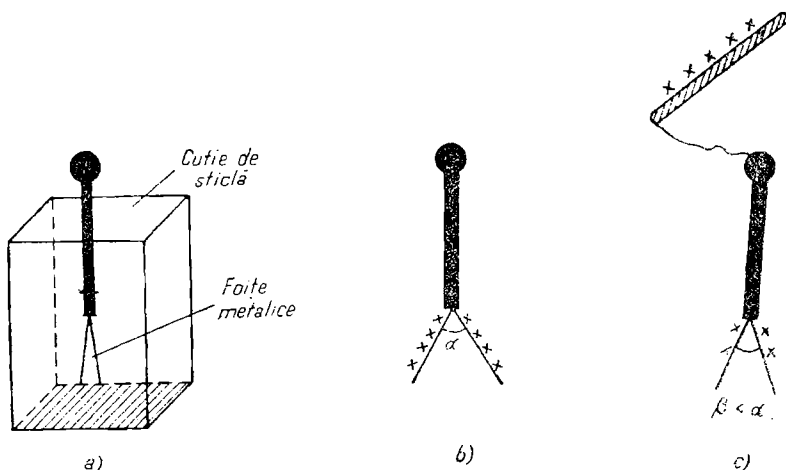


Fig. III.2.1

de curent, precum și a unui factor care să producă această mișcare. În cele ce urmează ne vom referi în special la mișcarea sub acțiunea câmpului electric.

Cît timp persistă curentul electric? Cum procedăm ca să-l menținem? Iată două întrebări cheie. Prima dintre ele este legată de faptul că dacă am aplica un câmp electric exterior unui ansamblu de sarcini libere (de exemplu, electroni) distribuite întâmplător într-un volum limitat (fig. III.2.2), sarcinile s-ar mișca spre un capăt al domeniului pînă se stabilește un echilibru. Cu alte cuvinte, curentul electric ar avea un caracter tranzitoriu, adică ar exista în intervale scurte de timp. Din aplicațiile practice știm însă că există curenți electrici a căror durată poate fi foarte lungă (ore, zile chiar). Pentru ca sarcinile să circule un timp îndelungat trebuie lichidată acumularea lor de la un capăt al volumului. Se poate realiza acest lucru prin legarea celor două zone (fig. III.2.2b) prin exterior cu ajutorul unei sîrme conductoare, astfel că diferența de potențial între capetele sîrmei ajută la mișcarea sarcinilor negative în sens invers, prin exterior. Cînd ajung la capătul opus al domeniului sînt puse din nou în mișcare sub acțiunea câmpului, astfel că pe circuitul volum cu sarcini — conductor exterior se stabilește un *curent electric continuu*. Sensul lui este ales în mod convențional în tehnică ca fiind sensul de mișcare a sarcinilor pozitive. Pentru a-l menține avem nevoie, în primul rînd, de un rezervor de sarcini, iar în al doilea rînd, de un câmp electric aplicat din exterior. Este clar că pentru deplasarea sarcinilor se consumă energie, care se obține pe seama lucrului mecanic efectuat de câmpul electric exterior. Menținerea câmpului electric exterior necesită un consum de energie (mecanică, termică, chimică, luminoasă) din afara sistemului respectînd astfel principiul conservării energiei. În felul acesta trebuie create izvoare (surse) de curent numite și *generatoare de curent*.

Purtători de curent pot fi electronii (*curent electronic*) și ionii (*curent ionic*) în funcție de mediul prin care se mișcă. În solide curentul este, în esență, electronic. Exemplul cel mai cunoscut îl constituie metalele în care purtători sînt electronii de valență. În modelul elaborat de Drude și Lorentz la începutul

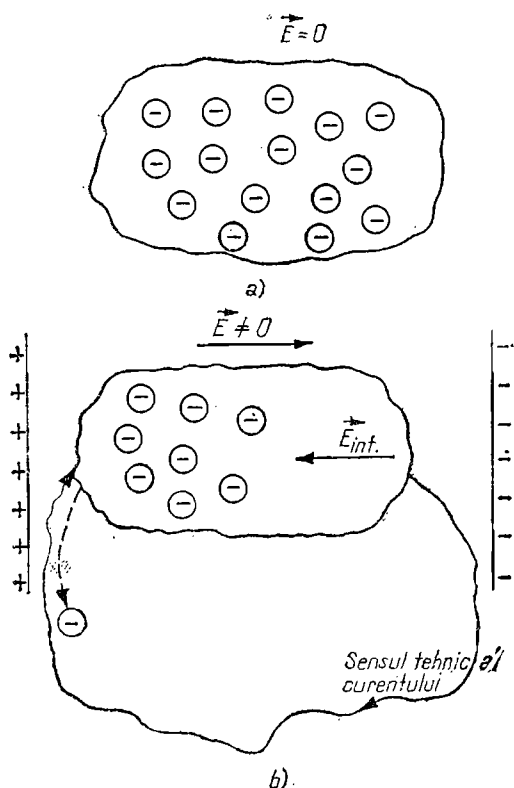


Fig. III.2.2

secolului nostru, metalul era conceput ca o rețea de ioni pozitivi „cufundată” într-un gaz de electroni liberi, conceput ca un gaz perfect. În felul acesta, într-un metal de valență  $z$ , există  $z\mathcal{N}$  electroni liberi pe molecula-gram.

În electroliți, curentul este dat de ioni pozitivi și negativi care apar prin disociația electrolică. De pildă, într-o soluție apoasă de NaCl purtători de curent vor fi ionii  $\text{Na}^+$  și  $\text{Cl}^-$ .

În gaze, curentul electric este determinat în general de mișcarea electronilor și ionilor pozitivi care apar în urma proceselor de ionizare. Dacă gazele sînt formate din molecule ionice, de tipul  $\text{H}^+ \text{Cl}^-$ , acestea pot fi disociate sub acțiunea radiațiilor astfel că printre purtătorii de curent se numără și ionii negativi.

O noțiune folosită în mod curent este concentrația purtătorilor ( $n$ ), care este dată de numărul de purtători pe unitatea de volum. Concentrația poate să fie constantă ca în metale  $\left( n = \frac{z\mathcal{N}}{v}, v \text{ fiind volumul molar} \right)$  sau variabilă

în funcție de o serie de parametri. Astfel, în electroliți depinde de concentrația substanței disociate, iar în semiconductori este funcție de temperatură: la  $0^\circ\text{K}$ ,  $n = 0$ , dar crește odată cu ridicarea temperaturii. Despre mecanismul respectiv vom vorbi în partea consacrată fizicii solidului (VI).



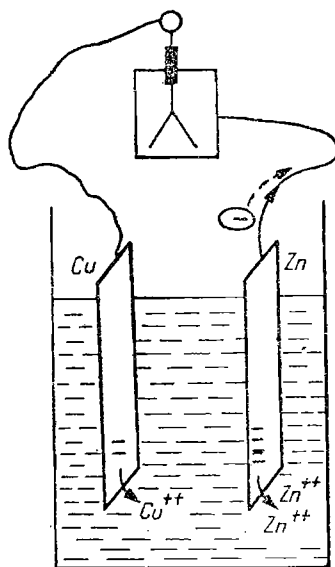
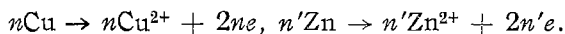


Fig. III.2.3

b) **Surse de curent.** Se folosește de obicei noțiunea de *sursă de tensiune* pentru a arăta că izvorul respectiv servește la menținerea cîmpului exterior, care va pune în mișcare sarcinile unui rezervor. Vom utiliza expresia din titlu pentru că unui observator extern totul îi apare ca și cum izvorul ar genera curent. Majoritatea izvoarelor vor fi descrise pe scurt urmînd ca explicații suplimentare asupra unora să fie dezvoltate în alte capitole.

*Sursele chimice* sînt primele izvoare folosite din punct de vedere istoric, exemplul tipic fiind *pila lui Volta*, formată dintr-o placă de cupru și una de zinc scufundate în apă acidulată (fig. III.2.3). După cum se știe, dacă legăm prin exterior cele două plăci, se constată apariția unui curent electric. Constatarea poate fi făcută indirect prin montarea unui electroscope ale cărui foițe sînt deviate în urma încărcării. Apariția curentului este legată de viteza de dizolvare diferită a celor două metale. În cazul de față, numărul de ioni de zinc ce trec în soluție în unitatea de timp este mai mare decît numărul de ioni de cupru. Pentru a reacționa cu radicalul acid, metalul se dizolvă sub formă de ioni pozitivi lăsînd pe electrozi cîte doi electroni:



Deoarece viteza de dizolvare este diferită,  $n' > n$ , sarcina înmagazinată pe electrodul de zinc este mai mare decît cea de pe cupru, astfel că primul apare încărcat negativ față de cupru și deci prin legarea lor exterioară se stabilește un curent electric.

*Sursele termice* sînt izvoare care folosesc energia termică. Între două plăci metalice, între care există vid, aer, sau alt dielectric, nu trece curentul electric. Prin încălzirea unei plăci se poate închide circuitul deoarece apar purtători de curent prin emisie din metalul încălzit. Fenomenul respectiv este

numit *emisie termoelectronică*, sau *termoionică* în funcție de natura emisiei. Alte surse de acest tip sînt sursele *termoelectrice* bazate pe apariția unei diferențe de potențial în metale și semiconductori în prezența unei diferențe de temperatură.

*Sursele optice* se bazează pe emisia de electroni din materiale sub acțiunea luminii, adică prin efect fotoelectric, care va fi analizat în IV și VI.

## 2.2. MĂRIMI ȘI NOȚIUNI FUNDAMENTALE

a) **Intensitatea curentului.** Dacă vom face o analogie între curentul electric și curgerea unui fluid, apare atunci necesară introducerea unei mărimi care să descrie viteza de scurgere a sarcinilor electrice, analogă debitului. Această mărime este *intensitatea* notată cu  $I$  și este definită prin *cantitatea de electricitate ce trece în unitatea de timp printr-o suprafață dată*:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \text{ sau } I = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.1)$$

Unitatea de măsură în SI este *amperul* și reprezintă intensitatea curentului produs la trecerea unui coulomb printr-o suprafață dată, în timp de o secundă:  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} = 3 \cdot 10^9 \text{ u.CGS}_{es}$ . Ecuația dimensională pentru  $I$  în sistemul SI este:

$$[I] = \text{I}.$$

Intensitatea curentului este măsurată cu *ampermetrul* montat în serie în circuit ca în fig. III.2.4., astfel încît tot curentul să treacă prin el. O calitate esențială a unui instrument de măsură, pe lângă precizie, este aceea de a nu modifica valorile mărimilor de măsurat prin introducerea lor în circuit. În consecință, un ampermetru va trebui să consume o cantitate mică din energia curentului electric.

Intensitatea astfel introdusă, definește mișcarea globală prin suprafața indicată ( $S$ ). Uneori însă este necesar să cunoaștem valorile intensității în diferite puncte ale suprafeței folosindu-se în acest scop noțiunea de *densitate de curent* ( $j$ ) ca fiind intensitatea pe unitatea de arie, sau cantitatea de electricitate ce se scurge în unitatea de timp ( $\Delta t$ ) prin unitatea de suprafață plasată perpendicular pe direcția curentului ( $\Delta S$ ):

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}. \quad (2.2)$$

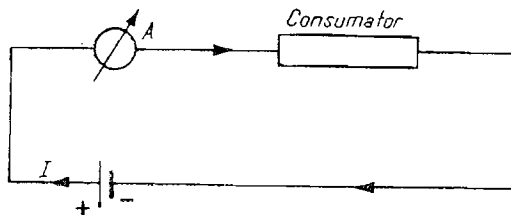


Fig. III.2.4

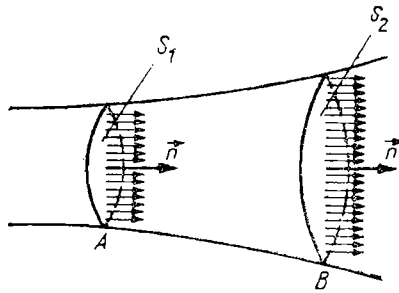


Fig. III.2.5

Densitatea de curent este un vector care are sensul mișcării sarcinilor pozitive ( $\vec{j} = j\vec{n}$ ), descris de versorul  $\vec{n}$ , al normalei la suprafața  $\Delta S_{\perp}$ , ales în sensul de curgere a curentului. Se poate da ușor o legătură între densitatea de curent și densitatea sarcinii de volum dacă scriem cantitatea de electricitate  $\Delta Q$  care se scurge prin suprafața  $\Delta S_{\perp}$  cu viteza medie  $\bar{v}$  în timpul  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = \rho_e \Delta V = \rho_e \Delta S_{\perp} \bar{v} \Delta t,$$

de unde rezultă:

$$j = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = \rho_e \bar{v}, \quad (2.3a)$$

unde  $\bar{v}$  este viteza medie de deplasare a sarcinilor. Relația vectorială are forma:

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}. \quad (2.3b)$$

O altă expresie utilă este legată de concentrația purtătorilor  $n$ . Ea este obținută ținând seama că:

$$\rho_e = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{Ze}{V} = ne \Rightarrow j = ne\bar{v}, \quad (2.4)$$

unde  $N$  este numărul de ioni metalici din volumul  $V$ , care au  $Z$  electroni de valență, iar  $\bar{v}$  este viteza medie în lungul unei direcții de mișcare.

b) **Curenți staționari.** Vom recurge din nou la analogia dintre curentul electric și curgerea unui fluid. Curgerea staționară a fluidelor este definită prin debitul constant, adică prin  $\rho Sv = \text{const.}$ ,  $\rho$  fiind densitatea lui. Curentul staționar sau continuu este definit prin intensitatea constantă în timp, oricât de mare ar fi aceasta din urmă. Pentru a vedea ce consecințe decurg din această definiție, să examinăm cazul unui conductor de secțiune variabilă (fig. III.2.5) prin care circulă un curent electric. În volumul delimitat de suprafața laterală a conductorului și de cele două suprafețe se mișcă sarcinile astfel că  $\Delta Q_1$  sarcini intră prin  $S_1$  și  $\Delta Q_2$  sarcini ies prin  $S_2$ . Dacă nu există surse de curent în acest volum și nici centre care să capteze purtători, atunci  $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ , adică, în virtutea legii conservării sarcinii, cantitatea de electricitate care intră prin  $S_1$  în unitatea de timp, iese prin  $S_2$  într-un interval egal de timp. Rezultă deci că  $I_1 = I_2$ , deci intensitatea curentului staționar este aceeași în orice secțiune a conductorului.

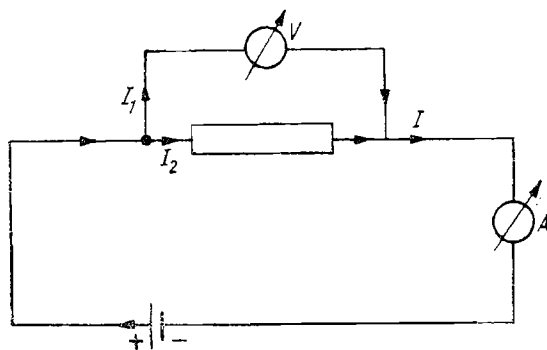


Fig. III.2.6

O altă consecință a definiției curentului staționar este legată de noțiunea de *linie de curent* definită prin curba la care este tangent în orice punct vectorul densitate de curent, definită deci de traiectoriile pe care se mișcă sarcinile pozitive. Deoarece curentul este staționar, ar trebui să ne imaginăm niște rezervoare de curent inepuizabile. Cum această condiție este irealizabilă, pentru a avea curenți staționari este necesar ca liniile de curent să fie închise. Aceasta înseamnă că atunci când curentul este întreținut, de exemplu, de o sursă chimică, liniile de curent se închid prin intermediul sursei.

c) **Tensiunea electrică și tensiunea electromotoare (TEM).** În capitolul I a fost introdusă diferența de potențial între două puncte ( $V_1 - V_2$ ) care este numeric egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa o sarcină pozitivă egală cu unitatea între punctele respective. Această noțiune se menține și în descrierea curenților, numai că este numită *tensiune* ( $U$ ), sau *cădere de tensiune* între două puncte ale circuitului. Unitățile de măsură sînt identice cu cele definite anterior pentru potențial. Tensiunea între două puncte ale circuitului sau la bornele unui consumator se măsoară cu *voltmetrul*, care se montează în circuit ca în fig. III.2.6. Pentru a nu perturba curentul, voltmetrul este astfel construit încît curentul deviat prin el să fie foarte slab.

O noțiune de o importanță deosebită pentru electricitate este *tensiunea electromotoare* (TEM), notată cu  $\mathcal{E}$ . Ea este numeric egală cu energia (lucrul mecanic) consumată pentru a deplasa prin tot circuitul o sarcină pozitivă, egală cu unitatea. Dacă sarcina este deplasată prin circuitul exterior sursei, atunci lucrul mecanic consumat pentru deplasarea sarcinii pozitive unitate de la o bornă la alta este numeric egal cu *tensiunea la borne* ( $U_b$ ), iar lucrul mecanic cheltuit pentru a deplasa aceeași sarcină prin interiorul sursei este egal cu tensiunea interioară  $U_i$ . Deci  $\mathcal{E}$  va fi:

$$\mathcal{E} = U_b + U_i. \quad (2.5)$$

d) **Rezistența electrică. Legea lui Ohm.** Experiența ne arată că dacă aplicăm tensiuni diferite ( $U_1, U_2, \dots$ ) la capetele unui conductor, intensitățile curenților vor fi diferite,  $I_1, I_2, \dots$ , dar proporționale cu tensiunea aplicată:  $I \sim U$ , constanta de proporționalitate fiind notată cu  $1/R$ ,

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (2.6)$$

Mărimea  $R$ , astfel introdusă, poartă numele de *rezistență electrică* și reprezintă o rezistență opusă trecerii curentului electric prin substanțe. Relația (2.6) reprezintă *legea lui Ohm* pentru o porțiune de circuit.

Se poate scrie ușor legea lui Ohm pentru întreg circuitul dacă ținem seama că sarcinile se mișcă atât prin circuitul exterior de rezistență  $R$  cât și prin interiorul sursei de rezistență  $r$ :

$$U_b = IR, U_i = Ir \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (2.6')$$

Pentru a determina factorii de care depinde rezistența electrică pot fi întreprinse următoarele experiențe: 1) aplicarea aceleiași tensiuni la capetele unor conductori cu geometrie identică (lungime și secțiune egală), dar din materiale diferite, ne arată că rezistența electrică depinde de natura substanțelor; și 2) pentru aceeași substanță rezistența depinde de geometria conductorului, fiind proporțională cu lungimea  $l$  și invers proporțională cu secțiunea  $S$ . Sintetizând aceste observații s-a putut scrie formula rezistenței electrice:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.7)$$

în care  $\rho$  este o caracteristică a fiecărui material, numită *rezistivitate*. Ea ne arată faptul că la lungimi și secțiuni egale, substanțe diferite prezintă rezistențe diferite. Inversul rezistivității poartă numele de *conductivitate*

*electrică* sau *coeficient de conductibilitate electrică* ( $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ). Dimensiunile rezistenței electrice în SI sînt:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = L^2MT^{-3}I^{-2},$$

iar unitatea de măsură în SI este ohmul ( $\Omega$ ). Un ohm măsoară rezistența între două puncte ale unui circuit dacă trece un curent de 1 amper sub o tensiune de 1 volt:  $1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$ . Rezistivitatea este măsurată în SI în  $\Omega \cdot m$ , dar în multe lucrări se mai folosește o unitate tolerată ( $\Omega \cdot cm$ ).

Vom prezenta, în continuare, o altă expresie a legii lui Ohm pornind de la definiția densității de curent pentru un circuit omogen și izotrop:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{\rho l} = \sigma E, \text{ sau } \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.8)$$

Relația (2.8) constituie legea lui Ohm pentru densitatea de curent, numită uneori și legea lui Ohm sub formă locală.

O altă noțiune importantă rezultă din compararea relației (2.8) cu (2.3) și (2.4):

$$\rho_e \vec{v} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = ne \frac{v}{E} = ne\mu, \quad (2.9)$$

unde  $\mu = \frac{\vec{v}}{E}$  reprezintă *mobilitatea purtătorilor*, este dată de viteza lor medie

pe unitatea de intensitate a câmpului electric, fiind astfel o caracteristică a substanțelor, ca și  $\sigma$ .

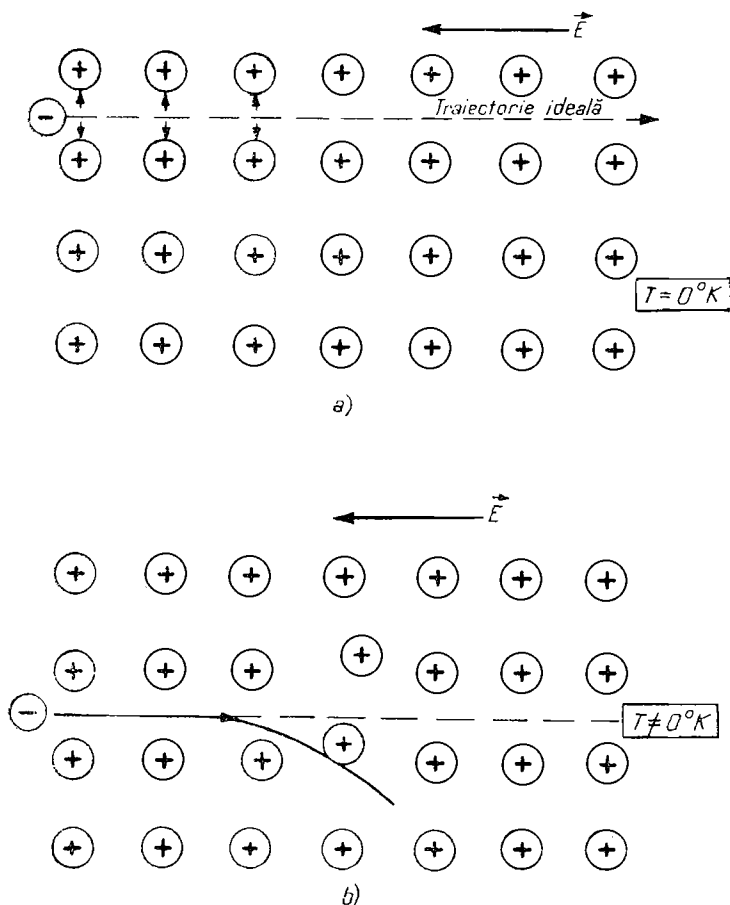


Fig. III.2.7

Prin definirea mobilității am ușurat trecerea la discutarea naturii fizice a rezistenței electrice. Deoarece rezistivitatea este invers proporțională cu mobilitatea, ea poate fi legată de influența mediului asupra mișcării accelerate a purtătorilor. Dacă ne-am imagina un purtător plasat în vid, atunci acesta s-ar mișca nestingherit. Dacă însă purtătorul s-ar mișca într-un gaz, atunci ar suferi numeroase ciocniri și viteza lui medie de deplasare în lungul liniilor de câmp ar fi diminuată. Este normal să ne imaginăm acum că numărul de ciocniri va fi și mai mare în lichide, unde densitatea este mai ridicată și deci probabilitatea de ciocnire cu particulele lichidului este crescută.

Apare de neînțeles, la prima vedere, de ce un electron nu s-ar mișca nestingherit într-o rețea cristalină în care există ordine întrucât atomii sînt forțați să ocupe anumite poziții de echilibru. Într-adevăr, electronii au la dispoziție „canalele” dintre ionii pozitivi (fig. III.2.7a) în interiorul cărora suferă acțiunea atractivă simetrică din partea ionilor din pozițiile cristaline și deci nu ar avea loc ciocniri. Aceasta ar fi situația la  $0^\circ K$  (fig. III.2.7a) unde ionii

din nodurile rețelei ar fi imobili. La temperaturi diferite de  $0^\circ\text{K}$ , din cauza agitației termice, ionii execută mișcări de oscilație în jurul pozițiilor de echilibru din care cauză nici atracția exercitată asupra electronului nu mai este simetrică apărând astfel posibilitatea devierii electronului de la direcția câmpului electric (fig. III.2.7b). Deoarece agitația termică este mai puternică la temperaturi mai ridicate, crește și amplitudinea de oscilație a ionilor, deci și probabilitatea de ciocnire a electronului cu ionii din nodurile rețelei. Din această cauză rezistivitatea unui metal crește odată cu creșterea temperaturii. Experiența ne arată că această creștere este aproximativ liniară:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha_\rho t),$$

$\rho_0$  fiind rezistivitatea la  $0^\circ\text{C}$ , iar  $\alpha_\rho$  — coeficientul termic al rezistivității.

Pentru deducerea legii lui Ohm vom folosi modelul electronilor liberi, propus de Drude și Lorentz, în limitele căruia, toți electronii de valență ai unui metal se mișcă liber, comportarea lor fiind asemănătoare cu mișcarea haotică a moleculelor unui gaz perfect: în absența unui câmp electric, numărul de electroni care se mișcă într-un sens este egal cu numărul celor care se mișcă în sens contrar. Să presupunem că urmărim numai o direcție de mișcare pe care o identificăm cu direcția câmpului electric aplicat după axa  $x$ ,  $\vec{E}(E, 0, 0)$ . Densitatea de curent pe această direcție depinde de viteza medie:

$$j_x = ne\bar{v}_x. \quad (2.10)$$

Din ecuația de mișcare a unui electron:

$$m_e a = F = eE \Rightarrow a = \frac{eE}{m_e},$$

deducem expresia vitezei ținând seama că intensitatea câmpului este constantă:

$$v_x = v_0 + at = v_0 + \frac{eE}{m_e} t, \quad (2.11)$$

unde  $v_0$  reprezintă viteza inițială, în absența câmpului. Viteza medie va fi obținută ca raportul între suma vitezelor pe un număr mare de intervale de timp și numărul acestor intervale. În primul rînd, în absența câmpului media lui  $v_0$  este nulă ( $\bar{v}_0 = 0$ ) deoarece electronul se mișcă cu egală probabilitate atît într-un sens al axei  $x$  cît și în sens invers, deci dacă într-un interval de timp se va mișca într-un sens, în alt interval se poate mișca în sens invers. Schimbarea de sens are loc datorită ciocnirilor. Timpul mediu dintre două ciocniri se numește *timp de relaxare* ( $\tau$ ) și a fost introdus prin analogie cu mișcarea moleculelor în gaze. Cu aceste noțiuni, (2.11) devine:

$$\bar{v}_x = \bar{v}_0 + \frac{eE}{m_e} \bar{t} = \frac{Ee}{m_e} \tau, \quad (2.11')$$

deoarece am luat media prin sumarea despre care am amintit mai înainte,

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \tau.$$

Densitatea de curent devine:

$$j_x = \frac{ne^2 E \tau}{m_e} = \sigma E, \quad (2.12)$$

de unde rezultă expresia conductibilității mediului:

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}. \quad (2.13)$$

Folosind (2.12), legea lui Ohm este obținută imediat:

$$I = j_x S = \sigma E S = \sigma \frac{S}{l} (El) = \frac{U}{R}.$$

Pentru a calcula pe  $j$  nu am folosit decât conceptul de electroni care se mișcă haotic, suferă ciocniri, iar sub acțiunea unui câmp electric capătă o mișcare de ansamblu de deplasare (sau de drift). Timpul de relaxare în metale este de ordinul  $10^{-14} - 10^{-15}$  s la temperatura camerei.

e) **Rezistoare.** Rezistoarele sînt dispozitive folosite în circuitele electrice pentru a regla valoarea intensității curentului. Distingem două tipuri mari de rezistoare: a) fixe, b) variabile. Rezistoarele fixe sînt confecționate din anumite materiale, care într-o geometrie dată prezintă o anumită valoare a rezistenței. Există trei clase principale de astfel de rezistoare: *chimice*, cu *vid* și *strat subțire*. Rezistoarele chimice, cele mai răspîndite astăzi în tehnica radio, sînt confecționate din materiale ceramice ce conțin pulbere metalică dispersată uniform sau din ceramică cu peliculă de carbon. Ele sînt stabile pe un domeniu relativ îngust de temperatură ( $100-200^\circ\text{C}$ ), dar acoperă un domeniu larg, de la cîțiva ohmi pînă la  $10^7 \Omega$ .

Rezistoarele cu aer la presiune scăzută se prezintă sub forma unor tuburi de sticlă sau cuarț, cu doi electrozi la capete și în care există aer la diferite presiuni. Rezistența electrică a unui astfel de dispozitiv este funcție atît de presiune cît și de geometria tubului (lungime și secțiune). Pe această bază au fost confecționate rezistoare de  $10^{20}-10^{11} \Omega$ . Rezistoarele confecționate cu strate subțiri metalice, de grosimi ce ating pînă la  $50-100 \text{ \AA}$ , oferă posibilitatea micșorării gabariturii circuitelor electronice, deoarece stratele subțiri metalice îndeplinesc atît funcție de rezistor cît și de legătură între diferitele elemente ale circuitului. Să luăm, de pildă, un metal cu rezistivitate de  $10^{-3} \Omega \cdot \text{cm}$ . Un strat subțire, lung de 1 cm, lat de 1 mm și gros de  $100 \text{ \AA}$  ( $= 10^{-6} \text{ cm}$ ) ar avea o rezistență de  $100 \Omega$ . La prima vedere s-ar părea că pe această cale am putea obține doar rezistențe mici. În realitate, fizicienii au descoperit că pe măsură ce scade grosimea stratelor, de la aproximativ 1 micron ( $10^{-4} \text{ \AA}$ ), rezistivitatea începe să crească odată cu micșorarea grosimii, astfel că dependența rezistenței

de dimensiuni nu mai ascultă de legea simplă  $\left( \rho \frac{l}{s} \right)$ . În acest fel, stratele subțiri

posedă rezistivități de 10, 100, sau chiar 1000 de ori mai mari decât materialele masive. Rezistoarele de acest tip se obțin prin evaporarea metalelor în vid, peste care se depune un strat izolator protector, și sînt folosite în circuitele microminiaturizate.

În cadrul rezistoarelor variabile distingem mai multe tipuri: cu *geometrie variabilă*, *fotorezistențe*, *termistori*.



Rezistoarele cu geometrie variabilă sînt confecționate astfel încît să se introducă în circuit conductoare diferite ca lungime și secțiune. Cele mai reprezentative rezistoare de acest tip sînt reostatul (cu cursor, sau cu manivelă), cutia de rezistențe (cu fișe sau cu butoane), potențiometrul. Acesta din urmă este folosit în mod curent în electronică și servește atît ca rezistență variabilă cît și ca divizor de tensiune (va fi descris în paragraful consacrat unor procedee practice).

*Fotorezistențele*, așa cum arată de altfel și titlul, sînt rezistoare sensibile la acțiunea luminii, iar *termistorul* este confecționat din materiale semiconductoare a căror rezistență electrică scade puternic odată cu creșterea temperaturii.

Înainte de încheierea acestor detalii trebuie menționat faptul că există trei modele grafice de notare a rezistorului:



### 2.3. CIRCUITE ELECTRICE

a) **Legile lui Kirchhoff.** Legile, sau teoremele lui Kirchhoff se referă la circuite (rețele) electrice, care oricît de complicate ar fi sînt formate din intersecții ale conductorilor numite *noduri* și din *ochiuri* care sînt circuite închise. *Legea I-a a lui Kirchhoff* se referă la noduri și anume: dacă prin convenție luăm cu semnul (+) curenții care intră într-un nod, iar cu semn opus pe cei

care ies, atunci *suma algebrică a curenților într-un nod este nulă*:  $\sum_{k=1}^n I_k = 0$ .

Dacă presupunem că din cei  $n$  curenți,  $n'$  intră în nod ( $I_k^{\rightarrow}$ ), iar restul ies din nod ( $I_k^{\leftarrow}$ ) atunci legea spune că suma curenților care vin este egală cu suma curenților care pleacă:

$$\sum_{k=1}^{n'} I_k^{\rightarrow} = I^{\rightarrow} = \sum_{k=n'+1}^n I_k^{\leftarrow} = I^{\leftarrow}. \quad (2.14)$$

Această lege este o consecință a legii conservării sarcinilor, deoarece cantitatea de electricitate care intră în nod trebuie să fie egală cu cea care iese din nod. O analogie intuitivă poate fi urmărită în figura III.2.8. în care curenții sînt asimilați, pentru un circuit simplu cu două noduri și două ramuri, cu o curgere staționară a unui lichid printr-un ansamblu similar de conducte. Trebuie precizat însă că legea este valabilă numai dacă în nod nu există o sursă de curent.

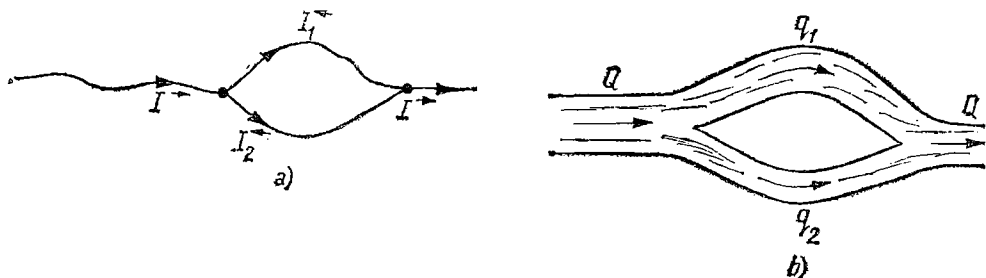


Fig. III.2.8

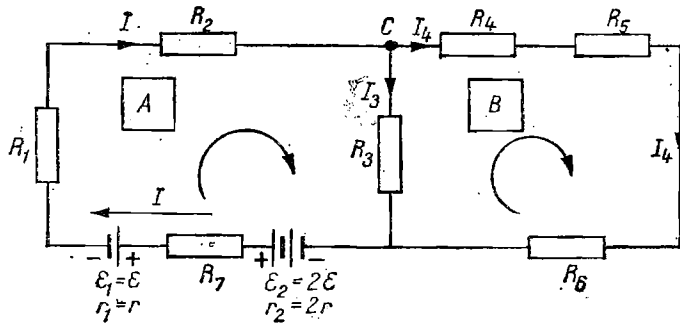


Fig. III.2.9

*Legea a II-a a lui Kirchhoff* se referă la ochiuri și anume: suma algebrică a căderilor de tensiune pe un ochi de rețea este egală cu suma tensiunilor electromotoare ale surselor montate pe acesta:

$$\sum_{j=1}^m I_j R_j = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (2.15)$$

Pentru a scrie corect relațiile, trebuie ales un sens de parcurgere: căderile de tensiune corespunzătoare curenților de acest sens se iau pozitive, iar cele corespunzătoare curenților de sens contrar sînt luate cu semn negativ. La fel se procedează cu tensiunile electromotoare ale surselor. Pentru a exemplifica aplicarea acestor legi să ne referim la circuitul din fig. III.2.9, care are două ochiuri:

$$I(R_1 + R_2 + R_7 + 3r) + I_3 R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon \quad \text{pentru ochiul A,}$$

$$I_4(R_4 + R_5 + R_6) - I_3 R_3 = 0 \quad \text{pentru ochiul B,}$$

$$I = I_3 + I_4 \quad \text{pentru nodul C.}$$

b) **Gruparea rezistoarelor.** Gruparea în serie se compune dintr-un număr de rezistoare ( $R_1, R_2, \dots, R_n$ ), legate unul după altul (fig. III.2.10) închizînd circuitul unei baterii de tensiune electromotoare  $\varepsilon$  și rezistență internă  $r$ .

Pentru a găsi rezistența unui rezistor echivalent ( $R$ ), adică a unui rezistor prin care să circule un curent cu aceeași intensitate  $I$  cînd este montat la bornele bateriei, aplicăm legea a II-a a lui Kirchhoff și obținem relațiile:

$$\varepsilon = I(R + r) = U + U_1, \quad (2.16)$$

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n I R_j = I \sum_{j=1}^n R_j. \quad (2.17)$$

Comparînd (2.17) cu (2.16) obținem rezistența echivalentă a circuitului serie, ca fiind suma rezistențelor:

$$R = \sum_{j=1}^n R_j. \quad (2.18)$$

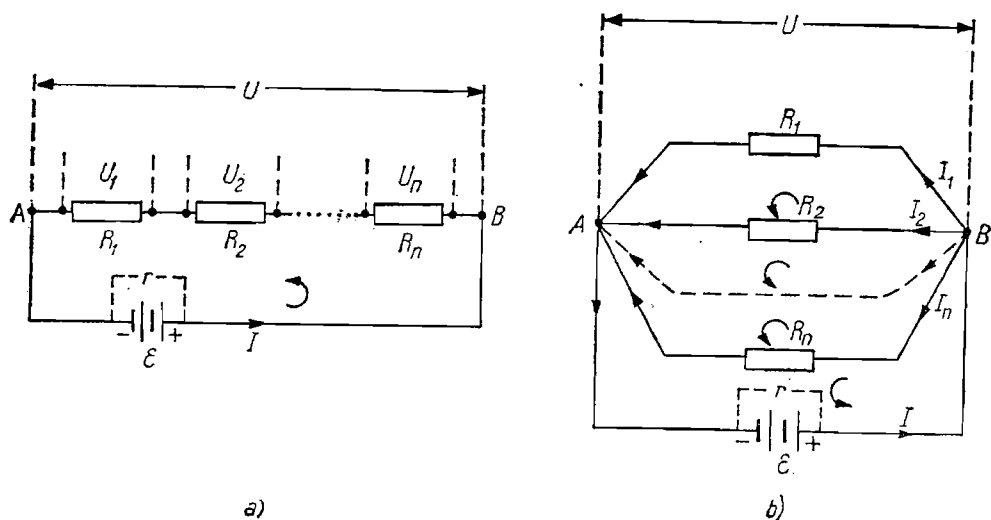


Fig. III.2.10

*Gruparea în paralel* (sau derivație) se obține prin legarea tuturor rezistoarelor între două puncte A și B, astfel că, pentru a găsi rezistența echivalentă  $R$ , aplicăm prima lege a lui Kirchhoff și obținem:

$$I = \sum_{j=1}^n I_j = \frac{U}{R}, \quad (2.19)$$

iar din legea a doua, aplicată fiecărui ochi, rezultă:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0, \dots, I_{n-1} R_{n-1} - I_n R_n = 0 \\ I_n R_n + I r = \mathcal{E} = U + U_i. \quad (2.20)$$

Tensiunea de-a lungul fiecărei ramuri este egală cu  $U$ ,

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n = U. \quad (2.21)$$

Introducând valorile curenților  $\left(I_j = \frac{U}{R_j}\right)$  în relația (2.19) obținem:

$$I = U \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} = U \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}, \quad (2.22)$$

adică inversul rezistenței echivalente a circuitului derivație este egală cu suma inverselor rezistențelor.

*Circuite particulare.* Există două tipuri de circuite particulare importante pentru transportul energiei electrice și anume, circuitul „stea” și circuitul „triunghi”. Între aceste două circuite se pot stabili relații astfel încât dacă cunoaștem elementele unuia sîntem în stare să calculăm elementele celui alt

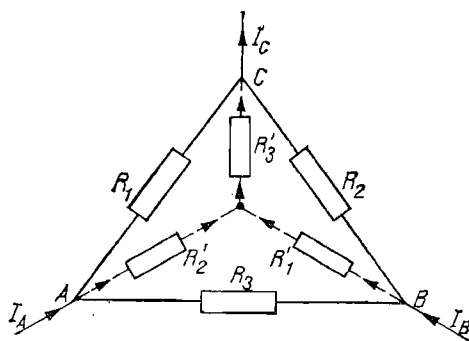


Fig. III.2.11

cînd circuitele sînt echivalente. Două circuite sînt echivalente dacă la aceeași tensiune la borne circulă în exterior curenți de intensitate egală. Pentru exemplificare (fig. III.2.11) să presupunem că s nt cunoscute elementele circuitului „triunghi” ( $R_1$ ,  $R_2$   i  $R_3$ )  i vrem să calculăm rezistențele unui circuit „stea” ( $R'_1$ ,  $R'_2$ ,  $R'_3$ ), echivalent cu primul. Echivalen a cere ca între fiecare două puncte rezistențele să fie egale. De exemplu, pentru punctele A  i B:

$$(R_{AB})_{tr} = (R_{AB})_{stea} \text{ etc.} \quad (2.23)$$

Pentru aceste puncte,  $(R_{AB})_{stea} = R'_1 + R'_2$ ,  $(R_{AB})_{tr} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$ , de unde

rezultă o relație de tipul:

$$R'_1 + R'_2 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (2.24)$$

 n mod analog sînt obținute relațiile  i pentru celelalte perechi de puncte:

$$R'_2 + R'_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R'_1 + R'_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (2.24')$$

Cele trei rezistențe  $R'_1$ ,  $R'_2$   i  $R'_3$  pot fi ușor obținute:

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R'_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.24'')$$

c) **Gruparea generatoarelor.** Gruparea generatoarelor are  i ea implicații deosebit de importante în practica electrotehnicienilor pentru formarea bateriilor de acumulatori, sau a surselor de curent. Alegerea unui tip de grupare este funcție de scopul urmărit: curent mare, sau surse cu rezistență internă mică.

*Gruparea în serie* se obține prin legarea mai multor generatoare cu tensiunile electromotoare ( $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ , ...,  $\mathcal{E}_n$ ), astfel  nc t borna pozitivă a unuia să fie unit 

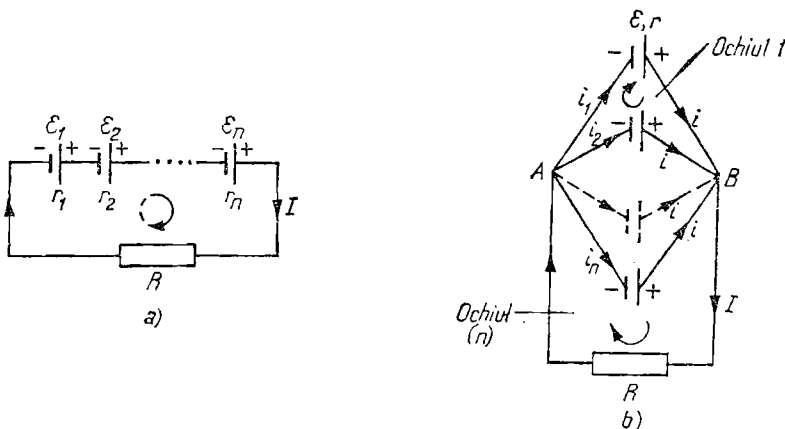


Fig. III.2.12

cu cea negativă a următorului ș.a.m.d. (fig. III.2.12a). Aplicînd a doua lege a lui Kirchhoff obținem:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i = I \left( R + \sum_{i=1}^n r_i \right) \Rightarrow I = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i}{R + \sum_{i=1}^n r_i}. \quad (2.25)$$

Dacă generatoarele sînt identice ( $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \dots = \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ ,  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ ), atunci intensitatea curentului este dată de:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr}. \quad (2.25')$$

Pentru a grupa în paralel (fig. III.2.12b) mai multe generatoare, este necesar ca ele să fie identice deoarece ar debita curent unul celuilalt datorită diferenței de tensiune electromotoare. De aceea pentru cele  $n$  generatoare, grupate astfel încît bornele de un tip să fie legate la același punct, tensiunea electromotoare a bateriei între bornele AB este:  $\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}$ . Acest lucru se poate demonstra folosind legea a II-a a lui Kirchhoff pentru toate ochiurile: ochiul (1)  $i_1 r - i_2 r = \mathcal{E} - \mathcal{E} = 0 \dots$ , deci  $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$  și atunci, pentru ochiul (n) există relația:

$$IR + ir = \mathcal{E}. \quad (2.26)$$

Din ultima relație obținem pe  $I$  dacă ținem seama că  $i = I/n$ :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}} = \frac{n\mathcal{E}}{nR + r}. \quad (2.27)$$

Relația (2.27) mai poate fi obținută și pe altă cale: se consideră o sursă echivalentă de tensiune  $\mathcal{E}$  și rezistență dată de gruparea paralelă a rezistențelor

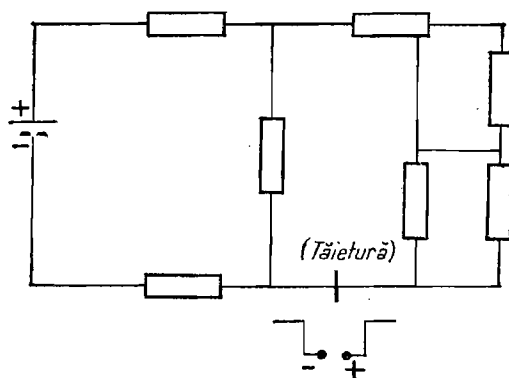


Fig. III.2.13

interne ( $r_{\text{tot}} = \frac{r}{n}$ ), astfel că legea lui Ohm aplicată întregului circuit ne furnizează aceeași expresie.

Examinînd relațiile (2.25') și (2.27) pentru  $r < R$ , curentul furnizat de gruparea în serie este mai intens, dar căderea de tensiune în interiorul sursei este mai mare. Dacă  $r = R$ , atunci folosirea uneia sau alteia dintre variante nu constituie decît o problemă de comoditate.

d) **Generatorul Thévenin și generatorul Norton.** *Generatorul de tensiune* (Thévenin) G.U. Înaintea prezentării unor detalii precizăm de la început că este vorba de două montaje diferite în care o sursă de tensiune poate alimenta un circuit exterior (o rezistență de sarcină). Să considerăm în acest scop, un circuit mai complicat (fig.III.2.13) în care facem o tăietură. Capetele rămase libere, indiferent de forma și complexitatea circuitului, constituie două borne, numite „dipol activ”, iar diferența de potențial între ele este numită *tensiune în gol* ( $U_{\text{gol}}$ ). Dipolul este echivalent cu un generator fictiv de tensiune (G) ( $U_{\text{gol}} = \mathcal{E}$ ) și o rezistență  $R_g$  (fig. III.2.14a) legată în serie cu el. Sub această

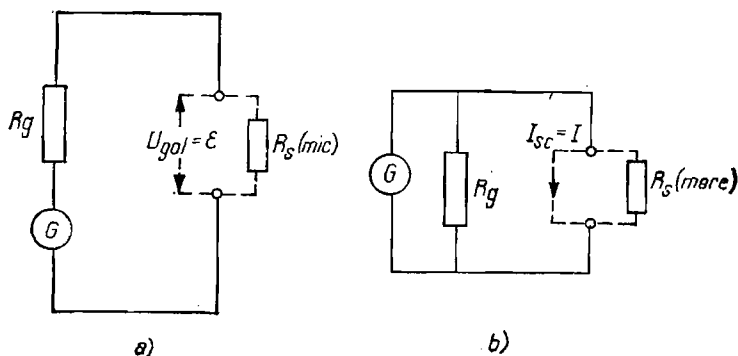


Fig. III.2.14

reprezentare dipolul constituie un *generator Thévenin* și el servește la alimentarea unei rezistențe de sarcină mică,  $R_s$ , montată între aceste borne.

*Generatorul de curent* (Norton) G.I. este reprezentat în fig. III.2.14b, când în dipol rezistența  $R_g$  este montată în paralel, iar curentul care trecea prin conductor, înainte de tăietură, se numește curent de scurtcircuit ( $I_{sc}$ ). În acest caz, generatorul servește la alimentarea unei rezistențe de sarcină mare,  $R_s$  (mare).

Se poate arăta că cele două regimuri de lucru sînt echivalente. Vom pleca de la parametrii celor două tipuri de generatoare:

	$G.U.$	$G.I.$
Tensiunea în gol	$U_g = \mathcal{E}$	$U_g = IR_g$
Curentul de scurtcircuit	$I = \frac{\mathcal{E}}{R_g}$	$I_{sc} = I.$

La aceleași borne însă tensiunile în gol și curenții de scurtcircuit sînt egali, ceea ce arată că  $IR_g = \mathcal{E}$ .

## 2.4. PROCEDEE PRACTICE ÎN TEHNICA MĂSURĂTORILOR ELECTRICE

a) **Protejarea instrumentelor de măsură.** Uneori instrumentele pe care le avem la îndemînă nu pot măsura curenți și tensiuni decît pînă la anumite valori, de aceea trebuie prevăzute măsuri atît pentru protejarea lor cît și pentru extensia domeniilor de lucru.

*Șuntul ampermetrului* constituie o rezistență, în general mică, montată în paralel cu instrumentul, astfel încît prin el curentul maxim care trece să fie egal cu cel pe care-l suportă, adică atunci când acul deviază pe toată scala ( $I_a$ ) (fig. III.2.15a). Deoarece ampermetrul este montat în serie pe circuit, rezistența lui  $R_a$  trebuie să fie foarte mică pentru ca pe el să se consume o energie cît mai mică, respectiv, pentru ca tensiunea care cade pe el să fie cît mai mică. Din relațiile:

$$I = I_a + I_s, R_s I_s = R_a I_a, \quad (2.28)$$

obținem rezistența șuntului pentru ca ampermetrul să măsoare curenți mai mari decît  $I_a$ . Pentru cazul particular,  $I = nI_a$  (cu  $n = 10, 10^2, 10^3$ ), atunci  $R_s = \frac{R_a}{n-1}$  ( $R_s = R_a/9; R_a/99; R_a/999$ ). Pentru cazurile înscrise în paranteză am ilustrat schematic un aranjament experimental în fig. III.2.15a.

*Rezistența adițională a voltmetrului* este montată în serie cu el, atunci când tensiunea de măsurat este mai mare decît valoarea maximă pe care o suportă ( $U > U_v$ ). După cum se vede, voltmetrul fiind montat în paralel, preia de pe receptor o parte din curent ( $I_v$ ). Pentru ca perturbația circuitului să fie cît mai mică ( $I_v$  mic) trebuie ca rezistența voltmetrului  $R_v$  să fie foarte mare. În general vorbind, rezistența voltmetrelor este mult mai mare decît cea a ampermetrelor. Aplicînd legile lui Kirchhoff circuitului din fig. III.2.15b obținem

$$U = U_a + U_v, I_a = \frac{U_a}{R_a} = \frac{U_v}{R_v} \Rightarrow R_a = \frac{U - U_v}{U_v} R_v. \quad (2.29)$$

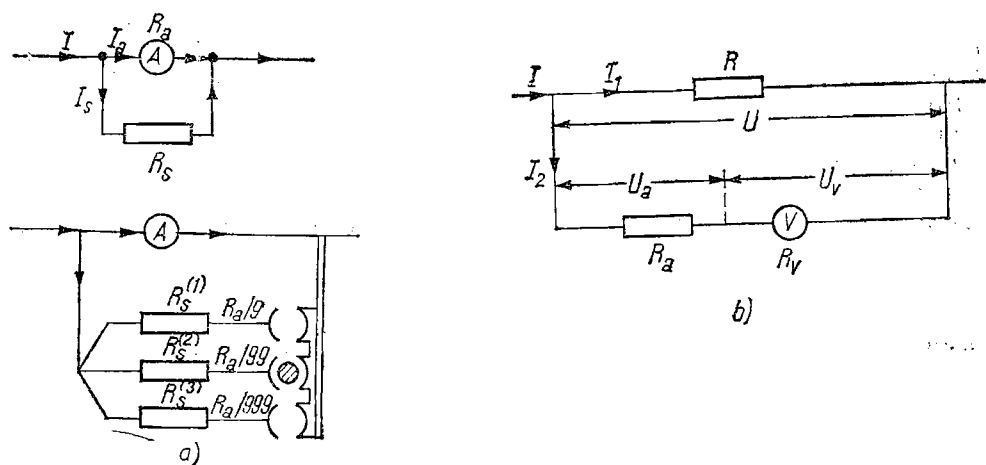


Fig. III.2.15

Atunci cînd dorim să extindem domeniul de măsură așa fel încît  $U/U_v = n$  ( $n = 10, 10^2, 10^3, \dots$ ), rezistența adițională are valoarea  $R_a = R_v(n - 1)$ , adică este mai mare decît rezistența voltmetrului de 9 ori, de 99 ori ș.a.m.d.

b) **Măsurarea rezistențelor.** Măsurarea precisă a rezistențelor prezintă o deosebită importanță în studiul proprietăților electrice ale corpului solid (metale, semiconductori, izolatori) dar problematica ridicată de cercetare nu este identică cu cea ridicată de necesitatea controlului rapid al rezistențelor din schemele electronice. De aceea au fost puse la punct diverse procedee,

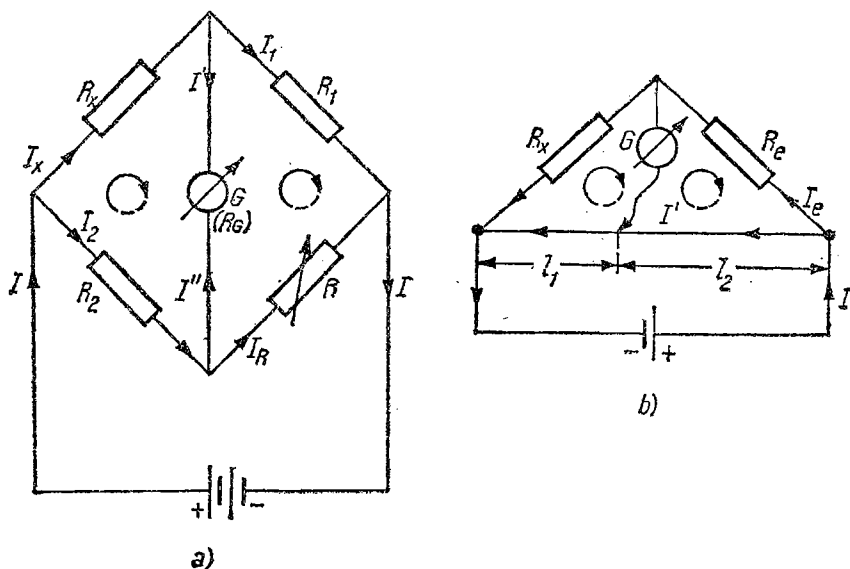


Fig. III.2.16



diferențiate din acest punct de vedere, adică unele mai expeditiv, dar mai puțin precise, iar altele care comportă măsurători de finețe mai ridicată.

*Metoda comparativă* constă în a compara curenții mășurați în circuitul unei surse cu caracteristici cunoscute ( $\mathcal{E}$  și  $r$ ) când introducem succesiv rezistența necunoscută ( $R_x$ ) și o rezistență etalon ( $R_e$ ). Când avem montată rezistența etalon, intensitatea este dată de  $I_e = \frac{\mathcal{E}}{R_e + r}$ , iar pentru  $R_x$ ,  $I_x = \frac{\mathcal{E}}{R_x + r}$ , astfel că din raportul curenților obținem:

$$\frac{I_e}{I_x} = \frac{R_x + r}{R_e + r} \approx \frac{R_x}{R_e} \quad (r \ll R_x, R_e), \quad (2.30)$$

aproximația fiind corectă atunci când rezistența internă este mult mai mică decât cea externă. Metoda este bună când rezistența internă a ampermetrului poate fi și ea neglijată în raport cu  $R_x$  și  $R_e$ .

Un procedeu de comparație, cu precizie sporită îl constituie puntea Wheatstone și varianta ei, puntea cu fir. Puntea Wheatstone este reprezentată schematic în fig. III.2.16a și este formată din patru brațe, două avînd rezistențele fixe și cunoscute, altul fiind variabil (în varianta desenată, acest rol este jucat de  $R$ ). Pe linia centrală este montat un instrument sensibil la curenți foarte mici (galvanometrul  $G$  cu rezistența  $R_G$ ), cu a cărui construcție ne vom întîlni mai tîrziu. Prin variația rezistenței  $R$  trebuie realizată condiția ca prin galvanometru să nu treacă nici un curent (metoda de „zero”), ceea ce implică  $I' = 0$ .

Aplicînd legile lui Kirchhoff pentru acest caz, obținem relațiile:

$$I = I_x + I_2 = I_1 + I_R, \quad I_x R_x = I_2 R_2, \quad I_1 R_1 = I_R R, \quad (2.31)$$

$$I_x = I_1, \quad I_2 = I_R,$$

de unde, prin efectuarea unor operații de eliminare a intensităților curenților se obține raportul:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R}. \quad (2.32)$$

În puntea cu fir (fig. III.2.16b) se montează pe lîngă rezistența necunoscută o rezistență fixă etalonată ( $R_e$ ), iar în locul a două brațe se prinde un fir, de secțiune riguros constantă, pe o scară gradată, cu o lungime bine determinată. Pe sîrmă poate culisa un contact ce împarte firul în raportul  $l_1/l_2$ , pînă când prin galvanometrul  $G$  nu trece nici un curent. Aplicînd din nou legile lui Kirchhoff obținem:

$$I_e R_e = I' \left( \rho \frac{l_2}{S} \right) \text{ și } I_x R_x = I' \left( \rho \frac{l_1}{S} \right), \quad (2.33)$$

astfel că rezistența necunoscută este dată de:

$$R_x = R_e \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.33')$$

Puntea cu fir are avantajul simplității, dar posedă și dezavantaje legate de fragilitate și deteriorarea firului (corodare, oxidare etc.).

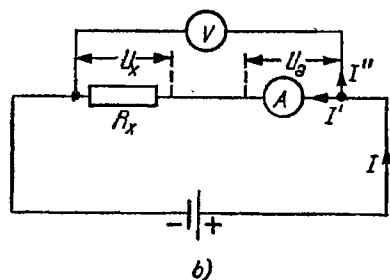
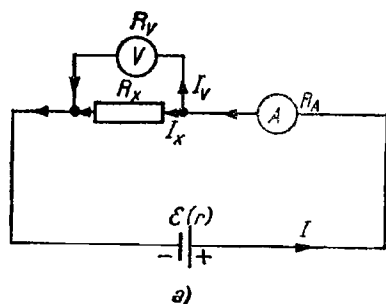


Fig. III.2.17

*Metoda tensiune-curent* constă în a măsura atât tensiunea cât și curentul astfel că din legea lui Ohm este evaluată rezistența. La prima vedere pare simplu, dar instrumentele de măsură nu sînt ideale astfel că trebuie să ținem seama de rezistențele lor interne. Există două variante diferențiate prin modul de dispunere al aparatelor: a) voltmetrul măsoară tensiunea pe rezistența necunoscută (fig. III. 2.17a), dar atunci o parte din curent ( $I_v$ ) trece prin voltmetru; b) ampermetrul măsoară curentul care trece prin rezistență (fig. III.2.17b), dar voltmetrul măsoară căderea de tensiune atât pe rezistență, cât și pe ampermetru. În varianta (a) sînt valabile relațiile:

$$I = I_x + I_v, \text{ pentru } R_v \gg R_x, I \approx I_x \Rightarrow R_x \approx \frac{U}{I}. \quad (2.34)$$

Dacă nu mai este respectată strict relația  $R_v \gg R_x$ , atunci  $R_x$  este dat de relația:

$$R_x = \frac{U}{I_x} = \frac{U}{(I - U/R_v)} = \frac{UR_v}{IR_v - U}. \quad (2.35)$$

În varianta (b) este măsurat corect curentul ( $I_x = I'$ ), dar tensiunea de pe rezistență este:

$$U_x = U - U_a = U - I'R_a \Rightarrow R_x = \frac{U - I'R_a}{I'}, \quad (2.36)$$

din care poate fi obținut aproximativ  $R_x$ , dacă  $R_a \ll R_x$ , adică  $R_x \approx U/I'$ .

c) **Divizorul de tensiune (potențiometrul)**. În practică sînt utilizate montaje care să permită divizarea tensiunii, numite montaje potențiometrice. Ca potențiometrul poate fi utilizat un reostat cu cursor, astfel încît sursa să dea-teze pe toată rezistența lui, tensiunea  $U$  (fig. III.2.18a, linia plină), iar valoarea necesară să fie culeasă între un capăt și cursor. Atunci cînd bornele A și B sînt libere (în gol), tensiunea  $(U_1)_{\text{gol}}$  este obținută din compararea relațiilor:

$$R_1 = kR \text{ și } (U_1)_{\text{gol}} = IR_1 = IkR = kU$$

adică:

$$(U_1)_{\text{gol}} = U \frac{R_1}{R}. \quad (2.37)$$

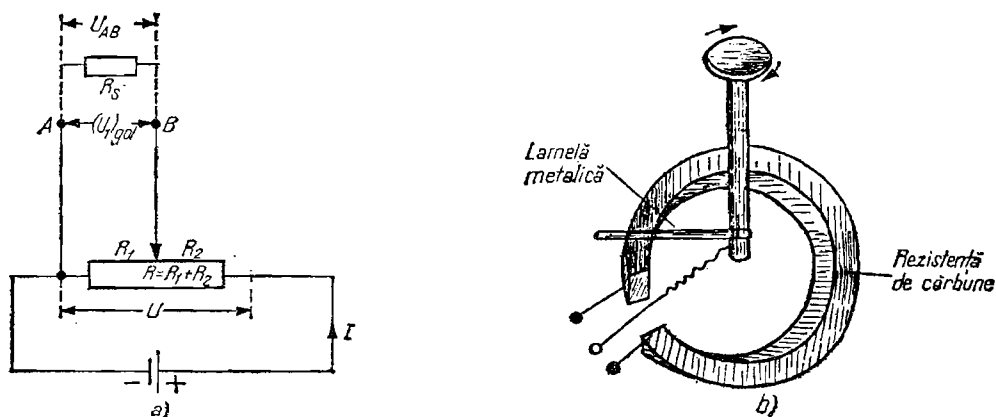


Fig. III.2.18

Fracțiunea culeasă între A și B este proporțională cu  $R_1/R$ . Pentru mer-sul în sarcină, tensiunea culeasă de pe  $R_1$  se aplică pe o rezistență  $R_s$  (fig. III.2.18a) cu linia punctată care face ca  $U_{AB} \neq (U_1)_{\text{gol}}$ . Din analiza circuitului respectiv se poate deduce valoarea lui  $U_{AB}$ :

$$U_{AB} = I' \left( \frac{R_1 R_s}{R_1 + R_s} \right) = U \cdot \frac{R_1 R_s}{R(R_1 + R_s) - R_1^2} \neq (U_1)_{\text{gol}}. \quad (2.38)$$

Se observă că pentru  $R_s \rightarrow \infty$ ,  $U_{AB} \rightarrow (U_1)_{\text{gol}}$ .

Potențiometrele din montajele electronice, cunoscute desigur de mulți dintre dumneavoastră, sînt construite tot pe principiul reostatului, dar de dimensiuni mai mici. Schematic (fig. III.2.18b) ele sînt construite dintr-o rezistență din *cărbune* granulat, presat, pe care se poate roti o lamelă metalică astfel că rezistența introdusă între un capăt și acest cursor este funcție de lungimea arcului de cerc respectiv. Se poate folosi de asemenea o rezistență confecționată dintr-un număr mare de spire.

## 2.5. EFECTELE CURENTULUI ELECTRIC

a) **Efectul Joule.** Sub această denumire este cunoscută transformarea energiei electrice în energie termică. Pentru a înțelege mai bine acest lucru să plecăm de la faptul că atunci cînd stabilim un contact între două borne ale unei surse, curentul electric se stabilește practic instantaneu. Se știe însă că electronii au o viteză de deplasare, de ansamblu, mică (față de viteza luminii), de  $10^5 - 10^6$  cm/s, astfel că, de fapt nu ei transportă energia cîmpului, ci se consumă lucru mecanic pentru deplasarea lor prin conductor, deoarece cîmpul electric există în spațiul din jurul conductorului, indiferent dacă am închis sau nu circuitul. Cîmpul electric pune însă în mișcare purtătorii și le întreține mișcarea prin învingerea rezistenței care se opune înaintării lor. Această energie consumată se transformă în energie termică, care, la rîndul

ei, are ca efect ridicarea temperaturii materialului respectiv (efectul Joule). Mărimea cantității de căldură trebuie legată de lucrul mecanic efectuat de cîmp pentru deplasarea sarcinilor, deci de *căderea de tensiune*. Cu alte cuvinte, pentru o porțiune de circuit, energia transformată este legată de energia consumată pentru a transporta sarcina  $q$  între două puncte avînd diferența de potențial  $U$ :

$$W = qU = UI t, \quad (2.39)$$

iar puterea respectivă are expresia:  $P = UI$ . Unitățile de măsură sînt identice cu cele din mecanică. Dacă această energie se transformă în căldură, atunci plecînd de la principiul echivalenței între cele două mărimi ( $W = JQ$ ), obținem:

$$Q(\text{cal}) = 0,24 U(\text{V}) \cdot I(\text{A}) \cdot t(\text{s}),$$

sau

$$Q(\text{J}) = UI t = \frac{U^2}{R} t = RI^2 t. \quad (2.40)$$

Dacă ținem seama că pentru a transporta sarcina  $q$  pe întreg circuitul, energia necesară este  $\mathcal{E}It$ , atunci randamentul circuitului pe care cade tensiunea  $U$  este dat de:

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + r}. \quad (2.41)$$

Relația este dedusă plecînd de la definiția randamentului (raportul dintre lucrul mecanic util și cel consumat) ținînd seama că lucrul mecanic util este efectuat pentru deplasarea sarcinilor prin circuitul exterior. Cu alte cuvinte, eficiența este cu atît mai mare cu cît rezistența sursei este mai mică și teoretic pentru  $r \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 1$ .

Un exemplu de pierderi de energie prin efect Joule sînt cele de pe rețelele electrice dintre generator și consumator, pierderi care sînt proporționale cu lungimea  $l$  a liniei ( $W_{\text{pierdut}} = 2\rho \frac{l}{s} I^2 t$ ). Este evident că pentru a le micșora trebuie folosiți conductori cît mai groși.

Studiul cantitativ al efectului Joule poate fi întreprins cu ajutorul calorimetrului în care se introduce un conductor de rezistență cunoscută. Măsurînd intensitatea curentului, timpul de observație și variația temperaturii  $\Delta T$ , cu ajutorul capacității calorice globale a calorimetrului ( $mc$ ), se stabilește egalitatea (modificînd, pe rînd, rezistența, intensitatea și timpul):

$$Jmc\Delta T = RI^2 t. \quad (2.42)$$

Cîteva observații sînt necesare. Pentru ca rezultatul să fie corect ar trebui ca rezistența electrică să nu se modifice cu temperatura, astfel ca  $R$  să fie considerat practic constant. De aceea, trebuie lucrat cu variații nu prea mari de temperatură. Să presupunem însă că  $R$  are un coeficient termic al rezistenței relativ mare, sau că  $\Delta T$  este suficient de mare. Pentru a obține rezultate corecte, vom folosi o rezistență medie, care pentru un metal este ușor de calculat în funcție de rezistențele la temperatura inițială  $t_1(R_1)$  și finală  $t_2(R_2)$ :

$$R_m = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_0 \left( 1 + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \right), \quad (2.43)$$

astfel că (2.42) devine:

$$Jmc \Delta T = \frac{U^2}{R_0 \left( 1 + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} t. \quad (2.42')$$

În scrierea relației (2.42') am făcut deja alte două presupuneri: una că dimensiunile conductorului nu se modifică prea mult, iar a doua, că tensiunea la borne rămâne aproximativ constantă.

*Aplicațiile efectului Joule* sînt diverse. În ansamblu, ele sînt legate de confecționarea becurilor cu incandescență, a aparatelor de încălzit, a cuptoarelor electrice, a siguranței fuzibile și a instrumentelor de măsură. Deoarece acestea sînt în general cunoscute nu vom insista asupra detaliilor de construcție. Este interesant, după părerea noastră, să menționăm un aspect al folosirii instrumentelor de măsurat, care ar funcționa pe baza dilatării unui conductor neoxidabil la trecerea curentului electric. Cum dilatarea relativă  $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$  este proporțională cu cantitatea de căldură degajată, deci cu energia curentului consumată, se poate stabili o etalonare între  $\frac{\Delta l}{l}$  și  $I^2$ . Dificultatea funcționării corecte a unui astfel de instrument este legată de faptul că mediul în care este plasat ar trebui să aibă aceeași temperatură, deoarece la același curent, viteza schimbului de căldură cu exteriorul este funcție de temperatura acestuia: se face mai ușor la temperaturi mai joase și mai greu la temperaturi mai ridicate. În felul acesta, temperatura conductorului ar fi diferită și deci și dilatarea diferită, ceea ce ar face ca valorile pe care le arată instrumentul să fie funcție de temperatura mediului. Practica a impus de aceea alte instrumente, bazate pe alte principii fizice.

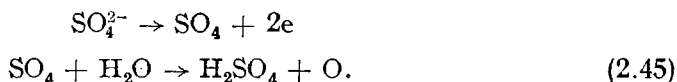
b) **Efecte chimice.** Dintre efectele chimice, cele mai importante sînt cele legate de înmagazinarea curentului electric (acumulatoarele) și electroliza soluțiilor și topiturilor.

*Acumulatoarele* servesc la păstrarea unei cantități de electricitate, mai bine zis a unei cantități de energie, introdusă în urma unui proces de încărcare, iar apoi la furnizarea ei sub forma unui curent continuu în procesul de descărcare. În esență, un acumulator este format din doi electrozi scufundați într-o soluție. După tipul electrozilor există acumulatoare cu plăci de plumb, fero-nichel, argint, în fiecare avînd loc reacții chimice diferite la încărcare, de cele din procesul descărcării. Înaintea descrierii lor pentru primul tip, sînt necesare unele precizări cu privire la acumulatoare. În primul rînd un acumulator nu trebuie folosit decît pînă la o tensiune limită, altfel se deteriorează. În al doilea rînd, trebuie manevrat cu atenție atît în timpul lucrului cît și la încărcare. Scurtcircuitarea bornelor atrage după sine debitarea unui curent foarte intens, care duce rapid la descărcare. La încărcare, bornele acumulatorului sînt conectate la un generator de curent continuu la bornele de același semn. Pentru ca acumulatorul să nu furnizeze el curent în generator este necesar ca tensiunea la bornele generatorului să fie mai mare decît cea a acumulatorului. În timpul încărcării, odată cu creșterea tensiunii acumulatorului ( $U_{ac}$ ) scade intensitatea curentului de încărcare dat de relația  $I_{inc} = \frac{U_g - U_{ac}}{R}$ , unde  $U_g$  este tensiunea generatorului, iar  $R$  este rezistența totală a circuitului.

Să trecem la prezentarea rapidă a unui acumulator cu plumb. Un acumulator apt pentru încărcare are două plăci de plumb scufundate într-o soluție de acid sulfuric. Prin disociație electrolitică,  $\text{H}_2\text{SO}_4$  trece în  $2\text{H}^+$  și  $\text{SO}_4^{2-}$ . Când legăm plăcile la bornele unui generator atunci ionii  $\text{H}^+$  se îndreaptă spre catod, unde are loc reacția:

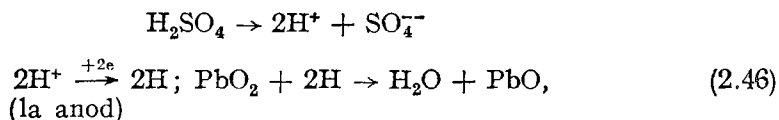


formându-se hidrogen care se degajă. Anionul se neutralizează și el la anod prin cedarea sarcinii, astfel că au loc relațiile:

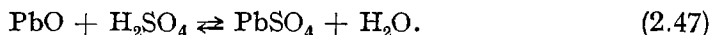


Oxigenul duce la formarea de  $\text{PbO}_2$  la anod, iar concentrația acidului sulfuric crește.

După cum se vede, nu se înmagazinează electricitate, ci trecerea curentului electric favorizează o anumită reacție chimică, în urma căreia avem de fapt doi electrozi diferiți; unul de plumb și altul de plumb cu un strat de  $\text{PbO}_2$ . La descărcare, sînt legate bornele între ele printr-o rezistență prin care trece un curent de la anod la catod, iar prin acumulator trece altul în sens invers, produs de mișcarea ionilor ce apar în următoarele reacții chimice:



adică hidrogenul se neutralizează la anod prin captarea unui electron, pozitivîndu-l pe acesta. Mai departe, interacția acidului sulfuric cu  $\text{PbO}$  conduce la formarea de sulfat de plumb:



Pe de altă parte, anionul  $\text{SO}_4^{2-}$  face același lucru prin depunerea sarcinii la catod, formînd deci tot  $\text{PbSO}_4$ . Se vede astfel că sarcina electronică lăsată de anionul  $\text{SO}_4^{2-}$  la catod, ajunge la anod prin circuitul exterior, furnizînd curentul de descărcare.

În continuare, acest sulfat interacționează cu hidrogenul:



iar la placa pozitivă se reface  $\text{PbO}_2$ . După cum se vede, ciclul de reacții este destul de complicat deși sînt prezentate numai cele principale.

*Electroliza* constituie mișcarea dirijată a ionilor într-un electrolit, sub acțiunea unui cîmp electric. Fenomenul are loc prin aplicarea unei tensiuni între doi electrozi scufundați într-un electrolit (soluție a unui acid, bază sau sare). Conform teoriei disociației electrolitice, elaborată de S. Aarhenius, moleculele acestor substanțe se disociază în anioni ( $A^{n-}$ ) și cationi ( $C^{m+}$ ), în general  $n \neq m$ . De exemplu, clorura de sodiu în apă se disociază astfel:  $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ . Dar aceeași conformație o prezintă și topiturile sărurilor. Este clar acum că sub acțiunea unui cîmp electric se vor mișca ioni și nu electroni, adică vom avea de-a face cu un curent ionic. În general, anionii, după ce

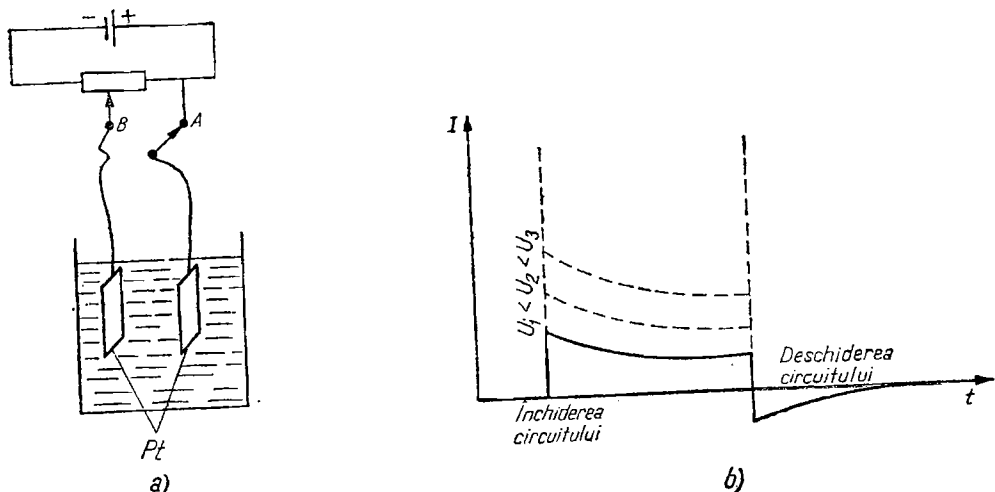


Fig. III.2.19

lasă sarcina la anod se degajă sub formă de gaze (oxigen, halogeni), sau formează cu apa acidul respectiv (sulfuric, clorhidric etc.). În schimb, cationii, cu excepția hidrogenului, sînt metale care se depun pe catod sub forma unui strat (argint, cupru, aluminiu etc.).

Electroliza are loc fie cu anod solubil, fie insolubil. În primul caz, anionul reacționează cu materialul anodului și formează sarea respectivă. Să luăm, de exemplu, o baie electrolitică de sulfat de nichel:  $(\text{NiSO}_4) \rightarrow \text{Ni}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$ . Cationul se depune pe catod ( $\text{Ni}^{2+} \xrightarrow{+2e} \text{Ni}$ ), iar anionul dizolvă un atom de nichel, care-i lasă electronii de valență:  $\text{Ni} \rightarrow \text{Ni}^{2+} + 2e$ ;  $\text{Ni}^{2+} + \text{SO}_4^{2-} \rightarrow \text{NiSO}_4$  și se reface astfel sulfatul de nichel. Dacă nu folosim anod solubil, după un timp îndelungat soluția devine tot mai concentrată în acid. Procesele care au loc în timpul electrolizei cu anod solubil constau deci pe de o parte în transportul de substanță de la anod la catod, iar pe de altă parte, acest transport este însoțit de trecerea curentului electric și este de tip ionic în soluție, iar prin circuitul exterior este electronic. Dacă ținem seama de expresia densității de curent atunci cînd avem de-a face cu două tipuri de ioni, de sarcini  $q_+$  și  $q_-$  cu concentrațiile  $n_+$  și  $n_-$  și mobilitățile  $u_+$  și  $u_-$ , obținem pentru densitatea curentului ionic  $j_{\text{ionic}}$  expresia:

$$j_{\text{ionic}} = (n_+ q_+ u_+ + n_- q_- u_-) E = j_+ + j_- = \sigma E, \quad (2.49)$$

unde  $\sigma$  reprezintă conductibilitatea electrolitului respectiv. Măsurarea ei ridică unele probleme delicate pentru experimentatori, dintre care cea mai importantă este polarizarea *electrozilor* și de aici apariția unei tensiuni noi, numită *tensiune contraelectromotoare*. Vom prezenta, în cele ce urmează, în ce constă această dificultate. Procesul implică folosirea unor electrozi care nu interacționează cu soluția, de exemplu, platina. Dar să prezentăm mai întii faptele experimentale, adică, ce curent va înregistra un instrument la închiderea circuitului din fig. III.2.19a, a cărui tensiune este reglabilă cu ajutorul unui potențiomteru. Se va observa la închiderea circuitului apariția

bruscă a unui curent, dar care scade apoi la o valoare staționară. În schimb, la întrerupere, va fi înregistrat un curent de sens invers ce se stinge în timp (fig. III.2.19b). Valoarea staționară a curentului în perioada închiderii este cu atât mai mare cu cât tensiunea aplicată pe electrozi este mai mare. În mod normal ar trebui ca valoarea curentului stabilit în urma închiderii circuitului să rămână constantă deoarece cationii (de exemplu  $2\text{H}^+ \xrightarrow{+2e} \text{H}_2$ ) ar capta atîția electroni la catod cîți ar ceda anionii (de exemplu,  $\text{SO}_4^{2-} \rightarrow \text{SO}_4 + 2e^-$ ) circulația fiind asigurată prin circuitul exterior de diferența de potențial menținută de sursă. În realitate, mobilitatea ionilor este diferită pentru că și masa și sarcina lor diferă, ceea ce atrage după sine depunerea inegală a unor cantități de electricitate la cei doi electrozi și deci încărcarea unuia cu un tip de sarcină față de celălalt. Scoaterea bateriei din circuit, prin comutarea contactului de pe borna A pe borna B va duce la stabilirea, pentru un timp, a unui curent de sens contrar, ca și cum ar fi produs de o tensiune contraelectromotoare.

Legile electrolizei, descoperite de Faraday, pun în evidență legătura între cantitatea de substanță depusă la catod, tipul ei precum și cantitatea de electricitate care a trecut prin circuit. *Prima lege a electrolizei*, stabilită experimental exprimă faptul că masa depusă la catod este proporțională cu intensitatea curentului presupus constant și cu timpul cît este închis circuitul, adică este proporțională cu cantitatea de electricitate depusă pe electrod:

$$m = KI t = KQ. \quad (2.50)$$

*A doua lege a electrolizei* stabilește natura lui  $K$  (echivalentul electrochimic) în funcție de tipul de cation:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{n}, \quad (2.51)$$

unde  $A$  este un atom-gram,  $n$  — valența, iar  $(1/F)$  este o constantă,  $F$  fiind numit *numărul lui Faraday*. Privite prin prisma structurii corpusculare a substanței, legile stabilite de Faraday capătă o justificare imediată. În primul rînd, această legătură este stabilită prin numărul de ioni  $N$  care se depun, masa fiind dată de:

$$m = m_{\text{at}} N = \frac{A}{\mathcal{N}} N, \text{ iar } Q = Nne, \quad (2.52)$$

adică

$$\frac{m}{A} \mathcal{N} = \frac{Q}{ne} \Rightarrow m = \frac{A}{\mathcal{N}ne} Q = \frac{1}{F} \frac{A}{n} Q. \quad (2.50')$$

În această relație  $F$  este dat de  $F = \mathcal{N}e$ . Cu alte cuvinte,  $F$  reprezintă sarcina transportată de un atom-gram dintr-o substanță monovalentă ( $n = 1$ ,  $m = A$ ) și are valoarea de aproximativ 96 500 C. Mărimea sarcinii elementare poate fi calculată pe această cale ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ SC}$ ).

*Aplicațiile electrolizei* sînt numeroase și sînt infiltrate în domenii mult diferite între ele. Vom cita cîteva exemple:

— *Galvanoplastia* constă în acoperirea unor obiecte metalice cu strate subțiri (aur, argint, nichel, crom), rezistente la acțiuni corozive;



— *Galvanostegia* este tehnica reproducerii sculpturilor prin confecționarea de mulaje din materiale plastice (ceară, gumă) care sînt impregnate cu un strat de grafit pentru a le face conductoare;

— *Purificarea elementelor* (rafinarea electrică) permite obținerea unor elemente foarte pure (Cu, Ag, Pt, Zn etc.) prin transferul metalului respectiv de pe anodul ce conține unele impurități pe catodul confecționat dintr-o lamă, sau fir foarte pur. Puritya cuprului poate ajunge pînă la 99,99%;

— *Electroliza metalelor topite* are loc pe săruri topite, cum ar fi cele de magneziu sau beriliu, topitura jucînd rolul electrolitului;

— *Electrometalurgia* este o tehnică de o importanță extraordinară în obținerea unor metale foarte pure, între care tronează aluminiul. Materia de bază în acest caz este alumina, adică praful de oxid de aluminiu ( $Al_2O_3$ ), obținut din bauxită, dar care conține diferite impurități. Ținînd seama de influența adausului de impurități asupra temperaturii de topire a unui corp, se adaugă aluminei florură de calciu ( $CaF_2$ ), amestecul astfel format fiind topit într-un vas (cuvă electrolitică) cu pereți acoperiți cu praf de cărbune sau grafit (catodul), în care sînt introduși anozii confecționați tot din carbon. În urma topirii, aluminiul prezent ca ion ( $Al^{3+}$ ) se neutralizează pe catod și se depune pe fundul vasului sub formă topită, de unde este extras din timp în timp.

### 3. Cîmpul magnetic staționar

#### 3.1. DESCRIEREA GENERALĂ A CÎMPULUI MAGNETIC

Ambiția oricărui autor al unui capitol de electromagnetism de a prezenta un model de redactare se frînge atunci cînd ajunge la introducerea magnetismului, mai precis a cîmpului magnetic. Ne obișnuisem cu acumularea de sarcini electrice de două tipuri, separabile și acumulabile prin diverse mijloace, inclusiv mecanice și deodată avem de-a face cu o altă caracteristică a unor substanțe, între care magnetita este reprezentantul antic, care interacționează între ele, dar descrierea acestei interacțiuni a impus introducerea unui alt tip de cîmp, diferit de cel electrostatic.

a) **Magneții permanenți.** Unele substanțe, numite magneți permanenți, prezente sub diverse forme (bare, potcoave etc.) se atrag sau se resping fără ca această interacțiune să fie de natură electrică. Astfel, o bară de magnetită plasată lîngă un electroscoap încărcat (sau descărcat) nu-i modifică starea electrică. Aceeași bară nici nu atrage nici nu respinge o baghetă de sticlă electrizată. În schimb, două bare de magnetită se atrag, sau se resping între ele dacă sînt așezate una lîngă alta în funcție de poziția relativă. Aspectul macroscopic al acestei interacțiuni nu diferă de cel electric. Cele două bare pot fi identice ca dimensiuni. Nici capetele nu diferă ca aspect. Dar nici o bară dielectrică polarizată nu are capete diferite din punct de vedere macroscopic și totuși doi electrozi de această formă se pot atrage sau respinge în funcție de poziția relativă a capetelor. Această analogie, pur formală, a condus la deosebirea capetelor barei magnetice; *polul nord* și *polul sud*, bara însăși formînd, în virtutea aceleiași analogii un „*dipol magnetic*”. Un pol al unui magnet nu poate fi separat; experiența arată că prin tăierea magnetului se formează alți doi magneți, care sînt identici dacă tăierea are loc pe „linia mediană”.

Ca și în electrostatică, însă, aceste substanțe interacționează între ele fără să intre în contact, fie că între ele este vid, sau un alt material. Această observație a condus la conceptul de *cîmp magnetic* ca fiind o stare de existență a materiei, prin intermediul căreia magneții interacționează între ei. Nu știm deocamdată nimic despre natura magnetismului substanței noastre.

Să încercăm să stabilim unele caracteristici ale cîmpului magnetic pornind tot de la magneții permanenți, folosind însă unele analogii cu descrierea cîmpului electric. Am caracterizat cîmpul electric prin forța cu care interacționează

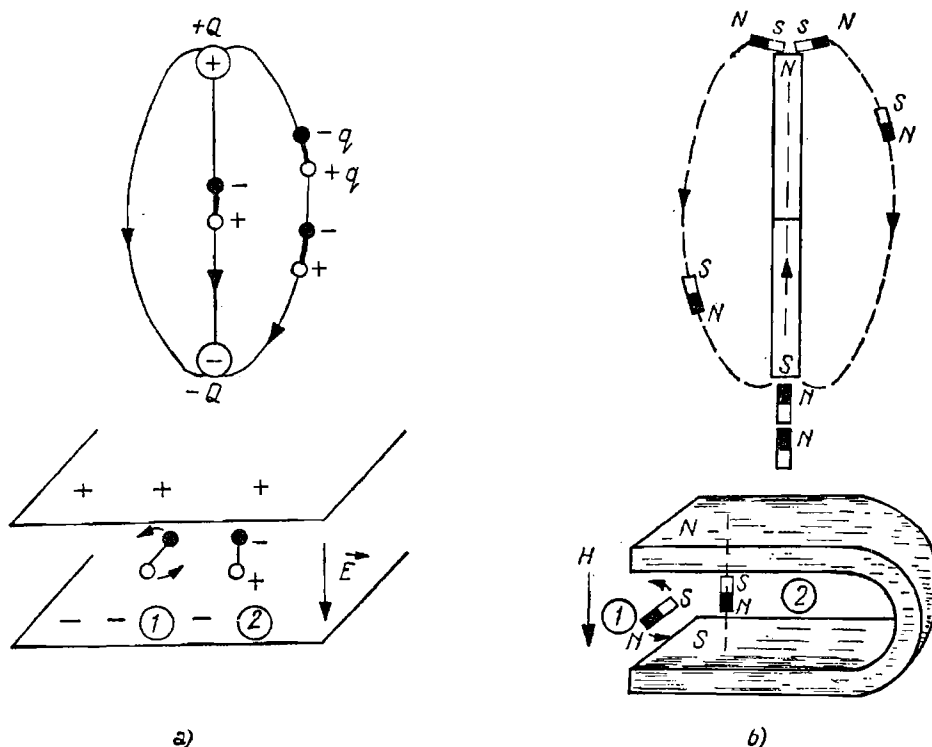


Fig. III.3.1

asupra unei sarcini pozitive, aleasă ca unitate. De data aceasta nu se mai poate lua un astfel de criteriu deoarece nu avem o „sarcină” magnetică. În schimb este posibil să comparăm acțiunea unui câmp electric asupra unui *dipol electric* cu acțiunea unui câmp magnetic asupra unui *dipol magnetic* (fig. III.3.1). Experiența arată că așa cum dipolii electrici se dispun după tangentele la liniile de câmp, tot așa și dipolii magnetici (în cazul nostru bara sau acul magnetic) se dispun pe tangentele la niște curbe similare celor precedente (fig. III.3.1b) pe care le vom numi *linii ale câmpului magnetic*. În partea inferioară a desenei am comparat acțiunea unui câmp electric uniform asupra dipolului electric atunci când el nu este în poziția de echilibru (2), acțiune care duce la apariția unui cuplu de forțe descris de momentul  $\vec{M}$ , cu cea exercitată de un câmp magnetic asupra dipolului magnetic plasat în poziția (1). Dacă ținem seama de legătura dintre cuplul  $\vec{M}$ , momentul dipolar electric ( $\vec{p}$ ) și intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  ( $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ ), se pot introduce două noțiuni analoge cu acestea pentru magnetism: *intensitatea câmpului magnetic*  $\vec{H}$  și *momentul dipolului magnetic* (sau *momentul magnetic*  $\vec{m}$ ), astfel ca momentul cuplului să fie dat de:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{H}. \quad (3.1)$$

Aşa cum defineam prin convenţie sensul cîmpului electric dirijat de la (+) spre (-), în exterior sensul cîmpului magnetic este luat dinspre polul nord spre polul sud.

Continuînd analogia cu cazul electrostatic, definim energia de interacţiune magnetostatică ( $W_m$ ) între dipolul magnetic şi cîmpul magnetic:

$$W_m = - \vec{m} \cdot \vec{K}, \text{ analog cu } W_{es} = - \vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (3.2)$$

O altă deosebire esenţială între  $\vec{H}$  şi  $\vec{E}$  constă în faptul că liniile cîmpului electric sînt deschise pentru că acesta este creat de sarcini care pot fi separate, în timp ce liniile cîmpului magnetic sînt închise pentru că polii magnetici nu pot fi separaţi.

b) **Influenţa mediului.** Să ne închipuim că dacă este posibilă o analogie cu electrostatica, momentul cuplului cu care interacţionează cîmpul  $\vec{H}$  asupra dipolului trebuie să fie afectat de prezenţa substanţelor, ceea ce se şi observă în realitate. Aşa, de pildă, în electrostatică forţa de interacţiune era diminuată într-un mediu faţă de vid:

$$\frac{F^{(\text{mediu})}}{F^{(\text{vid})}} = \frac{E}{\epsilon_r} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}^{(\text{mediu})} = \vec{p} \times \frac{\vec{E}^{(\text{vid})}}{\epsilon_r}. \quad (3.3)$$

Să introducem între polii potcoavei magnetice diferite substanţe în care plasăm dipolul magnetic (apă, mercur, topitură dintr-o sare a unui metal din grupa fierului: sulfat de fier, de nichel etc.). Experienţa arată într-adevăr, că interacţiunea este diferită faţă de vid, astfel că momentul cuplului în mediu este crescut faţă de vid:

$$\frac{\vec{\mathcal{M}}^{(\text{mediu})}}{\vec{\mathcal{M}}^{(\text{vid})}} = \mu_r \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}^{(\text{mediu})} = \vec{m} \times \mu_r \vec{H}^{(\text{vid})} \quad (3.4)$$

constantă  $\mu$ , numită *permeabilitate magnetică relativă*, este o caracteristică a materialului respectiv faţă de vid. Formal, relaţia (3.4) ar putea fi transcrisă într-o formă similară cu (3.1):

$$\vec{\mathcal{M}}^{(\text{mediu})} = \vec{m} \times \vec{B}^{(\text{mediu})}, \quad (3.1')$$

în care  $B^{(\text{mediu})}$ , numit *inducţia magnetică* joacă rolul intensităţii cîmpului magnetic într-o substanţă. Subliniem că aceasta este definiţia corectă a momentului cuplului. Dar noţiunea de inducţie a fost generalizată introducîndu-se şi pentru vid:

$$\vec{B}^{(\text{vid})} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.5)$$

obţinînd mai departe:

$$\vec{B}^{(\text{mediu})} = \mu_r \vec{B}^{(\text{vid})} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad (3.6)$$

unde  $\mu_0$  reprezintă *permeabilitatea vidului*,  $\mu_r$  — *permeabilitatea relativă*, iar  $\mu$  pe cea absolută. În funcţie de sistemul de unităţi ales,  $\mu_0$  are diverse valori (vezi analogia cu  $\epsilon_0$ ): în sistemul CGS electromagnetic ( $\text{CGS}_{em}$ )  $\mu_0 = 1$ , astfel că

$$\vec{B}_{CGS}^{(\text{vid})} = \vec{H}, \text{ iar în SI, } \mu_0 \neq 1, \text{ astfel că } \vec{B}_{SI}^{(\text{vid})} \neq \vec{H}.$$

Influenţa mediului asupra interacţiunilor magnetostatice seamănă cu cea din electrostatică introdusă prin intermediul polarizării mediului. Procesul

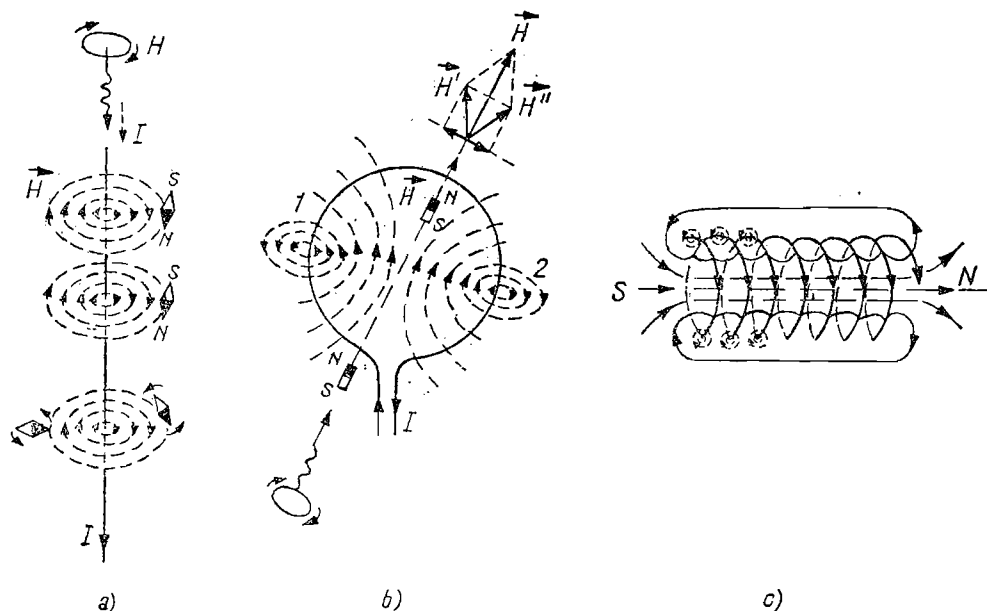


Fig. III.3.2

similar de aici poartă numele de *magnetizare* și va fi analizat în detaliu.

c) **Cîmpul magnetic al curenților staționari.** Tocmai cînd se părea că între magnetism și electricitate nu există nici o legătură, Oersted a demonstrat experimental că în jurul curenților electrici există un cîmp magnetic care poate fi pus în evidență prin acțiunea pe care o exercită asupra unui ac magnetic (dipol magnetic). În jurul unui conductor liniar prin care trece un curent de intensitate  $I$  acul magnetic se așază în plane perpendiculare pe linia conductorului, tangent la cercuri concentrice avînd centrul în punctul în care conductorul intersectează planul (fig. III.3.2a). Sensul cîmpului magnetic poate fi găsit folosind „regula burghiului” (fig. III.3.2a) în virtutea căreia facem să înainteze burghiul în sensul curentului, sensul de rotație indicînd sensul cîmpului magnetic (N—S). Dacă am pune acul în altă poziție (de exemplu, paralel cu conductorul, sau în lungul razei cercului) apare un cuplu de forțe care tinde să-l aducă în poziția de echilibru, adică în planul perpendicular pe conductor și pe direcția tangentei la un cerc. Se poate astfel conchide că în jurul unui curent electric apare un cîmp magnetic care are aceleași efecte mecanice asupra unui dipol magnetic ca și cel generat de un magnet permanent. O primă observație se impune atenției noastre: sarcinile electrice în mișcare pot genera un cîmp magnetic. Acest fapt atestă imediat și existența unei legături între magnetism și electricitate, pe care o vedem doar la scară microscopică. Experiențele în care am măsura mărimea momentului cuplului atunci cînd acul magnetic este fixat în același loc, dar este modificat curentul, sau este fixat curentul, dar este plasat acul la diverse distanțe ( $d$ ) de axa conductorului arată că:

$$B = \mu K_1 \frac{I}{d}, \quad H = K_1 \frac{I}{d}, \quad (3.7)$$

adică este proporțional cu intensitatea curentului și invers proporțional cu distanța, constanta de proporționalitate  $K$  fiind dată de sistemul de unități ales.

*Curentul circular* reprezintă o idealizare a curentului unei bucle de rază  $r$  (fig. III.3.2b). Dacă sînt luate mici porțiuni simetrice de pe conductorul circular, pe care le vom considera liniare, atunci examinînd liniile de cîmp ale lor se remarcă faptul că în centrul buclei, liniile cîmpului magnetic au același sens, iar în exterior sînt de sens contrar. În felul acesta ne imaginăm că acest curent generează un cîmp magnetic, care are cea mai mare intensitate în centru. Cîmpul magnetic pe axul buclei poate fi găsit aplicînd din nou regula burghiului, dar într-o variantă modificată: este rotit burghiul în sensul curentului, iar sensul de înaintare ne oferă sensul cîmpului magnetic (fig. III.3.2b). Faptul că  $H$  este dirijat în centrul spirei pe direcția perpendiculară la planul ei, se poate înțelege din compunerea a două cîmpuri  $H'$  și  $H''$  create de cele două elemente de curent (1) și (2) într-un punct oarecare. Un experiment similar de investigare a intensității cîmpului creat de acest curent ne arată că ea este proporțională cu intensitatea curentului și invers proporțională cu raza buclei:

$$B = \mu K_2 \frac{I}{r}, \quad H = K_2 \frac{I}{r}, \quad K_2 \neq K_1. \quad (3.8)$$

Pentru a obține un cîmp mai puternic se folosește un număr  $N$  de bucle, puse una peste alta, obținîndu-se un *multiplicator*, al cărui cîmp este  $H = NK_2 \frac{I}{r_m}$ , unde  $r_m$  este raza medie.

După modul cum ies liniile de cîmp din planul buclei, curentul circular se comportă din punct de vedere magnetic, ca o *foiță magnetică*, o suprafață a ei fiind polul nord, iar cealaltă polul sud.

*Curentul solenoidal* se obține prin înfășurarea unui conductor izolat pe un suport izolator, astfel încît să posede forma unei spirale, avînd însă spirele în contact (fig. III.3.2c). Experiența ne arată că un curent de această formă creează și el un cîmp magnetic, care este uniform în interior, dar ale cărui linii sînt dispersate la capete, fiind asemănător prin aceasta cu o bară magnetică. Evidențierea configurației liniilor de cîmp se face pe cale experimentală tot cu ajutorul acului magnetic-sondă, dar poate fi înțeleasă acum din compunerea cîmpurilor porțiunilor simetrice ale spirelor (fig. III.3.2c). În ansamblu, polul nord al acestui magnet este indicat cu ajutorul unei reguli empirice: se așază palma dreaptă pe solenoid astfel ca prin vîrfurile degetelor să circule curentul; degetul mare, plasat în lungul solenoidului, indică nordul. Din investigarea experimentală a interacțiunii mecanice cu același dipol magnetic, s-a găsit legătura între intensitatea cîmpului magnetic pe axa unui solenoid (foarte lung în raport cu grosimea pentru a neglija efectele de dispersie de la capete), intensitatea curentului, numărul de spire  $N$  și lungimea solenoidului  $l$ :

$$H = K_3 \frac{NI}{l} = K_3 nI, \quad B = \mu K_3 nI, \quad (3.9)$$

în care  $n = \frac{N}{l}$  reprezintă numărul de spire pe unitatea de lungime.

d) **Interacțiunea curenților cu cîmpul magnetic.** În paginile precedente am pus în evidență cîmpul magnetic creat de curenți prin interacțiunea cu

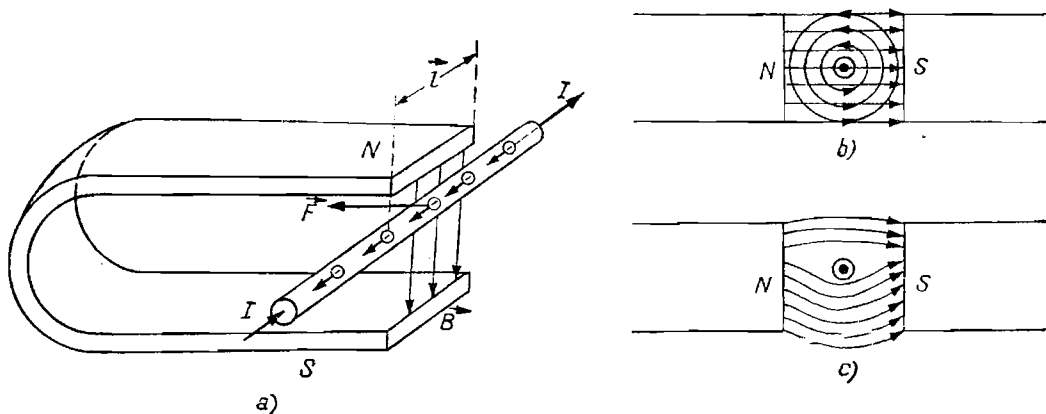


Fig. III.3.3

un dipol magnetic. Simplificînd, am zice că avem de-a face cu interac iunea între un curent  i un magnet. De fapt este vorba de interac iune care are loc prin intermediul unei stări fizice comune – *c mpul magnetic*. Dar a a cum un ac magnetic este deviat în vecinătatea unui curent, tot a a  i un conductor prin care circulă un curent, suferă acțiunea unui c mp magnetic. Experiența, devenită clasică, constă în plasarea unui conductor între poli unui magnet-potcoavă, perpendicular pe direcția liniilor de c mp (fig. III.3.3a). Atunci c nd se închide circuitul, permi  nd trecerea unui curent de intensitate  $I$ , conductorul este deviat pe direcția perpendiculară pe liniile de c mp  i pe linia curentului. Forța de interac iune poartă numele de *forța electromagnetică* ( $F_{em}$ )  i împreună cu induc ia magnetică ( $B$ )  i intensitatea curentului ( $I$ ) formează un triedru drept. Interacțiunea nu presupune însă neapărat plasarea conductorului perpendicular pe liniile c mpului, ci poate să fie înclinat fața de ele cu un unghi  $\alpha$ . Experiența ne arată că for a de interac iune este maximă c nd conductorul este plasat perpendicular ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $F = KHI l$ )  i nulă, c nd este paralel cu direcția c mpului ( $\alpha = 0$ ,  $F = 0$ ). Pusă sub o formă vectorială, forța de interac iune are expresia:

$$\vec{F} = \mu I \vec{l} \times \vec{H} = I \vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.10)$$

Sensul ei poate fi găsit fie cu regula burghiului (sensul înaintării atunci când  $\vec{l}$  se rotește spre  $\vec{B}$  cu unghiul cel mai mic), fie cu regula m inii st ngi a lui Fleming: dacă  ntr  c mpul în palmă, iar curentul  iese prin degete, atunci degetul mare indică sensul forței electromagnetice.

O explicație intuitivă a sensului forței electromagnetice a fost dată de Faraday lu nd în considerație suprapunerea liniilor c mpului în care se află curentul cu cele create de el însuși.  n figura III.3.3b sînt desenate separat liniile unui c mp magnetic uniform împreună cu cele ale c mpului creat de un curent ce  iese din planul foii, perpendicular pe direcția c mpului exterior. Prin compunere, se observă că într-o parte a curentului există o densitate mai mare de linii de c mp (fig. III.3.3c), care exercită o „presiune” asupra conductorului prin care trece curentul.  n felul acesta, c mpul magnetic   i manifestă prezen a printr-o acțiune mecanică.

e) *Unități de măsură pentru H și B. Sistemul CGS electromagnetic (CGS<sub>em</sub>)* este caracterizat de unitățile cunoscute pentru LMT, dar conține și o unitate pentru intensitatea curentului diferită de amper, numită *ab-amperul* (abA) sau *biotul* (Bi): 1 abA (Bi) = 10 A. Ciudățenia acestei legături are o anumită explicație dacă facem o analogie cu... viteza luminii în vid ( $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s). Această analogie nu este forțată deoarece, așa cum am văzut, la închiderea unui circuit curentul se stabilește practic instantaneu, sau un ac magnetic „simte” apariția câmpului magnetic tot atât de repede. De fapt, acțiunea curentului, prin intermediul câmpului, nu se propagă instantaneu, ci așa cum au arătat cercetările teoretice și experimentale, viteza aceasta de propagare este egală cu viteza luminii în mediul respectiv. Cum intensitatea curentului este la urma urmelor o „viteză” de curgere a sarcinilor, atunci se poate găsi legătura de mai sus astfel:

$$1 \text{ abA} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ SC}}{\text{s}} = \frac{10 \text{ C}}{\text{s}} = \frac{1 \text{ abC}}{\text{s}} = 10 \text{ A}, \quad (3.11)$$

unde un abC este ab-coulombul, prefixul ab stabilind apartenența la un sistem așa-zis „absolut” de unități. Intensitatea câmpului magnetic  $H$  este măsurată în *oerstezi* (Oe), definit prin forța electromagnetică în vid, luând constanta  $\mu_0 = 1$ :

$$F_{\text{em}} (\text{dyn}) = H(\text{Oe}) I(\text{abA}) l(\text{cm}). \quad (3.12)$$

Un oersted reprezintă intensitatea unui câmp magnetic care acționează în vid cu o forță de  $1 \text{ dyn}$  asupra unui conductor de 1 cm, prin care trece un curent de 1 abA plasat perpendicular pe direcția liniilor de câmp.

Pentru inducția magnetică  $B$  se folosește *gaussul* (Gs):

$$B^{(\text{vid})} = \mu_0 H, \mu_0 = 1 \Rightarrow B^{(\text{vid})} (\text{Gs}) = H(\text{Oe}) \Rightarrow 1 \text{ Gs} = 1 \text{ Oe}. \quad (3.13)$$

Deci, în CGS<sub>em</sub>,  $1 \text{ Gs} = 1 \text{ Oe}$ .

În sistemul CGS<sub>em</sub>, constantele  $K_1$ ,  $K_2$  și  $K_3$ , introduse anterior, sînt determinate experimental\*, astfel că intensitatea câmpului creat de curenții staționari este dată de:

$$H_{\text{liniar}} (\text{Oe}) = 2 \frac{I(\text{abA})}{d(\text{cm})} = B(\text{Gs}), \quad K_1(\text{CGS}) = 2 \quad (3.7')$$

$$H_{\text{circular}} (\text{Oe}) = 2\pi \frac{I(\text{abA})}{r(\text{cm})} = B(\text{Gs}), \quad K_2(\text{CGS}) = 2\pi \quad (3.8')$$

$$H_{\text{solenoid}} (\text{Oe}) = 4\pi \frac{NI(\text{abA})}{l(\text{cm})} = B(\text{Gs}), \quad K_3(\text{CGS}) = 4\pi. \quad (3.9')$$

*Sistemul internațional* (SI) este caracterizat pentru LMT de sistemul MKS, pentru curent de amper, iar pentru  $H$  și  $B$  sînt introduse unitățile amper-spiră pe metru  $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$  și, respectiv tesla (T), după cum urmează:

Intensitatea câmpului de  $1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$  este obținută în centrul unei spire circulare, cu diametrul de 1 m, cînd este străbătută de un curent de 1 amper.

\* De fapt, teoria arată că este suficientă cunoașterea uneia dintre constante, celelalte rezultînd din calcul.



Pornind de la relația (3.8), obținem valoarea constantei  $K_2$  în SI astfel:

$$H_{\text{circular}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = 2K_2 \frac{I(\text{A})}{2r}; \text{ pentru } 2r = 1\text{m}, I = 1\text{A}, H = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (3.14)$$

de unde rezultă  $K_2$  (SI) =  $\frac{1}{2}$ .

Legătura între Oe și A/m apare imediat dacă vom compara relația (3.8') cu  $H_{\text{circular}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = \frac{I(\text{A})}{2r(\text{m})}$ :

$$1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 2\pi \frac{10^{-1} \text{ abA}}{50 \text{ cm}} = 4\pi 10^{-3} \text{ Oe}. \quad (3.15)$$

Se observă acum foarte ușor că trecerea de la exprimarea lui  $H$  în CGS<sub>em</sub> la sistemul SI se efectuează prin împărțirea expresiei din CGS<sub>em</sub> cu  $4\pi$ , astfel că formulele (3.7' - 3.9') devin:

$$H_{\text{lin.}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = \frac{I(\text{A})}{2\pi d(\text{m})}; \quad H_{\text{circ.}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = \frac{I(\text{A})}{2r(\text{m})}; \quad H_{\text{sol}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = \frac{NI(\text{A})}{l(\text{m})}.$$

Unitatea pentru inducția magnetică, tesla (T), este definită prin intermediul forței electromagnetice:

$$F_{\text{cm}}(\text{N}) = B(\text{T}) \cdot I(\text{A}) \cdot l(\text{m}). \quad (3.16)$$

Inducția magnetică de 1 tesla caracterizează acel câmp care acționează cu o forță de 1 N asupra unui conductor de 1 m, prin care circulă un curent de 1 A dacă este plasat perpendicular pe direcția liniilor de câmp.

Legătura între tesla și gauss se obține prin compararea formulelor ce dau pe  $F_{\text{cm}}$  în cele două sisteme:

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ Gs} \cdot 1 \text{ abA} \cdot 1 \text{ cm} = 10 \text{ Gs} \cdot \text{A} \cdot \text{cm} \Rightarrow 1 \text{ Gs} = \frac{1 \text{ dyn}}{10 \text{ A} \cdot 1 \text{ cm}}, \quad (3.17)$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow 1 \text{ T} = \frac{10^6 \text{ dyn}}{1 \text{ A} \cdot 10^2 \text{ cm}} = 10^4 \text{ Gs}.$$

Această relație permite calculul permitivității vidului ( $\mu_0$ ) care în SI este diferită de 1.

Trecînd de la Gs la T și de la Oe la A/m, prin intermediul forței electromagnetice, obținem:

$1 \text{ dyn} = 1 \text{ Oe} \cdot 1 \text{ abA} \cdot 1 \text{ cm}$ , trece în

$$10^{-5} \text{ N} = \mu_0 \frac{1}{4\pi 10^{-3}} \left( \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) \cdot 10 \text{ A} \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \left( \text{sau } \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right). \quad (3.18)$$

### 3.2. FLUXUL MAGNETIC

Acest capitol tratează pe lîngă unele probleme specifice magnetismului substanțelor și unele noțiuni mai generale, neintroduse în rîndurile precedente pentru a nu fragmenta legătura între cîmpul magnetic al magneților permanenți și cîmpul creat de curenții staționari.

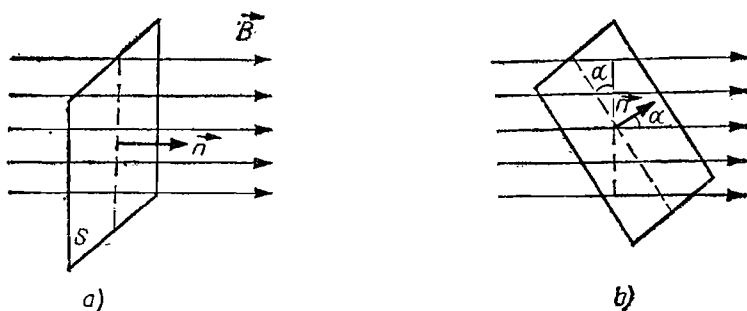


Fig. III.3.4

Urmînd analogia cu electrostatica, *fluxul magnetic* ( $\Phi_m$ ) reprezintă prin definiție numărul de linii ale cîmpului magnetic care trec printr-o suprafață așezată perpendicular pe direcția lor (fig. III.3.4a). Dacă suprafața este înclinată față de direcția verticalei, atunci trebuie proiectată pe planul perpendicular (fig. III.3.4b):  $S_{\perp} = S \cos \alpha$ . Din definiție nu rezultă explicit ce mărime folosim,  $H$  sau  $B$ . Ne vom referi la fluxul lui  $B$ , deoarece ne va fi util ulterior:

$$\Phi_m = BS_{\perp} = BS \cos \alpha = \Phi_{0m} \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{S} = S \cdot \vec{B} \cdot \vec{n}, \quad (3.19)$$

unde  $\vec{n}$  este versorul normalei la suprafață. În cazul în care cadrul execută o mișcare uniformă de rotație în jurul unei axe fixe, perpendiculară pe  $\vec{B}$ , atunci  $\alpha = \omega t$ , iar fluxul magnetic depinde de timp:

$$\Phi_m(t) = \Phi_{0m} \cos \omega t. \quad (3.20)$$

În sistemul CGS<sub>em</sub> fluxul este măsurat în *maxwelli* (Mx):

$$\Phi_m (\text{Mx}) = B (\text{Gs}) \cdot S (\text{cm}^2), \quad (3.21)$$

1 Mx reprezentînd fluxul unui cîmp de 1 Gs printr-o suprafață de 1 cm<sup>2</sup>, așezată perpendicular pe direcția sa. În sistemul SI, unitatea este weberul (Wb):

$$\Phi_m (\text{Wb}) = B(\text{T}) \cdot S(\text{m}^2), \quad (3.22)$$

definit ca fluxul unui cîmp de un tesla printr-o suprafață de 1 m<sup>2</sup>, plasată în același mod. Legătura dintre cele două unități este imediată:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2 = 10^9 \text{ Gs} \cdot \text{cm}^2 = 10^8 \text{ Mx}$$

Vom calcula fluxul pentru unele cazuri particulare. Definim, în prealabil, noțiunea de *cîmp magnetic uniform*, ca fiind acel cîmp pentru care liniile sale sînt drepte paralele, iar numărul celor care străbat un element de suprafață (oricît de mic vrem), situat perpendicular pe direcția lor, este același, indiferent de poziția suprafeței, ceea ce înseamnă că  $B$  poate fi definit prin:

$$B = \frac{\Phi_m}{S}, \text{ sau } B = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (3.23)$$

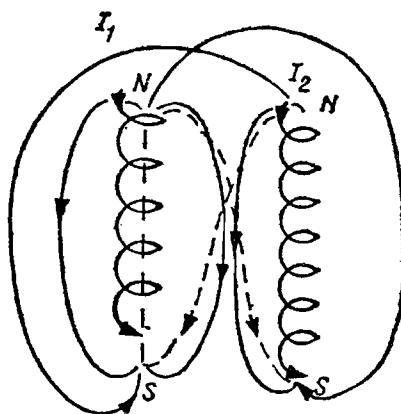


Fig. III.3.5

Pentru o suprafață oarecare și câmp neuniform, expresia [fluxului devine

$$\Phi_m = \sum_i \vec{B}_i \Delta \vec{S}_i \quad (3.24)$$

Schematic, un câmp uniform este reprezentat prin linii de câmp paralele între ele (fig. III.3.4).

Fluxul câmpului unui solenoid, prin suprafața mărginită de toate spirele, este dat de expresia:

$$\Phi_m = \mu HNS = \mu K_3 \frac{N^2 IS}{l} = LI, \quad (3.25)$$

unde am neglijat din nou efectele de margine. În formula (3.25) coeficientul de proporționalitate  $L$  poartă numele de *inductanță* sau *coeficient de selfinducție*. În sistemul SI unitatea de măsură pentru  $L$  este *henry-ul* (H) și reprezintă inductanța unei bobine al cărei flux magnetic este de 1 weber dacă prin ea circulă un curent de 1 amper:  $\Phi_m(\text{Wb}) = L(\text{H}) \cdot I(\text{A})$ . Din definiția lui  $L$  se vede că în vid acest coeficient depinde exclusiv de geometria bobinei:  $L_{\text{vid}}(\text{H}) = \mu_0 \frac{N^2 S(\text{m}^2)}{l(\text{m})}$ , de unde rezultă faptul că  $\mu_0$  poate fi exprimat și în (H/m), care este unitatea folosită în mod obișnuit.

Coeficientul de selfinducție reprezintă însă numai un caz particular, acela al unui solenoid izolat. Să presupunem însă că avem solenoizi neidentici, cu curenți de intensități diferite (fig. III.3.5). Este clar că fluxul printr-un solenoid va fi dat nu numai de câmpul propriu, dar și de câmpul creat de celălalt solenoid. Dacă ținem seama că și în spațiul din afara solenoidului intensitatea câmpului este diferită de zero, atunci fluxul prin fiecare solenoid va fi dat de:

$$\Phi_{m1} = L_{11}I_1 + L_{12}I_2; \quad \Phi_{m2} = L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \quad (3.26)$$

Coeficienții  $L_{12}$  și  $L_{21}$  descriu contribuția unui solenoid la fluxul prin celălalt, de aceea sînt numiți *coeficienți de inducție mutuală*, iar coeficienții  $L_{11}$  și  $L_{22}$  descriu fluxul cîmpului propriu, adică cel creat de curentul care străbate spirele sale de aceea poartă numele de *coeficient de autoinducție*.

### 3.3. CIRCUITUL MAGNETIC. ELECTROMAGNETII. APLICAȚII

Inducția magnetică ( $B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$ ) exprimă influența mediului asupra cîmpului magnetic, concretizată în factorul  $\mu_r$  (permitivitatea relativă). Din acest punct de vedere, există substanțe cu  $\mu_r$  mic, de ordinul unităților, cum ar fi metalele obișnuite, dar există altele, *feromagneticele*, a căror permitivitate poate să fie mai mare de  $10^3$ . În rîndul lor sînt înscrise unele metale din grupa fierului (fier, nichel, cobalt), precum și o gamă largă de aliaje ale lor (Fe-Ni, Fe-Si, Fe-Co, Fe-Al-Co-Ni etc.). Introducerea unei substanțe feromagnetice într-un solenoid, prin care trece un curent electric duce la întărirea intensității cîmpului magnetic creat de acesta. Este posibil ca în absența curentului electric, bara feromagnetică să nu fie un magnet permanent și să se comporte astfel numai în prezența lui. Acest proces se numește *magnetizarea substanței*. Dacă înlăturăm cîmpul magnetic creat de bobină, substanța rămîne fie într-o stare cu o *magnetizare reziduală*, sau *remanentă*, fie revine la starea inițială, adică se demagnetizează. Ansamblul solenoid cu substanță feromagnetică formează un *electromagnet*.

*Circuitul magnetic* este analog circuitului electric în sensul formal al închiderii liniilor cîmpului magnetic. La un solenoid simplu, liniile cîmpului magnetic se închid prin aerul din interior și din exterior; dacă în exterior există o bucată de fier, atunci o parte a liniilor se închid prin fier, iar alta prin aer (fig. III.3.6a); în sfîrșit dacă în locul solenoidului avem un circuit toroidal, cu miez feromagnetic, atunci, practic toate liniile se închid prin miez (fig. III.3.6b). Fluxul magnetic nu are „scăpări”. În timp ce într-un circuit electric era închis curentul electric, într-un circuit magnetic sînt închise liniile de cîmp magnetic. Așa cum în cazul curentului, pentru o tensiune dată, intensitatea lui este invers proporțională cu lungimea și cu secțiunea conductorului, este de așteptat ca în cazul circuitelor magnetice, numărul de linii de cîmp „captate” să depindă de secțiunea și lungimea lor. Pentru a scrie legea unui circuit magnetic să ne reamintim de legătura între intensitatea cîmpului electric și potențial. Dacă circuitul electric are o formă mai complicată, atunci el poate fi descompus în porțiuni  $\Delta l_i$ , astfel încît potențialul total să fie suma potențialelor acestor porțiuni:  $V = U_1 + U_2 + \dots + U_n = E_1 \Delta l_1 + E_2 \Delta l_2 + E_n \Delta l_n$ . Dacă am efectua sumarea pe un circuit circular, atunci am obține, pentru cîmpul a cărui intensitate este tangentă la cerc și de mărime constantă; relația:  $E 2\pi r = \mathcal{E}$ , adică am obține *tensiunea electromotoare*. Această adunare de produse  $E \Delta l$ , pentru un circuit închis, reprezintă energia cheltuită pentru a deplasa sarcina pozitivă egală cu unitatea, și mai poartă numele de *circulația intensității cîmpului*.

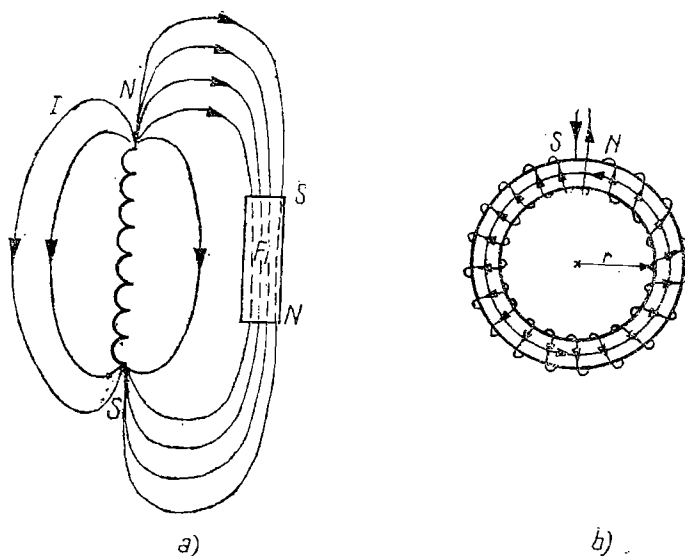


Fig. III.3.6

În mod analog se definește și o circulație a cîmpului magnetic  $\sum_{i=1}^N H \Delta l_i$ , care, pentru un miez magnetic toroidal (în care se închid liniile cîmpului magnetic), devine:

$$H \cdot 2\pi r = K_3 NI = \mathcal{S}_m, \quad (3.27)$$

unde  $N$  este numărul total de spire. Circulația lui  $H$ , în cazul nostru un cerc, ne furnizează o mărime analoagă lui  $\mathcal{S}$  și de aceea a fost denumită *tensiune magnetomotoare* (TMM) și are dimensiunile unui curent:

$$\mathcal{S}_m \text{ (SI)} = N \cdot I \text{ (A)}. \quad (3.28)$$

Se poate stabili acum legătura dintre fluxul magnetic prin secțiunea torului, și  $\mathcal{S}_m$  pentru un tor de lungime  $l = 2\pi r$  ( $r$  — raza medie a torului):

$$\Phi_m = SB = SK_3 \mu \frac{NI}{l} = \frac{\mathcal{S}_m}{R_m}, \quad (3.29)$$

unde  $R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$  este un coeficient de proporționalitate, numit *reluctanță* și care joacă rolul rezistenței electrice. Se observă o asemănare extraordinară în ceea ce privește dependența de lungimea și secțiunea circuitului magnetic, locul rezistivității fiind jucat de  $1/\mu$ .

Unitățile de măsură pentru  $R_m$  sînt (A/Wb) sau ( $H^{-1}$ ).

Este interesant de remarcat faptul că în limitele analogiei stabilite pot fi aplicate circuitelor magnetice legile lui Ohm atât pentru circuite serie cît și pentru circuite derivație. Un circuit serie poate fi format, de exemplu, dintr-un

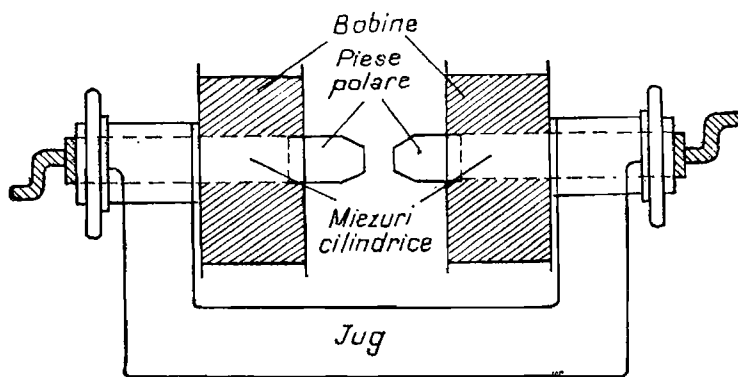


Fig. III.3.7

inel feromagnetic întrerupt de un strat de aer (întrefier), astfel că pentru circuitul fier-întrefier, reluctanța este dată de:

$$R_m = R_{Fe} + R_{aer} = \frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe} S_{Fe}} + \frac{l_{aer}}{\mu_{aer} S_{aer}} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{l_{Fe}}{\mu_{r, Fe} S_{Fe}} + \frac{l_{aer}}{S_{aer}} \right). \quad (3.30)$$

Un exemplu de circuit serie foarte important este cel al electromagneților. Aceștia au fost descoperiți de *Arago* și studiați de *Henry* și *Weiss*. Cel mai simplu electromagnet este un solenoid cu o bară magnetică, dar liniile se închid prin aer, și deci reluctanța mare duce la o dispersare mare a liniilor de câmp. Pentru a realiza câmpuri puternice se folosește electromagnetul cu „potcoavă” magnetică, avînd bobine de magnetizare montate pe ambele brațe. Un electromagnet de tip Weiss are două bobine de magnetizare plasate pe două miezuri cilindrice mobile și legate între ele printr-un jug lat, magnetic

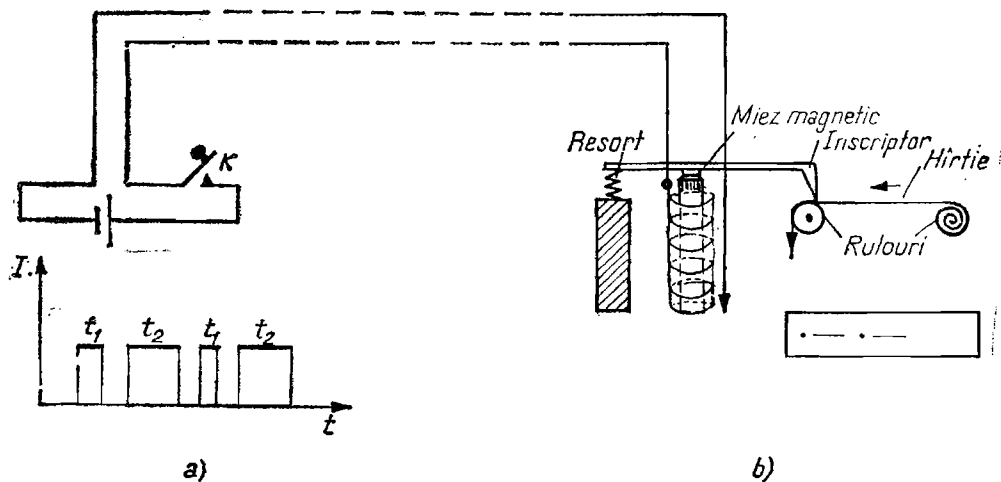


Fig. III.3.8

(fig. III.3.7). La capătul miezurilor cilindrice sînt montate două piese *polare*, de obicei din fier Armco, cu permeabilitate foarte mare.

Aplicațiile electromagneților sînt extrem de numeroase și numai simpla lor enumerare nu face decît să sublinieze această afirmație: telegraful, macaralele pentru transportul pieselor grele de fier, difuzorul electrodinamic, soneria, releul electromagnetic, aparate pentru măsurători electrice (ampermetre și voltmetre) etc. Dintre acestea vom prezenta sumar doar telegraful și aparatele de măsură, dinamul și motoarele urmînd să fie descrise ulterior.

În telegrafia cu fir, sînt transmise de la emițător pulsuri de curent continuu, de durată mai scurtă sau mai lungă, cu ajutorul unui întrerupător (fig. III.3.8a). La recepție, curentul care trece prin bobina unui electromagnet atrage brațul unui inscripator care bate „punct”, respectiv „linie” (fig. III.3.8b), în funcție de durata pulsului de curent. În felul acesta literele unui cuvînt sînt transmise sub formă de combinații de linii și puncte ale alfabetului Morse.

Aparatele pentru măsuri electrice au fost introduse în III.2. Principiul de funcționare constă în interacțiunea electromagnetică dintre curentul de măsurat și un cîmp magnetic. Experimental pot fi realizate două variante. Într-o variantă curentul trece printr-o bobină mobilă care se poate mișca în cîmpul magnetic generat de un magnet permanent, iar în cealaltă magnetul este mobil și se poate mișca în bobina fixă. Aparatele din prima grupă sînt numite *aparate cu cadru mobil*. Pentru a înțelege modul de funcționare, să examinăm

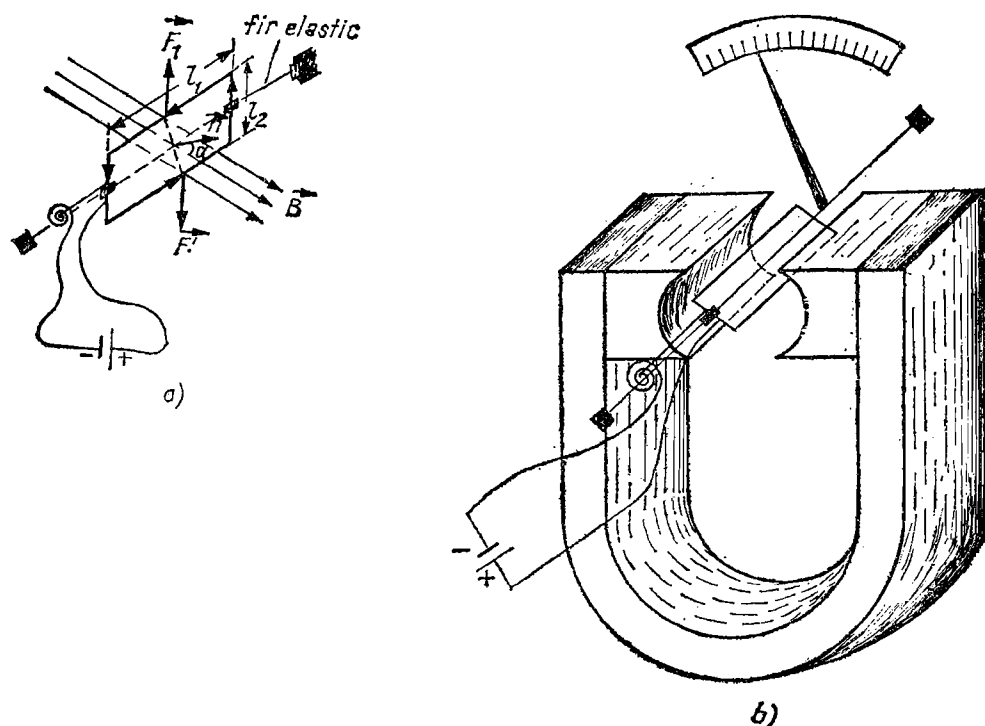


Fig. III.3.9

interacțiunea dintre un curent de intensitate  $I$ , ce trece printr-un cadru de sîrmă, și un cîmp magnetic uniform, perpendicular pe linia mediană a cadrului, în jurul căreia se poate roti (fig. III.3.9). Cadrul este prins solidar de un fir elastic. Din fig. III.3.9a se vede că asupra laturilor de lungime  $l_2$  acționează două forțe egale, dar de sens contrar,  $BIl_2$ , efectul lor fiind nul în cazul unui cadru rigid. În schimb, asupra laturilor de lungime  $l_1$ , acționează două forțe, egale ca mărime ( $F = F' = BIl_1 \sin \alpha$ ), dar nesituate pe același suport, astfel încît ele formează un cuplu, care rotește cadrul pînă cînd momentul rezistent al firului devine egal cu momentul forței electromagnetice. Un ac indicator, legat solidar de cadru (fig. III.3.9b), va indica pe un cadran, intensitatea curentului. Instrumentul funcționează ca *ampermetru* cînd este montat în serie și pentru a avea o cădere de tensiune mică pe el trebuie ca rezistența lui internă să fie mică. Aparatul funcționează ca *voltmetru* cînd este montat în paralel la bornele consumatorului. Deoarece căderea de tensiune pe voltmetru ( $I_v \cdot R_v$ ) este egală cu cea de la bornele consumatorului, pentru a o măsura cît mai precis pe prima este necesar ca  $I_v$  să fie cît mai mic, de aceea rezistența voltmetrului trebuie să fie mult mai mare decît cea a consumatorului.

### 3.4. FORME DE MAGNETISM

a) **Susceptibilitatea magnetică.** Încă din vremea genialului Faraday s-a vădit că magnetismul este o proprietate generală a substanțelor, dar nu sub forma aceasta puternică, directă a magneților permanenți. Spre deosebire de metalele și aliajele feromagnetice, există alte substanțe care se magnetizează greu, unele în sensul cîmpului aplicat, altele în sens contrar. Pentru a caracteriza aceste fenomene este util să folosim noțiunea de *magnetizare* ( $M$ ), care reprezintă momentul magnetic al unității de volum. Se arată, experimental că există o relație de proporționalitate între  $M$  și  $H$ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (3.31)$$

$\chi_m$  fiind denumit *susceptibilitate magnetică*. Pe de altă parte, dacă o substanță se magnetizează într-un cîmp extern, am văzut că intensitatea lui ( $H$ ) este modificată ( $B = \mu H$ ). Legătura vectorială între  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  și  $\vec{M}$  în sistemul SI este dată de relația:

$$B = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + \chi_m. \quad (3.32)$$

Cu alte cuvinte, inducția va fi cu atît mai mare cu cît  $\chi_m$  va fi mai mare, adică cu cît se va magnetiza mai ușor materialul. Procesul de magnetizare ar putea fi imaginat în felul următor: în fiecare substanță există un ansamblu de dipoli magnetici elementari, care tind să se alinieze într-un cîmp magnetic extern.

Unele metode de studiu al magnetizării corpurilor neferomagnetice se bazează pe interacțiunea între un moment magnetic și un cîmp magnetic neuniform (metoda Faraday). După cum se știe, la un magnet în formă de bară, pulberea magnetică se îngrămădește mai mult spre capete, acolo unde densitatea de linii de cîmp este mai mare. Dacă am investiga acest fapt cu ajutorul unui ac magnetic pe care l-am „plimba” în jurul barei magnetice am constata același lucru, că forțele de interacțiune sînt mai puternice pe măsură ce ne apropiem de poli, venind dinspre zona neutră. Pe acest principiu, ne



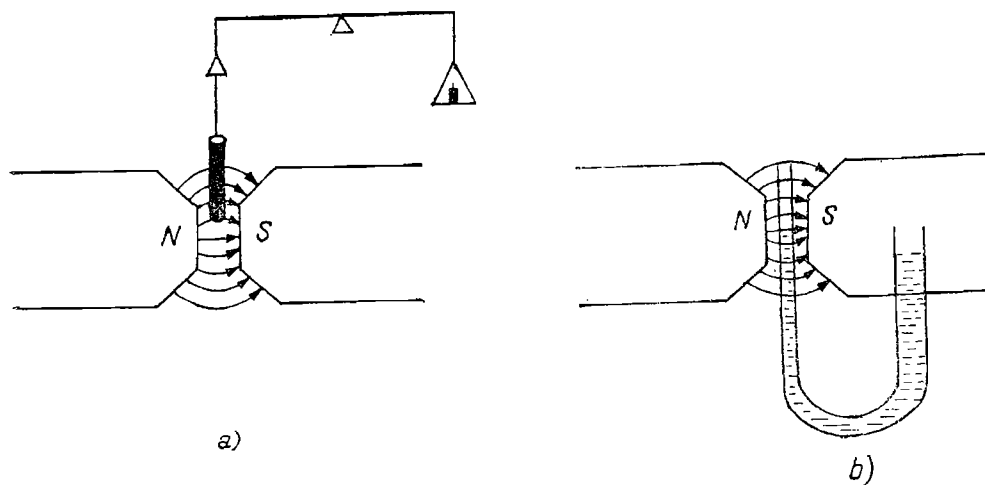


Fig. III.3.10

imaginăm că dacă suspendăm o substanță de brațul unei balanțe analitice și o plasăm în zona neuniformă a câmpului magnetic creat de doi poli tronconici, atunci când substanța se magnetizează, momentul ei magnetic interacționează cu câmpul și dezechilibrează balanța (fig. III.3.10a). Ea poate fi readusă în echilibru, măsurând astfel forța de interacțiune magnetică. Studiul magnetizării lichidelor se face într-o variantă (metoda Gouy) (fig. III.3.10b) în care lichidul este pus într-un tub în formă de U, avînd una din ramuri plasată între polii electromagnetului. Când se aplică un câmp magnetic, nivelele nu mai sînt egale și denivelarea este citită cu un instrument de precizie.

Corpurile magnetizate sînt atrase sau respinse în funcție de semnul lui  $\chi_m$ . Deși pare straniu, există însă substanțe care se magnetizează în sens invers câmpului aplicat, numite *substanțe diamagnetice* ( $\chi_m^d < 0$ ). Cu alte cuvinte, în interiorul lor, intensitatea câmpului magnetic este mai mică decît în aer. O altă caracteristică a lor o constituie faptul că proprietățile magnetice nu sînt influențate de temperatură, deci  $\chi_m^d$  este independent de  $T$ . Exemple de substanțe diamagnetice: cuarțul ( $\text{SiO}_2$ ), sarea de bucătărie ( $\text{NaCl}$ ), argintul și cuprul sub formă metalică.

O altă clasă mare de substanțe sînt acelea care se magnetizează slab în câmpuri externe, în sensul lor, iar susceptibilitatea magnetică depinde de temperatură. Ele sînt numite substanțe *paramagnetice* ( $\chi_m^p > 0$ ) cu:

$$\chi_m^p = \frac{C}{T}, \quad (3.33)$$

unde  $C$  este o constantă. Formula (3.33) numită și formula lui Curie ne arată că pentru  $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$ ,  $\chi_m^p \rightarrow \infty$ , adică, la  $0^\circ\text{K}$ , am realiza magnetizarea corpului în câmpuri foarte mici, a căror intensitate tinde la zero. Agitația termică se opune deci orientării dipolilor ansamblului.

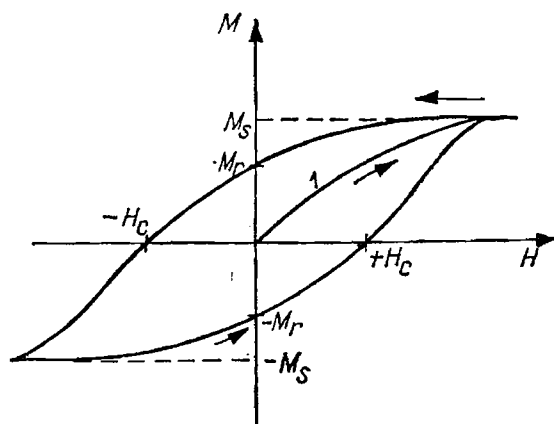


Fig. III.3.11

În sfârșit o altă clasă de substanțe o constituie substanțele *feromagnetice*, care se magnetizează foarte ușor în câmpuri magnetice de intensitate redusă ( $\chi_m \gg 0$ ). Feromagneticele posedă încă două caracteristici particulare: a) magnetizarea lor constituie un proces ireversibil, în care se atinge o saturație ( $M_s$ ), (vezi fig. III.3.11) și b) magnetizarea la saturație depinde de temperatură devenind zero peste o anumită limită, numită *temperatură Curie* ( $T_c$ ) (fig. III.3.12). Peste această temperatură, corpul se comportă ca un paramagnet.

Bucula din fig. III.3.11, numită *ciclu de histerezis* se obține plecând din starea demagnetizantă prin creșterea câmpului magnetic (curba 1). La revenire, pentru  $H = 0$ , corpul păstrează o parte din magnetizare, numită *magnetizare remanentă*. Magnetizarea devine zero la o anumită valoare a intensității câmpului aplicat în sens invers, numită *câmp coercitiv*. De aici încolo, procesul se repetă.

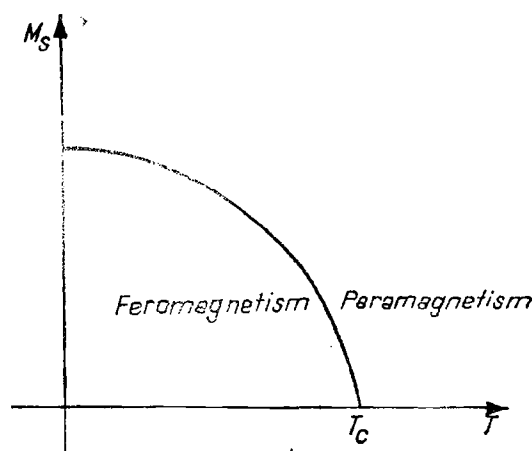


Fig. III.3.12

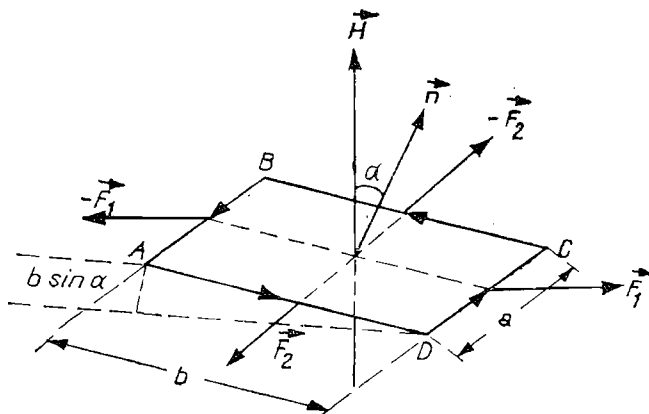


Fig. III.3.13

Proba poate fi readusă în starea demagnetizată, fie prin tăierea cîmpului atunci cînd am atins  $H_c$ , fie prin inversări repetate ale cîmpului și scăderea continuă a intensității lui la valoarea zero. Trebuie să menționăm că pe lîngă metalele și aliajele feromagnetice, o comportare similară are și magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), dar care nu este un feromagnet ci *ferimagnet*. Despre specificul ei însă vom vorbi mai tîrziu.

**b) Natura magnetismului atomic.** În descrierea fenomenologică a magnetismului am folosit în mod frecvent noțiunea de moment magnetic deoarece experiența ne indică faptul că polii magnetici nu pot fi separați. Am văzut însă că este posibil să generăm cîmpuri magnetice cu ajutorul curenților electrici. Din această cauză, să încercăm să calculăm momentul magnetic al unui „magnet” de acest tip. Vom folosi ca auxiliar fig. III.3.13 în care este reprezentată interacțiunea dintre un cîmp magnetic uniform în spațiu a cărui intensitate este  $H$ , cu un curent electric ce circulă printr-un cadru dreptunghiular mic de laturi  $a$  și  $b$ . Geometria desenului este așa fel aleasă încît forțele electromagnetice care acționează asupra laturilor  $BC$  și  $DA$  să fie pe aceeași direcție încît efectul lor este anulat de rigiditatea cadrului.

Forțele ( $\vec{F}_1$  și  $-\vec{F}_1$ ) formează un cuplu al cărui moment ( $\mathcal{M}$ ) este egal cu:

$$\mathcal{M} = F_1 b \sin \alpha = \mu_0 H a I b \sin \alpha = \mu_0 H m \sin \alpha, \quad (3.34)$$

unde am notat cu  $m$  produsul  $Iab = IS$ ,  $S$  fiind suprafața cadrului. Dacă vom lucra în CGS și în vid ( $\mu_0 = 1$ ), atunci momentul mecanic scris vectorial,  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{H}$ , seamănă cu formula (3.1), astfel că putem spune că produsul  $IS$  joacă rol de moment magnetic și este echivalent unui magnet de moment magnetic  $m = IS$ . Sensul normalei la cadru va fi sensul nord-sud al unei bare magnetice. Introdus în felul acesta, momentul magnetic are dimensiunea *curent*  $\times$  *suprafață*.

Folosind rezultatul de mai sus, Ampère a propus la începutul veacului trecut o ipoteză extrem de îndrăzneță pentru a explica magnetismul substanțelor și anume că în interiorul lor ar exista o mulțime de „curenți moleculari”,

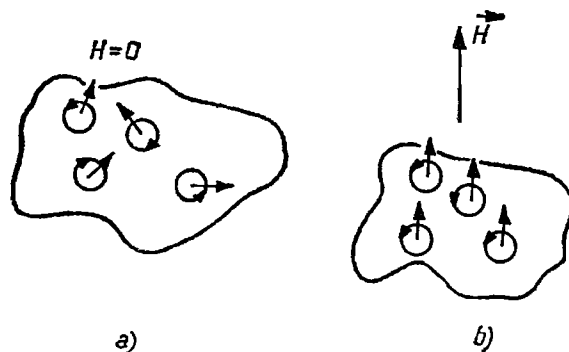


Fig. III.3.14

fiecare dintre ei generînd un cîmp magnetic dezordonat (fig. III.3.14a). Un alt cîmp din exterior nu ar face altceva decît să ordoneze acești magneti elementari (fig. III.3.14b). La peste 100 de ani de la formularea ipotezei lui Ampère, fizica atomică avea să-i ofere o confirmare strălucită: electronii care se mișcă în jurul nucleelor pot fi asemănați cu niște curenți electrici elementari. Mișcarea electronilor pe orbită generează un cîmp magnetic, curențul respectiv avînd un moment magnetic, numit *orbital* și care nu poate fi afectat de agitația termică. Spre deosebire însă de ipoteza lui Ampère, în care momentele magnetice ale acestor „curenți” ar fi orientate paralel sub acțiunea unui cîmp exterior, teoria arată și experiența confirmă că, de fapt, curenții orbitali sînt răspunzători de diamagnetism. În felul acesta se explică astăzi faptul găsit de Faraday că toate substanțele posedă diamagnetism, dar acesta poate fi acoperit de celelalte forme de magnetism. Paramagnetismul poate fi explicat prin introducerea *magnetismului de spin*\*. La prima vedere, un electron aflat într-o mișcare de rotație în jurul axei sale ar fi echivalent cu un curent microscopic, care ar fi răspunzător de momentul magnetic de spin. La o analiză mai atentă, supoziția aceasta cade din două motive: 1) au moment magnetic de spin și neutronii, care sînt particule neutre; 2) dacă se calculează viteza periferică a unui electron, corespunzătoare momentului magnetic determinat experimental, se obține o valoare mai mare ca ... viteza luminii, dar acest fapt contrazice teoria relativității. Nu ne rămîne deci decît să semnalăm existența unui moment magnetic propriu al electronului, legat de o mișcare internă, pe care nu o putem descrie printr-un analog microscopic.

Datorită celor două varietăți de magnetism, un atom, sau ion poate să posedă un moment magnetic, adică întregul edificiu se comportă ca un magnet elementar care se poate orienta sub acțiunea unui cîmp magnetic extern. Această orientare, care este legată de orientarea atomului ca un întreg poate fi perturbată de agitația termică.

c) **Forme de magnetism ordonat.** Pentru a explica de ce feromagneticele se magnetizează ușor, Weiss (1905) a presupus că în aceste substanțe, momentele magnetice ale atomilor sînt aliniate paralel pe regiuni. finite, numite

\* Spin reprezintă o mișcare de titirez.

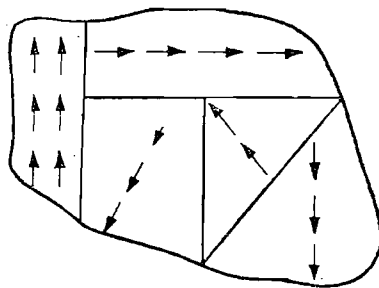


Fig. III.3.15

domenii de magnetizare spontană (fig. III.3.15), dar care nu sînt orientate, astfel că în ansamblu, substanța nu apare magnetizată. Zonele de tranziție de la un domeniu la altul poartă numele de *perei*. În prezența unui cîmp magnetic  $H$  pereții încep să se miște dezvoltîndu-se domeniile cu magnetizarea în lungul cîmpului. Cînd proba era demagnetizată, pereții sînt fixați în anumite poziții de echilibru din care sînt scoși de la o anumită valoare a intensității cîmpului aplicat. După înlăturarea cîmpului, pereții tind să revină la pozițiile inițiale, dar unii dintre ei rămîn captați în alte poziții, astfel că proba rămîne cu o magnetizare remanentă. Pentru a fi readuși toți pereții la poziția inițială trebuie aplicat un cîmp în sens contrar, astfel că la o anumită valoare ( $H_c$ ) proba redevine nemagnetizată. În felul acesta s-a putut da o explicație ciclului de histerezis. Trebuie să menționăm că atît orientarea paralelă a momentelor magnetice, cît și existența domeniilor și pereților sînt astăzi fapte confirmate pe cale experimentală.

Dacă feromagnetismul apare ca un aranjament paralel de momente magnetice (fig. III.3.16a), ordinea lor antiparalelă duce la *antiferomagnetism* (fig. III.3.16b). Într-un antiferomagnet, deși există ordine, momentul magnetic global este zero. Un cîmp magnetic exterior tinde să rotească momentele așezate nefavorabil față de direcția sa, însă acestei acțiuni i se opun forțele de ordonare, a căror natură nu va fi discutată aici. Printre substanțele antiferomagnetice se numără o serie de compuși ai fierului, cobaltului, nichelului, cum ar fi oxizii ( $\text{FeO}$ ,  $\text{CoO}$ ,  $\text{NiO}$ ), halogenurile etc.

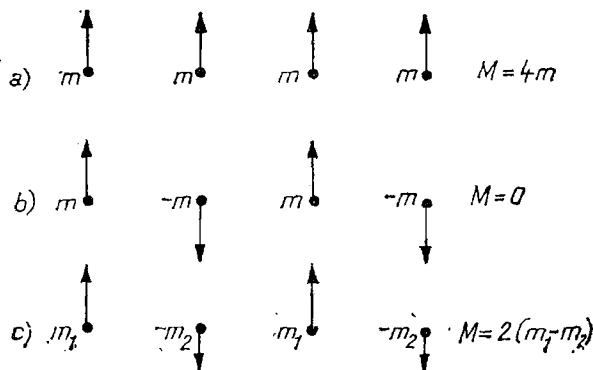
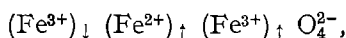


Fig. III.3.16

*Ferimagnetismul* nu este altceva decît un antiferomagnetism necompensat (fig. III.3.16c), în sensul că deși avem momente magnetice antiparalele, deoarece nu sînt egale, proba are un moment magnetic diferit de zero. Această ordine magnetică presupune existența unui număr neegal de atomi (sau ioni) care să aibă momentele magnetice dirijate în „sus” sau în „jos”. În magnetită ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) de exemplu, cei trei ioni de fier au momentele orientate astfel:



deci un ion are momentul într-un sens, iar ceilalți doi, în sens opus și de aceea magnetita apăsă ca un feromagnet cînd de fapt ea este ... un ferimagnet. De aici provine și denumirea de *ferite* dată unor substanțe. Astfel, magnetita este feritul de ... fier, dar prin înlocuirea unui ion de fier cu un alt ion, de exemplu cu cobalt, nichel, cupru etc. obținem feritul de cobalt, de nichel etc. Explicarea ferimagnetismului a fost prezentată de abia în 1946 de L. Néel, descoperire pentru care a primit premiul Nobel în 1970.

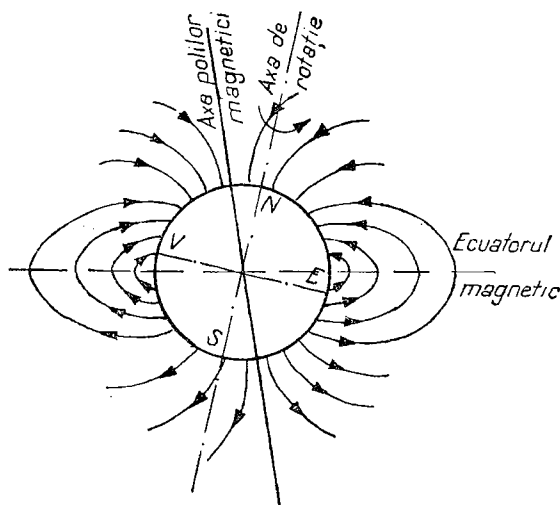


Fig. III.3.17

*Elemente de geomagnetism.* Existența unui câmp magnetic terestru a fost stabilită la sfîrșitul secolului al XVI-lea de către Gilbert (1600) prin magnetizarea unor sîrme de fier. În felul acesta, Pămîntul a apărut ca un mare magnet, dar ai cărui poli magnetici sînt plasați într-o succesiune inversă față de polii geografici pentru că orientarea polului nord al acului indică de fapt existența unui pol magnetic sud în acel loc. O altă caracteristică este legată de faptul că axa polilor magnetici este înclinată față de axa polilor geografici cu aproximativ  $12^\circ$  (fig. III.3.17). În figura III.3.17 este desenată topografia liniilor cîmpului magnetic terestru. Pentru descrierea cîmpului este introdusă o descompunere după următoarele direcții (fig. III.3.18a): direcția verticalei locului, dirijată spre centrul Pămîntului (*componenta normală*  $H_n$ ) și două direcții legate de coordonatele geografice, una fiind dirijată după meridianul geografic (axa  $Ox$ ), iar alta după paralela din acel punct (axa  $Oy$ ) (vezi fig. III.3.18b). De fapt se lucrează cu rezultanta componentelor de pe ultimele

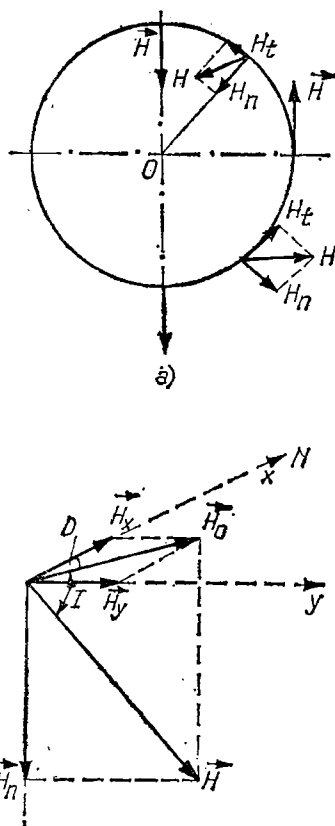


Fig. III.3.18

două direcții, care este situată în planul tangent la suprafața Pământului și de aceea este numită *componenta orizontală* ( $H_0$ ). Unghiul pe care-l face vectorul câmpului magnetic terestru cu planul orizontal se numește *înclinație* ( $I$ ), iar cel dintre componenta orizontală și planul meridianului geografic este numit *declinație* ( $D$ ).

Câmpul magnetic terestru are câteva proprietăți ciudate; este vorba de *variațiile* câmpului, care constau în modificarea caracteristicilor lui (mărimea componentelor, de exemplu), din loc în loc, de la oră la oră, sau chiar de la un an la altul. Aceste variații sînt, în mare, de două tipuri: *variații periodice* și *intîmplătoare*. Variațiile în timp depind însă și de poziția punctului de observație de pe glob în sensul că pe lîngă regularitățile efectuate pe suprafața globului, cu o simetrie în jurul axei magnetice, există și *anomalii* legate de neomogenitățile subsolului. Modul de distribuție a rocilor și grosimea scoarței influențează mărimea câmpului magnetic. Studiul acestor anomalii poate oferi indicații prețioase asupra elementelor magnetice din subsol, constituind astăzi un instrument de cercetare în geologie.

Variațiile în timp sînt următoarele: diurne, lunare, anuale și seculare, numite astfel după periodicitatea lor. Dacă primele trei pot fi legate de cauze externe (poziția Pămîntului față de Lună, de Soare și de alte planete), ultimul tip este legat de fenomene necunoscute încă și asociate probabil naturii magnetismului terestru. În cadrul acestor variații seculare, a căror perioadă este probabil de sute de ani, este de remarcat un alt fenomen surprinzător: modificarea poziției axei magnetice și deplasarea anomaliilor magnetice spre vest cu circa  $0,2^\circ$  pe an. Fizicienii au descoperit, pe o cale foarte ingenioasă, că în decursul mileniilor, axa magnetică a Pămîntului și-a schimbat de cîteva ori sensul chiar, fenomen numit *inversiunea* polilor magnetici (!). Fenomenul a fost intuit prin descoperirea faptului că în stratele geologice de „vîrste” diferite, magnetizarea rocilor are diverse orientări față de sensul cîmpului magnetic actual, în unele dintre ele fiind dirijată în sens invers. Și dacă se presupune că odată cu răcirea Pămîntului, substanțele magnetice, trecînd sub punctul Curie, rămîneau cu magnetizarea fixată în sensul cîmpului din acea epocă, avem de-a face cu o „memorare” a sensului cîmpului magnetic în decursul veacurilor. Depunerile de pe fundul lacurilor și mărilor oferă și ele asemenea informații, dar și mai interesant este faptul că și cărămizile construcțiilor de-a lungul veacurilor „păstrează” amintiri asupra sensului cîmpului magnetic.

Așa cum am spus mai înainte, pe lîngă variațiile periodice există și variații întîmplătoare, numite și *perturbații*, iar cînd sînt mai intense — *furtuni magnetice*. Ele sînt provocate de neregularitățile produse în activitatea Soarelui. Acest tip de variații provoacă perturbații în radio- și telecomunicații. În timpul furtunilor solare sînt emise fluxuri puternice de particule încărcate, de ambele sarcini, în număr egal. Cînd ajung în vecinătatea Pămîntului, sub acțiunea cîmpului său magnetic, particulele prezintă o tendință de separare spre cele două emisfere, generîndu-se astfel curenții electrici la scară cosmică, al căror cîmp magnetic modifică pe cel terestru: într-o emisferă crește, iar în cealaltă scade.

Cauzele externe, cum ar fi poziția Lunii, sau a Soarelui sînt cele care provoacă și apariția variațiilor de durată mai scurtă. Pentru explicarea lor s-a presupus că în jurul Pămîntului există în permanență un proces de ionizare produs de radiația ultravioletă, care vine de la Soare, proces, care evident este mai puternic în porțiunea luminată, adică ziua. Poziția mai apropiată, sau mai depărtată a Lunii și Soarelui provoacă deplasări ale acestor sarcini, analog mareelor oceanelor, fiind numite chiar *maree atmosferice*. Aceste maree sînt generatoare de curenți electrici atmosferici, care produc variațiile respective.

Neexplicate rămîn însă variațiile seculare, care țin direct de natura magnetismului terestru, necunoscută încă. Se poate însă preciza ceva, că un rol esențial în generarea acestui cîmp îl are nucleul Pămîntului, partea sa centrală aflată într-un fel de stare lichidă. Zicem, într-un fel pentru că, pe de o parte la temperatura aceea de aproximativ  $12\,000^\circ\text{C}$  toate elementele sînt topite, iar, pe de altă parte, la presiuni atît de mari particulele constitutive nu se mai pot mișca așa de ușor ca într-un lichid normal. Ei bine, acest nucleu lichid, rămîne în urma rotației Pămîntului în jurul axei sale, avînd deci o viteză unghiulară mai mică. Această diferență de viteză ar explica tocmai deplasarea spre vest a anomaliilor magnetice. Pentru explicarea naturii cîmpului terestru au fost propuse multe ipoteze, teorii, dar nici una dintre ele nu oferă o explicație satisfăcătoare fenomenelor indicate.



## 4. Electromagnetism

Sub această denumire generală vom include un număr de fenomene care se referă la legătură dintre câmpul electric și câmpul magnetic: forța Lorentz, forța electrodinamică, inducția electromagnetică etc.

### 4.1. FORȚA LORENTZ

Acțiunea unui câmp electric ( $\vec{E}$ ) asupra unei particule care are sarcina  $q$  este descrisă de forța electrostatică  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , iar acțiunea unui câmp magnetic ( $\vec{B}$ ) este descrisă de forța electromagnetică  $\vec{F}_m$ , care poate fi dedusă din interacțiunea unui câmp magnetic cu un curent. Ținând seama de faptul că un ansamblu de  $N$  particule identice, încărcate, în mișcare, sînt echivalente cu un curent  $\left(I = N \frac{q}{t}\right)$ , atunci forța ( $\vec{F}_m$ ) care acționează asupra unei particule în mișcare este egală în SI cu:

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{F}}{N} = \frac{I(\vec{l} \times \vec{B})}{N} = \frac{q}{t} (\vec{l} \times \vec{B}) = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.1)$$

în care  $\frac{\vec{l}}{t} = \vec{v}$  reprezintă viteza particulei, iar  $l$  este lungimea traiectoriei parcursă în timpul  $t$ . Se vede de aici că acțiunea câmpului magnetic nu este legată de existența conductorului, ci doar de existența curentului.

Dacă n-ar fi câmpul magnetic, electronul, de exemplu, și-ar urma traiectoria rectilinie (fig. III.4.1) (linia punctată). Dacă ținem seama de acțiunea lui  $\vec{F}_m$ , atunci mișcarea lui trebuie să fie astfel încît  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$  în fiecare moment. Dacă  $\vec{v}$  este constant, atunci, cum el trebuie să fie vector tangent la traiectorie și cum  $\vec{F}_m$  este și el constant ( $\vec{B}$  este constant) traiectoria este un cerc (vezi secțiunea V). Deoarece  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ , rezultă că forța electromagnetică nu execută un lucru mecanic și deci particula nu este accelerată în câmp magnetic. Particulele

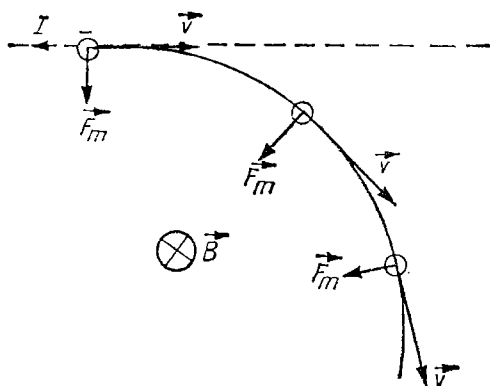


Fig. III.4.1

încărcate se pot găsi însă sub acțiunea simultană a câmpului electric și câmpului magnetic, forța rezultantă fiind numită *forță Lorentz*:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.2)$$

De data aceasta, acțiunea lui  $\vec{E}$  imprimă o accelerație particulei, ceea ce face ca traiectoria să nu mai fie un cerc. Folosirea forței electromagnetice în studiul particulelor elementare va fi prezentată în secțiunea a V-a.

## 4.2. FORȚA ELECTRODINAMICĂ

Se constată experimental că doi curenți electrici paraleli se atrag dacă sînt de același sens, dar se resping dacă sînt de sens contrar, forța de interacțiune fiind numită *forță electrodinamică*. Se poate remarca un aspect esențial: deși conductorii prin care trec curenții sînt neutri din punct de vedere electric, între ei apare o forță cînd sarcinile sînt puse în mișcare. Cu alte cuvinte, avem de-a face cu o interacțiune de tip nou care are loc prin intermediul câmpului magnetic generat de curenți. Pe de altă parte, acest lucru ne arată că sarcinile electrice generează cîmp magnetic numai dacă sînt în mișcare. Mișcarea unei sarcini electrice este însoțită însă și de o modificare în spațiu și în timp a intensității câmpului electric deoarece sarcina își „poartă” cu ea cîmpul electric generat prin însăși natura ei. Dacă vom „privi” deci dintr-un punct o sarcină electrică, în repaus față de noi, ca observatori, aparatele noastre vor indica numai un *cîmp electric*, a cărui intensitate este constantă în timp. Cînd sarcina electrică se deplasează în raport cu punctul de observație, noi „vedem” un curent și aparatele înregistrează apariția unui cîmp magnetic. În același timp, odată cu deplasarea sarcinii electrice, intensitatea cîmpului electric se modifică în timp. Ajungem deci la concluzia, extrem de importantă, că un cîmp magnetic poate să fie generat numai de sarcini în mișcare, sau atunci cînd intensitatea cîmpului electric este variabilă în timp într-o regiune din spațiu.

Forța electrodinamică poate fi calculată considerînd doi curenți paraleli, de intensități diferite ( $I_1$  și  $I_2$ ), care circulă prin doi conductori de aceeași lungime  $l$ , situați la distanța  $d$  unul de altul (fig. III.4.2a).

Fiecare curent ( $I_i$ ) se găsește în cîmpul magnetic creat de celălalt ( $B_j$ ), iar fiecare porțiune elementară de lungime  $\Delta l$  a sa va „simți” efectul numai al liniilor de cîmp create de elementul paralel cu el, situat pe direcția perpendiculară, deoarece liniile de cîmp create de alte elemente nu intersectează elementul corespunzător. Expresia forței cu care interacționează curentul 1 asupra curentului 2 ( $F_{12}$ ) este dată de:

$$F_{12} = B_1 I_2 l = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} l = F_{21}. \quad (4.3)$$

Cu această expresie se poate înțelege definiția amperului adoptată în SI: amperul este intensitatea unui curent electric constant, care, menținut în doi conductori paraleli, rectilinii, din lungime infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezați în vid la o distanță de 1 metru unul de altul, ar produce între aceștia, pe o lungime de 1 metru, o forță egală cu  $2 \cdot 10^{-7}$  newtoni.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, cele două forțe trebuie să fie egale

și de sens contrar:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Această consecință este ușor de verificat urmărind fig. III.4.2b. Sensul forțelor de interacțiune poate fi înțeles folosind aceeași idee a lui Faraday privind „presiunea” liniilor de cîmp. Pentru a o ilustra prezentăm în fig. III.4.2c schema liniilor de cîmp pentru doi curenți paraleli, de sens contrar, în care se remarcă o aglomerare a liniilor în spațiul dintre curenți.

Analizînd, comparativ, interacțiunea electrostatică cu cea electrodinamică, se poate stabili o concluzie deosebit de importantă. Presupunem că avem de-a face cu curenți de electroni. Forța de interacțiune electrostatică între doi

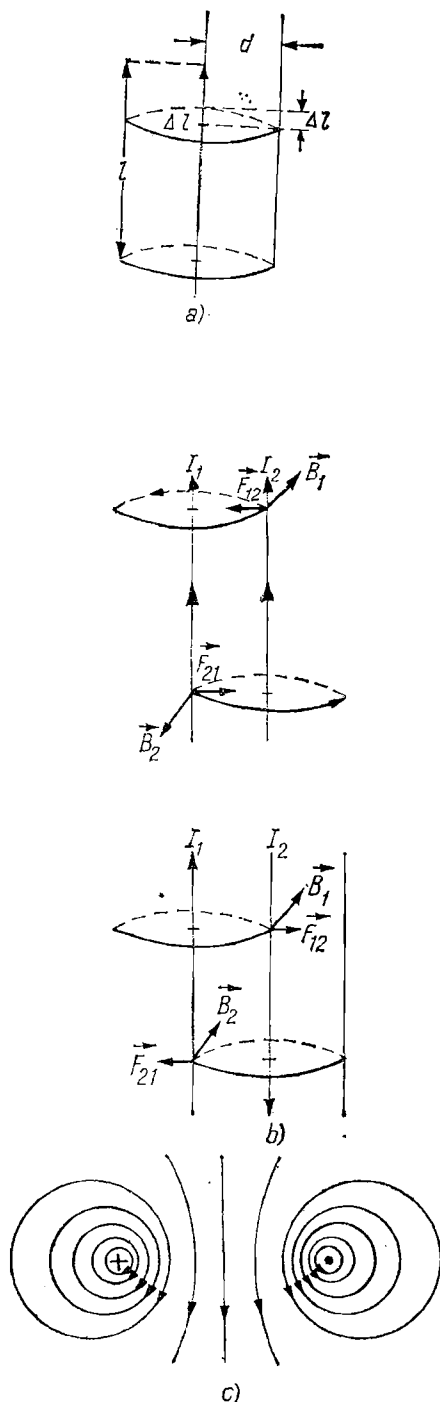


Fig. III.4.2

electroni situați pe cele două circuite cînd sînt la distanța  $d$ , este dată de:

$$f_{es} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{d^2},$$

iar forța electrodinamică pe electron este:

$$f_{ed} = \frac{F_{ed}}{N} = \frac{B_1 e v_2}{N} = \frac{\mu}{2\pi d} \frac{I_1 e v_2}{N} = \frac{\mu}{2\pi d} \frac{e^2 v_2}{t}.$$

Se vede astfel că raportul  $\frac{f_{es}}{f_{ed}}$ , care trebuie să fie adimensional, este proporțional cu  $\frac{d}{\epsilon \mu t_1 v_2}$ , de unde rezultă ecuația dimensională:

$$\left[ \frac{1}{\epsilon \mu} \right] = [v]^2.$$

### 4.3. INDUCȚIA ELECTROMAGNETICĂ

a) **Introducere.** Unsprezece ani a căutat Faraday (între 1820 și 1831) să descopere producerea curentului electric sub acțiunea cîmpului magnetic. Totul părea atît de simplu, dar toate experiențele erau sortite eșecului pentru că se raționa astfel: din moment ce apare un cîmp magnetic în jurul unui curent electric, de ce nu apare și un curent electric într-un conductor plasat într-un cîmp magnetic? Într-adevăr, cîmpul magnetic apare în jurul unui curent electric, dar acesta este întreținut printr-un consum de energie din exterior. În cazul în care plasăm în repaus un conductor într-un cîmp magnetic, nu se consumă energie, deci nu poate să apară un curent electric.

Experiența crucială a lui Faraday, care prefigura transformatorul de mai târziu a fost efectuată în felul următor: pe un cilindru de lemn (fig. III.4. 3a) a înfășurat două bobine, una legată la un galvanometru ( $B_1$ ) și alta la o baterie ( $B_2$ ). În mod neașteptat, în bobina  $B_1$  apărea un curent numai atunci cînd întrerupătorul  $K$  stabilea sau întrerupea curentul prin  $B_2$ . Semnalul apărut în  $B_1$  era slab, dar dispărea chiar dacă prin  $B_2$  circula curentul, deci exista un cîmp magnetic ale cărui linii treceau și prin  $B_1$ . O altă observație: curentul înregistrat în  $B_1$  avea un sens la închiderea circuitului, dar își schimba sensul

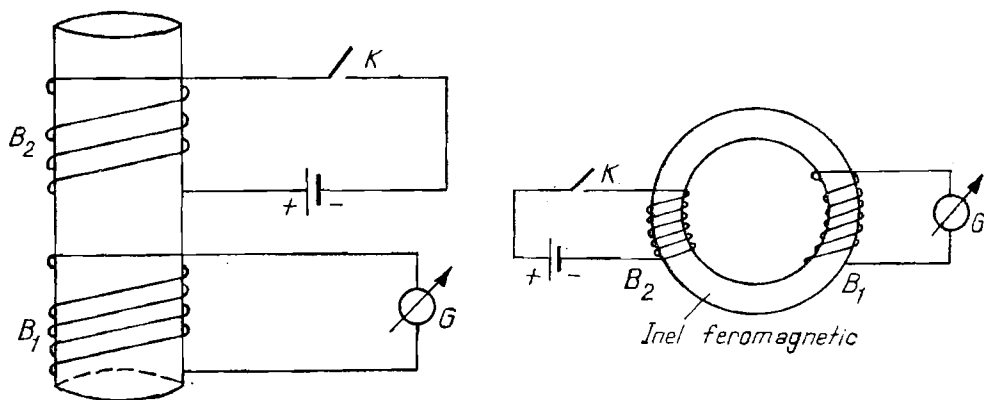


Fig. III.4.3

la întreruperea curentului. O analiză atentă a curentului din  $B_1$ , numit *curent indus*, a arătat că la închiderea circuitului, cînd se stabilește un cîmp magnetic, sensul curentului indus este astfel, încît cîmpul magnetic creat de el are sens invers cîmpului generat de  $B_2$ . Dimpotrivă, la întreruperea curentului, deci cînd cîmpul magnetic dispare, sensul curentului indus este astfel, încît cîmpul creat de el are același sens cu cel care dispare. Fenomenul astfel descoperit de Faraday a primit numele de *inducție electromagnetică*.

Să presupunem că bobinele sînt înfășurate pe un inel feromagnetic (fig. III. 4. 3b). În aceleași condiții experimentale, curentul indus este mai mare decît în cazul precedent de  $\mu_r$  ori.

Tot experiența a mai arătat încă patru factori care afectează fenomenul: curentul indus este proporțional cu numărul  $N$  de spire din bobina  $B_2$ , cu secțiunea lor,  $S$ , cu intensitatea cîmpului magnetic produs de  $B_1$ ,  $\mu H$ , și, în sfîrșit, este invers proporțional cu intervalul de timp ( $\Delta t$ ) în care are loc modificarea intensității curentului magnetic. Sintetizînd, experiențele lui Faraday arătau că un curent indus apare numai la variația în timp a intensității cîmpului magnetic, dar că el nu este proporțional pur și simplu doar cu variația intensității acestuia, ci cu variația fluxului magnetic ( $\Delta \Phi$ ). Mai precis, intensitatea curentului indus este proporțională cu viteza de variație a fluxului magnetic ( $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ). Ținînd seama de faptul că apariția unui curent electric este legată de existența unei tensiuni electromotoare, în cazul de față tensiunea electromotoare indusă ( $\mathcal{E}_i$ ), Faraday a stabilit legea:

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \mu_r \mu_0 \frac{\Delta(NHS)}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Să ne oprim mai mult asupra modului de producere a tensiunii induse. După cum se știe, nu este nevoie să modificăm pe  $H$  prin stabilirea și întreruperea curentului. Se poate realiza acest lucru fie introducînd și scoțînd o bobină prin care circulă un curent, într-una legată la un galvanometru, fie introducînd și scoțînd o bară magnetică în aceeași bobină. În ambele experiențe, variația fluxului este realizată prin variația intensității cîmpului magnetic:

$$\mathcal{E}_i \sim \mu NS \frac{\Delta H}{\Delta t}. \quad (4.4')$$

Experiența poate fi realizată însă și în alt mod. Să considerăm un circuit ca cel din fig. III.4.4a în care o latură de lungime  $l$  este mobilă. Dacă ea este deplasată perpendicular pe direcția liniilor de cîmp, atunci se poate pune în evidență un curent indus. De data aceasta, intensitatea cîmpului a rămas constantă, dar s-a modificat secțiunea cu  $\Delta S$

$$\mathcal{E}_i \sim \mu H \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Reunind toate datele expuse pînă acum, rezultă că dacă există o variație a fluxului unui cîmp magnetic (flux inductor), într-un conductor poate să apară un curent de inducție al cărui sens este așa fel, încît tinde să se opună cauzei care l-a generat. Aceasta este legea lui Lenz, în virtutea căreia formula (4.4) devine:

$$\mathcal{E}_i = - |C| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \text{ sau } \mathcal{E}_i = - |C| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - |C| \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.5)$$

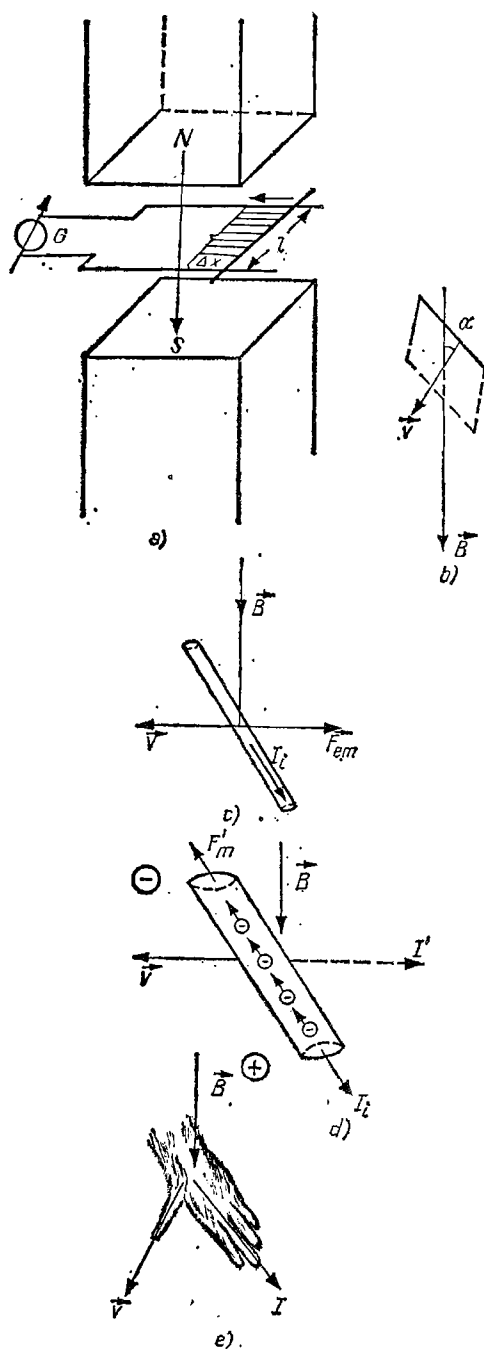


Fig. III.4.4

unde  $|C|$  reprezintă o constantă numerică legată de sistemul de unități:

$$\mathcal{E}_i(V) = - \frac{\Delta\Phi(\text{Wb})}{\Delta t(s)}, \quad \text{sau}$$

$$\mathcal{E}_i(V) = - 10^{-3} \frac{\Delta\Phi(\text{Mx})}{\Delta t(s)}. \quad (4.5')$$

b) **Natura și sensul tensiunii electromotoare induse.** Pentru a înțelege mecanismul de producere a tensiunii induse și pentru a demonstra că într-adevăr relația este corectă, vom face apel la două experiențe. Prima dintre ele se referă la mișcarea unui conductor liniar într-un câmp magnetic constant și uniform (fig. III. 4.4b).

Dacă  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , atunci variația fluxului este maximă:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu H \frac{l\Delta x}{\Delta t} = Blv, \quad (4.6)$$

în care  $v$  reprezintă viteza de deplasare a conductorului. Dacă însă  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ , atunci  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0$ . Într-o poziție in-

termediară, când  $\vec{v}$  face unghiul  $\alpha$  cu  $B$ , tensiunea indusă este dată de:  $|\mathcal{E}_i| = Blv \sin \alpha$ .

Pentru a găsi sensul curentului indus avem la îndemână o interpretare microscopică. Ea se bazează pe principiul acțiunii și reacțiunii: dacă scoatem conductorul din repaus și-l punem în mișcare, să presupunem perpendicular pe direcția liniilor de câmp, atunci „el” tinde să reacționeze cu o forță egală și de sens contrar. Dacă apare un curent de inducție, atunci sensul lui trebuie să fie astfel, încât forța electromagnetică dintre el și câmpul magnetic să echilibreze forța exterioară, deci să se opună mișcării. Ținând seama de sensul forței elec-

tromagnetice și al intensității cîmpului se poate stabili ușor sensul curentului indus (fig. III. 4.4c). Să urmărim acum interpretarea microscopică ținînd seama de existența electronilor liberi într-un metal (fig. III. 4.4d). Odată cu mișcarea conductorului sînt antrenați și electronii a căror mișcare este echivalentă cu un curent  $I'$  dirijat în sens invers vitezei. Forța electromagnetică  $F'_m$  dintre acest curent și cîmpul magnetic extern dirijează electronii spre un capăt al conductorului. Mișcarea lor în lungul conductorului este echivalentă cu un curent de sens opus — *curentul de inducție*  $I_i$ . După cum se vede, cele două moduri de interpretare nu se contrazic, ci se susțin reciproc.

Urmărind modul de așezare în spațiu a vectorilor  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$ , se poate găsi sensul lui  $I_i$ , în cazul general cu ajutorul regulii mîinii drepte a lui Flemming (fig. III. 4.4e).

Să revenim la mișcarea conductorului perpendicular pe direcția liniilor de cîmp. Trebuie cheltuit lucru mecanic pentru învingerea forței electromagnetice ( $BIl$ ) dirijată în sens invers deplasării

$$L = F_{\text{ext}} \Delta x = - BIl\Delta x = - BI\Delta S = - I\Delta\Phi.$$

Pe de altă parte, pentru respectarea principiului conservării energiei, acesta este egal tocmai cu lucrul necesar deplasării sarcinii totale  $\Delta Q$  prin tot circuitul, adică:

$$L = \mathcal{E}_i \Delta Q = \mathcal{E}_i I \Delta t = - I\Delta\Phi \Rightarrow \mathcal{E}_i = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Am reobținut astfel, pentru acest caz particular, formula (4.5).

c) **Măsurarea cîmpului magnetic cu ajutorul inducției electromagnetice.** Vom exemplifica metoda prin examinarea cîmpului pe axul unui solenoid (fig. III. 4.5), pe care-l legăm la sursa de tensiune prin intermediul unui întrerupător, astfel făcut, încît prin trecerea lui dintr-o poziție în alta, curentul și deci și cîmpul magnetic să fie inversat de la ( $B$ ) la ( $-B$ ). În interiorul solenoidului plasăm o bobină sondă, cu  $N$  spire, de suprafață  $S$ . Să presupunem că circuitul solenoidului este închis avînd întrerupătorul în poziția (1). Atunci cînd vom inversa curentul prin trecerea de pe poziția (1) la poziția (2), fluxul variază de la valoarea ( $\Phi_m$ ) la ( $-\Phi_m$ ), astfel încît cantitatea de electricitate produsă este dată de:

$$Q = \int i dt = \int_{\Phi_m}^{-\Phi_m} \left( - \frac{d\Phi}{R} \right) = 2\Phi_m/R = \frac{2NS}{R} B. \quad (4.7)$$

Deoarece deviația ( $\delta$ ) pe care o indică instrumentul este proporțională cu  $Q$ ,  $\delta = CQ$ , atunci cunoscînd constanta  $C$ , se poate calcula ușor intensitatea cîmpului:  $B = \frac{R}{2NS} \frac{\delta}{C}$ .

d) **Galvanometrul.** Am menționat deseori în paginile precedente folosirea unui instrument foarte sensibil la curenți slabi — galvanometrul. L-am menționat, de asemenea, în experiențele de inducție electromagnetică cînd la variații bruște de flux magnetic se înregistrau curenți de scurtă durată, cu alte cuvinte

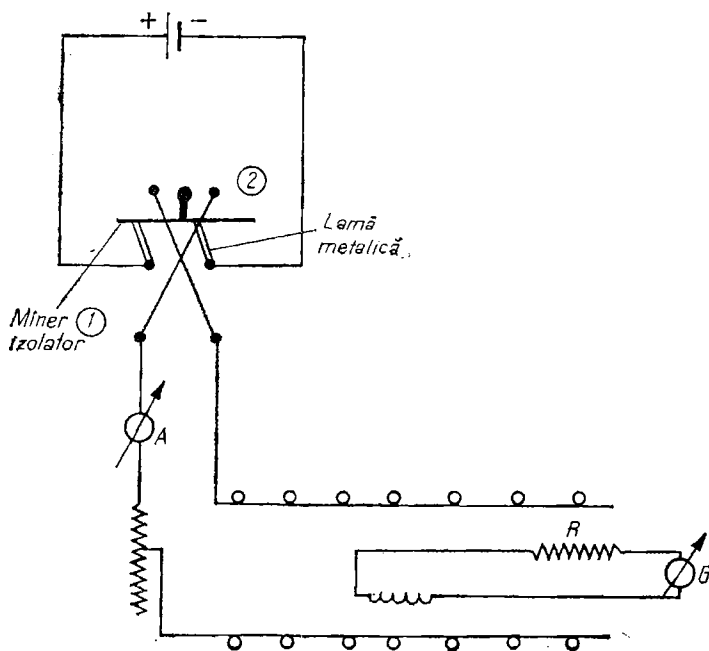


Fig. III.4.5

erau înregistrate cantități de electricitate ( $\Delta Q$ ) care se scurgeau rapid. În acest din urmă caz, aparatul poartă numele de *galvanometru balistic*.

Cel mai răspândit tip este galvanometrul cu cadru mobil, studiat mai ales de Deprez și d'Arsonval. Schema de principiu a unui asemenea galvanometru este indicată în fig. III 4.6. Se vede că este compus dintr-un cadru mobil format din  $N$  spire de secțiune  $S$ , bobinate pe un miez cilindric de fier și dintr-un magnet permanent cu două piese polare care asigură un câmp intens și destul de uniform distribuit în spațiu. Cadru este suspendat de un fir subțire de argint sau de bronz fosforos prin care intră și iese curentul. Când trece curentul prin cadru, datorită forței electromagnetice ia naștere un cuplu de forțe al cărui moment este:

$$\mathcal{M} = \mu N H I S. \quad (4.8.)$$

Datorită acestui cuplu, cadru se rotește cu un unghi  $\alpha$  așa fel încât cuplul născut din torsiunea firului să aibă același moment cu cel de sus. Cum momentul de torsiune este proporțional cu unghiul de rotație, obținem:

$$C\alpha = \mu N H I S = I\Phi_{\max}.$$

Pentru a „amplifica” deviațiile, se trimite lumină pe o oglindă legată solidar de fir și razele reflectate cad pe o riglă gradată. Atunci când oglinda cu firul se rotește cu unghiul  $\alpha$ , raza reflectată se rotește cu  $2\alpha$ , iar arcul de cerc descris de raza reflectată este egal cu  $2\alpha d$ , unde  $d$  este distanța dintre oglindă și locul de pe riglă unde cade raza reflectată.



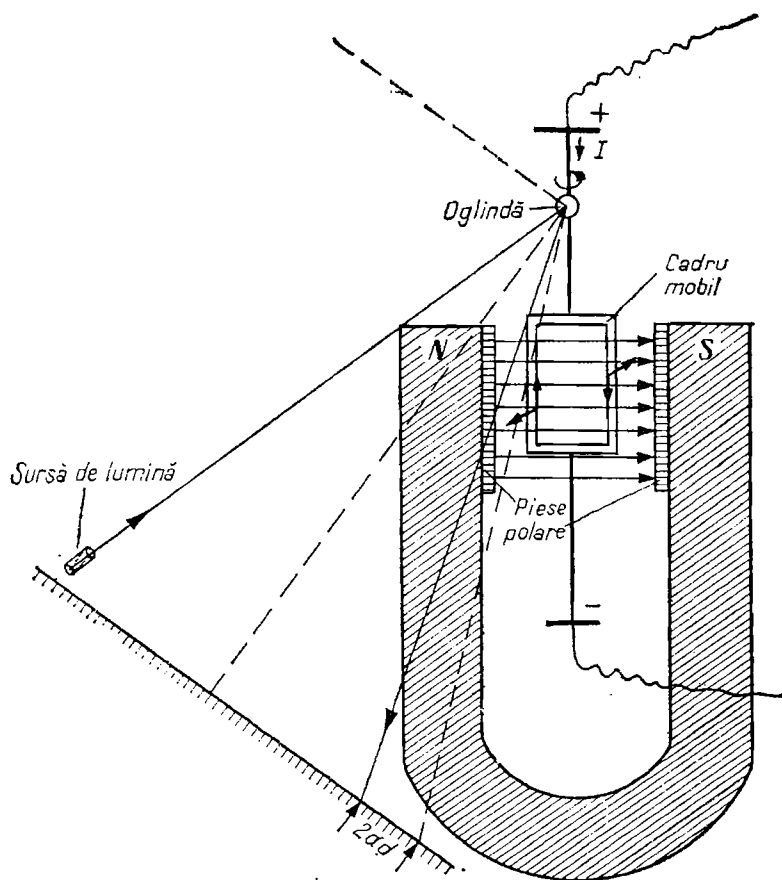


Fig. III.4.6

e) **Generalizarea legii lui Faraday.** Pentru înțelegerea generalizării legii inducției electromagnetice, vom porni de la o experiență mintală în care avem de-a face cu spira din fig. III.4.7, de care apropiem sau depărtăm periodic bara magnetică. Urmărind acul galvanometrului, acesta va indica la apropierea barei un curent într-un sens, iar la depărtare, un curent de sens contrar. Aceasta înseamnă că electronii din spirală execută o mișcare oscilatorie în jurul cîmpului magnetic. Dar dacă ar lipsi conductorul, pur și simplu ne-am imagina că avem un electron în repaus. Cum nu am legat apariția curentului de existența conductorului ci de existența sarcinilor libere, atunci este firesc să ne imaginăm că electronul ar executa aceeași mișcare oscilatorie în jurul cîmpului, iar acesta își modifică intensitatea în modul arătat mai sus. Dar, mișcarea electronului din repaus pînă la o viteză oarecare și apoi frînarea lui și schimbarea vitezei în sens contrar nu poate fi dictată decît de existența unui cîmp electric a cărui intensitate să crească într-un sens, apoi să devină zero, să crească în sens contrar etc. Acest cîmp electric este generat de variațiile de intensitate ale cîmpului magnetic, indicate mai sus. Și dacă n-ar fi prezent electronul, ar rămîne totuși

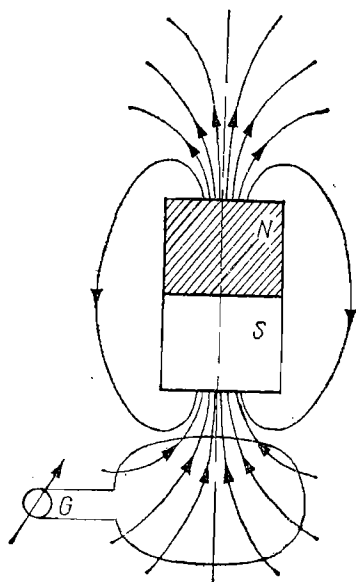


Fig. III.4.7

cîmpul electric creat pe această cale. Cum electronul „sondă” stă în repaus cînd cîmpul magnetic nu se modifică, rezultă că apariția acestui cîmp electric este legată numai de variația în timp a intensității cîmpului magnetic în poziția în care se află sonda noastră. Aceasta este și generalizarea legii lui Faraday, enunțată teoretic de Maxwell astfel: în jurul unui cîmp magnetic, a cărui intensitate variază în timp, apare un cîmp electric, care există numai atunci cînd există variația. Această generalizare are consecințe extraordinare, deoarece rezultă că dacă producem variații în timp ale lui  $B$ , poate să apară un cîmp electric variabil chiar și în vid. Noutatea ideii constă în faptul că un cîmp electric nu mai este legat deci direct de prezența unor sarcini electrice libere.

f) **Inducția mutuală și autoinducția.** În capitolul III.3 am calculat fluxul magnetic, printr-o bobină plasată în cîmpul creat de o altă bobină, introducînd coeficienții de inducție mutuală. O operație similară poate fi efectuată prin studierea tensiunii electromotoare induse într-o bobină sub influența variațiilor intensității cîmpului magnetic, produse de variațiile intensității curentului în bobina alăturată. Să reluăm experiența lui Faraday (fig. III. 4. 3a). În momentul stabilirii curentului, în bobina inductoare ( $B_2$ ) are loc o creștere a fluxului magnetic care se transmite și în bobina  $B_1$ . Conform legii lui Lenz, în aceasta apare un curent indus al cărui cîmp magnetic crește, dar în sens contrar celui din bobina inductoare. Fie  $I_2$  intensitatea curentului din bobina inductoare și  $\Phi_1$  — fluxul în bobina  $B_1$ , produs de cîmpul creat de  $I_2$ :  $\Phi_1 = M_{12}I_2$ . Prin variația lui  $\Phi_1$  apare o tensiune în circuit,  $\mathcal{E}_1$  dată de:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (4.9)$$

Dacă am inversa rolurile, adică am trece prin bobina  $B_1$  curentul  $I_1$  atunci datorită variației fluxului în bobina  $B_2$  ( $\Phi_2 = M_{21}I_1$ ) apare tensiunea  $\mathcal{E}_2$ :

$$\mathcal{E}_2 = - M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.10)$$

Atît experiența cît și calculele arată că  $M_{12} = M_{21} = M$ , dacă bobinele sînt așezate la o distanță mică una de alta. Coeficientul  $M$  este denumit *coeficient de inducție mutuală*:  $M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}$ . Din definiția lui  $M$  ( $M = - \mathcal{E}/dI/dt$ ), rezultă că unitatea de măsură, *henry* (H) este mărimea celui coeficient pentru care la o variație a curentului, într-o bobină, cu 1 amper pe secundă, apare prin inducție în bobina cuplată o tensiune de 1 volt.

Să vedem ce influență au variațiile de curent în bobina prin care trece. Să depărtăm cele două bobine  $B_1$  și  $B_2$ . Dacă vom închide și deschide circuitul uneia dintre ele, atunci vom avea variațiile de flux în bobinele respective care trebuie să ducă la apariția unei tensiuni. Astfel:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - L_1 \frac{dI_1}{dt}, \text{ iar } \mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (4.11)$$

coeficienții  $L_1$  și  $L_2$  sînt coeficienți de autoinducție (selfinducție) și au aceleași unități ca și coeficienții de inducție mutuală. La stabilirea curentului, cînd crește  $I$ ,  $\mathcal{E}$  are semn opus tensiunii exterioare. Dimpotrivă, la întrerupere, cînd  $I$  scade,  $\mathcal{E}$  își schimbă sensul, pentru a se opune dispariției curentului. Fenomenul de apariție a unei tensiuni induse chiar în bobinele prin care trece un curent electric datorită variațiilor acestuia este numit *autoinducție*. El poate fi pus în evidență printr-o experiență simplificată (fig. III.4.8) în care pe două ramuri ale unui circuit sînt montate două becuri, dar pe una există un rezistor, iar pe cealaltă un rezistor și o bobină, astfel încît în regim staționar curenții sînt de intensitate egală ( $I$ ), becurile avînd aceeași strălucire. Cînd întrerupem circuitul, se constată că becul de pe ramura bobinei mai luminează un timp, în raport cu celălalt, din ce în ce mai slab, pînă se stinge, în timp ce la închiderea circuitului curentul prin el se stabilește mai greu, luminînd mai slab la început. Această situație poate fi înțeleasă acum destul de bine prin intermediul fenomenului de autoinducție. Energia care a fost consumată la închiderea circuitului, pentru stabilirea curentului, a fost înmagazinată în cîmpul magnetic care este creat de bobină. Consumul acesta de energie se deosebește de cel realizat în efectul Joule. La întreruperea curentului, energia înmagazinată este eliberată în circuitul furnizînd „coada” curentului la închidere.

Fie  $I$  intensitatea curentului atinsă după un timp îndelungat, cînd la capetele circuitului este aplicată o diferență de potențial  $U$ :  $I = U/R$ . În intervalul scurt de timp ce urmează închiderii, intensitatea curentului este o funcție de timp  $i(t)$  și este dată de:

$$i(t) = \frac{U - \mathcal{E}_L(t)}{R} = \frac{U - \frac{d\Phi}{dt}}{R}, \quad (4.12)$$

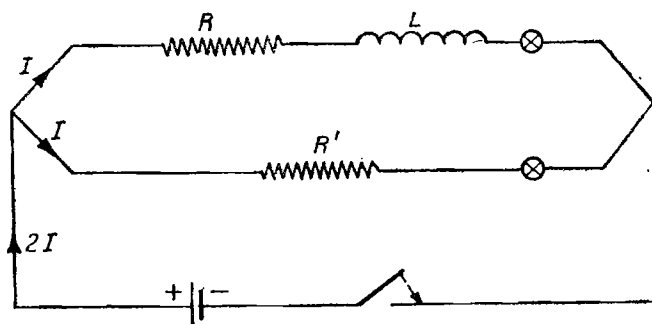


Fig. III.4.8

deoarece tensiunea autoindusă  $\mathcal{E}_L(t)$  are sens opus celei aplicate. Rezultă deci că tensiunea aplicată suplinește atât pierderile de energie prin efect Joule ( $iR$ ), cât și cele înmagazinate în câmpul magnetic care se stabilește în jurul bobinei:

$$U = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{U}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}. \quad (4.13)$$

Se observă că  $(L/R)$  are dimensiunea unui timp, de aceea se și notează astfel:  $L/R = T$ ,  $T$  fiind numit *constantă de timp*. Ecuația (4.13) devine:

$$I - i = T \frac{di}{dt}. \quad (4.14)$$

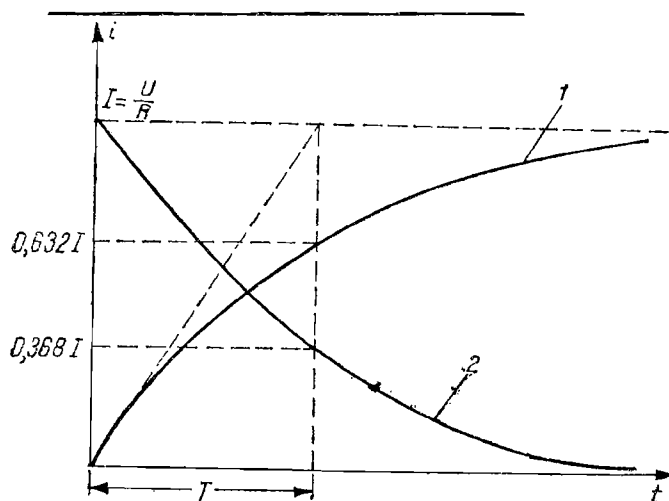


Fig. III.4.9

Expresia obținută poate fi integrată ușor pentru intervalul  $[0, t]$  în care intensitatea curentului a crescut de la 0 la  $i$ :

$$\int_0^i \frac{di}{I-i} = \int_0^t \frac{dt}{T} \Rightarrow -\ln(I-i) \Big|_0^i = \frac{t}{T}, \quad (4.15)$$

de unde rezultă relația:

$$i(t) = I(1 - e^{-t/T}). \quad (4.16)$$

Se vede astfel că relația (4.16) respectă condițiile problemei la  $t = 0$ ,  $i = 0$ , iar la  $t = \infty$ ,  $i = I$ . Dependența lui  $i$  de timp este redată în fig. III.4.9 în care curba (1) tinde asimptotic către dreapta orizontală  $i = I$ . Remarcăm acum semnificația lui  $T$ : după ce s-a scurs intervalul de timp  $t = T$ , curentul produs de tensiunea autoindusă a scăzut de  $e$  ori, adică,  $\frac{i}{I} = 1 - \frac{1}{e} = 0,632$ . Cu cât  $T$  este mai mare, deci rezistența  $R$  montată în serie cu bobina este mai mică, cu atât mai greu se stabilește valoarea constantă a curentului. Dacă am avea o bobină „ideală”, fără rezistență ohmică, atunci  $T = \infty$  și deci curentul nu ar putea trece prin bobină (!).

Să urmărim acum „evoluția” intensității curentului la întreruperea tensiunii ( $U = 0$ ). În acest caz (4.13) devine:

$$-\frac{R}{L}i = \frac{di}{dt} \Rightarrow -\int_0^t \frac{dt}{T} = \int_I^i \frac{di}{i}, \quad (4.17)$$

deoarece după scurgerea intervalului de timp  $t$ , intensitatea curentului scade de la  $I$  la  $i$ . Prin integrarea expresiei (4.17) obținem dependența lui  $i$  de  $t$ :

$$-\frac{t}{T} = \ln i \Big|_I^i \Rightarrow i(t) = Ie^{-t/T}, \quad (4.18)$$

adică la  $t = 0$ ,  $i = I$ , la  $t = \infty$ ,  $i = 0$ , iar la  $t = T$ ,  $\frac{i}{I} = \frac{1}{e} = 0,368$ . Această dependență poate fi urmărită tot în fig. III.4.9, curba (2).

În sfârșit este posibil să calculăm energia înmagazinată în câmpul magnetic pornind de la relațiile (4.13). Puterea dezvoltată de sursă este și ea o funcție de timp:

$$Ui = Ri^2 + iL \frac{di}{dt} = P_J + P_L, \quad (4.19)$$

unde  $P_J$  reprezintă puterea pierdută prin efect Joule, iar  $P_L$  cea înmagazinată de câmpul magnetic. Ținând seama de definiția puterii, obținem energia înmagazinată în câmpul magnetic ( $W_L$ ) prin integrare:

$$W_L = \int_0^t P_L dt = \int_0^i iL di = \frac{1}{2} Li^2. \quad (4.20)$$

Remarcați asemănarea cu energia cinetică a unei particule  $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)!$

#### 4.4. CURENȚI VARIABILI (CURENTUL ALTERNATIV ȘI CURENTUL PULSANT)

a) **Introducere.** Generarea tensiunii electromotoare prin inducție electromagnetică folosind variația suprafeței prin care trec liniile câmpului magnetic a intrat în practica industrială. Cel mai simplu circuit care permite variația fluxului magnetic în acest fel îl constituie spira dreptunghiulară montată între polii unui magnet (permanent sau electromagnet). Această spirală este rotită cu o frecvență  $\omega$  în jurul unui ax care este perpendicular pe liniile câmpului și paralel cu laturile mari ale spirei. Prin rotirea spirei, fluxul magnetic depinde de timp:

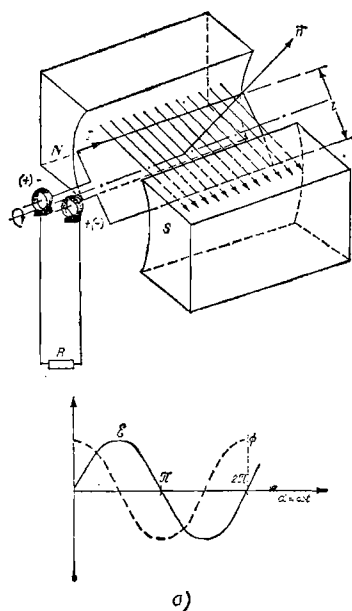
$$\Phi = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t, \quad (4.21)$$

unde  $\Phi_m$  este fluxul maxim,  $\alpha$  este unghiul între normala la cadru și direcția liniilor de câmp,  $\omega$  este viteza unghiulară, iar  $S = L l$ . Folosind legea lui Faraday, tensiunea indusă este dată de relația:

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_m \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (4.22)$$

Se observă că în timp ce fluxul este maxim atunci când cadrul este perpendicular pe direcția liniilor de câmp ( $\alpha = 0$ ), tensiunea indusă este zero, în schimb atunci când spira este paralelă cu liniile de câmp ( $\alpha = \pi/2$ ), tensiunea este maximă. Din punctul de vedere al variației fluxului, acest „defazaj” între flux și tensiunea indusă poate fi înțeles dacă ținem seama că în unitatea de timp, variația cea mai puternică a fluxului este înregistrată în poziția cu  $\alpha = \pi/2$ , când la o rotație infinitesimală fluxul sare brusc de la zero la o valoare diferită de zero, în timp ce pentru rotații efectuate în jurul poziției  $\alpha = 0$ , fluxul variază puțin de la valoarea maximă. Prin aplicarea regulii mîinii drepte găsim ușor sensul curenților induși: ei sînt diferiți de zero în ramurile de lungime  $L$  (fig. III.4.10 *a* și *b*), dar sînt nuli în ramurile de lungime  $l$ , care sînt situate în planele paralele cu liniile de câmp. Din acest motiv, ramurile inactive trebuie să aibă o lungime cît mai mică. Nu este permisă însă o reducere la dimensiuni oricît de mici deoarece apare un factor pe care îl puteți deduce ușor: forța electrodinamică repulsivă între ramurile în care circulă curentul indus, care în cazurile practice are o intensitate enormă (este mai mare de 1000 A).

Așa cum am prezentat modul de producere a tensiunii electromotoare, curentul indus circulă în circuit închis. De aceea el trebuie „scos” din circuitul spirei. Pentru început ne putem imagina două variante în care spira prezintă două terminații spre două borne exterioare, printr-un „colector”. După modul de construcție al colectorului, în circuitul exterior reprezentat de rezistența  $R$  vom înregistra un curent *alternativ* (fig. III.4.10*a*) sau un curent *pulsant* (fig. III.4.10*b*). Curentul alternativ întreținut de o tensiune alternativă este introdus în circuitul exterior prin colectorul format din două inele, astfel că fiecare ramură a spirei este tot timpul în contact cu un singur inel. În schimb, curentul pulsant este obținut prin construcția colectorului din două jumătăți de inel, astfel că fiecare ramură schimbă semiinelul



a)

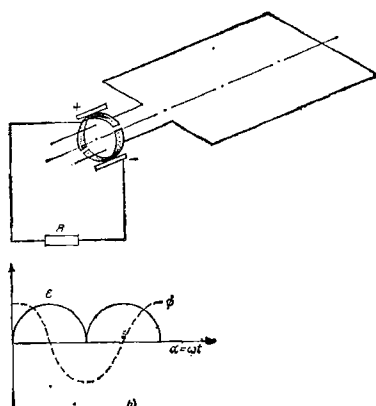


Fig. III.4.10

atunci cînd trece dintr-o poziție în alta, ceea ce face ca la bornele colectorului tensiunea să-și păstreze semnul.

Dacă am avea două spire care fac unghiul diedru  $\alpha$ , atunci tensiunile induse în ele sînt defazate:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_m \sin (\omega t + \alpha).$$

În cazul unui rotor format din  $n$  spire, atunci unghiul diedru între două spire succesive este  $\frac{2\pi}{n}$  și tensiunile au forma:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{n} \right), \dots, \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t + 2\pi \frac{(n-1)}{n} \right).$$

Este evident că în circuitul exterior, tensiunea rezultantă obținută prin însumarea celor „ $n$ ” tensiuni, va fi tot o funcție periodică de timp, dar cu o amplitudine proprie și o fază  $\varphi$

$$\mathcal{E}_{\text{ex}} = \mathcal{E}_{m\text{ext}} \sin (\omega t + \varphi). \quad (4.23)$$

b) **Mărimi instantanee și mărimi efective în curent alternativ.** Dependența temporală a tensiunii electromotoare induse ne arată că și intensitatea curentului din circuitul exterior trebuie să fie dependentă de  $t$ . Funcția  $I(t)$  poate fi obținută folosind legea lui Ohm pentru întregul circuit:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R + r} = I_m \sin \omega t, \text{ cu } I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R + r}, \quad (4.24)$$

unde  $R$  reprezintă rezistența circuitului exterior,  $r$  reprezintă rezistența internă a generatorului, respectiv, rezistența spirei, iar  $I_m$  este intensitatea maximă.  $\mathcal{E}(t)$ ,  $I(t)$ , ca și puterea  $P(t) = \mathcal{E}_m I_m \sin^2 \omega t$  reprezintă valorile instantanee ale celor trei mărimi. În practică nu se poate lucra cu ele; ne trebuie niște valori medii analoge vitezei medii din mecanică. Introducerea lor nu este arbitrară. Să urmărim în acest scop un bec cu incandescență pe care îl montăm odată în circuitul unei surse de curent continuu și apoi în circuitul unei surse de curent alternativ. În primul rînd constatăm că becul alimentat în curent alternativ, la o frecvență mai mare de  $10 \text{ Hz}$  nu „pîlpîie”, deoarece inerția termică este suficient de mare ca atunci cînd curentul este zero, filamentul să rămînă suficient de cald.

Un al doilea fenomen pe care l-am constata ar fi legat de strălucirea becului. Dacă intensitatea curentului continuu este egală cu intensitatea maximă a curentului alternativ, atunci strălucirea becului este mai puternică la alimentarea în curent continuu față de alimentarea în curent alternativ. Acest lucru este ușor de înțeles dacă ținem seama că energia disipată în timpul cît trece curentul nu este constantă. În fig. III.4.11 este indicată această situație, prin ariile hașurate fiind reprezentată energia consumată în curent alternativ, iar prin dreptunghiul marcat — energia în curent continuu.

Energia consumată într-o semiperioadă este obținută cu ajutorul puterii:

$$\begin{aligned} W_{0 \rightarrow T/2} &= \int_0^{T/2} P dt = U_m I_m \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt = U_m I_m \frac{1}{2} \int_0^{T/2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \left( \frac{T}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$



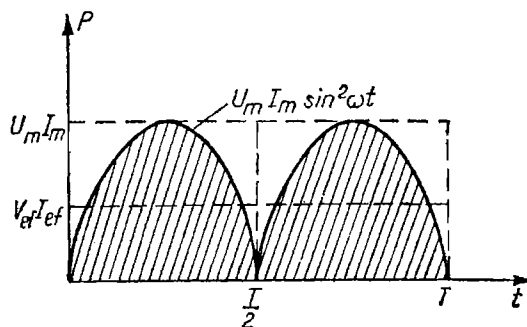


Fig. III.4.11

S-a ținut seama că  $\omega T = 2\pi$ , astfel că  $\int_0^{T/2} \cos 2\omega t \, dt = 0$ . Valorile efective sînt introduse astfel: intensitatea și tensiunea efectivă ( $I_{ef}$  și  $U_{ef}$ ) sînt mărimile unui curent continuu care ar degaja aceeași căldură Joule pe aceeași rezistență  $R$ , în același interval de timp:

$$W = I_{ef} U_{ef} \left( \frac{T}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \left( \frac{T}{2} \right) \Rightarrow I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.26)$$

c) **Măsurători în curent alternativ.** Pentru studiul curenților alternativi sînt utilizate ampermetre și voltmetre bazate pe forța electrodinamică. Schema de principiu a unui astfel de instrument, redată în fig. III.4.12, conține două bobine dreptunghiulare montate pe două cadre, unul fix și altul mobil, axele lor avînd între ele un unghi de  $90^\circ$ . Cadrul mobil este ținut în poziția aceasta de un resort, sau de un fir elastic. Pentru a face o măsurătoare se trece același curent prin ambele cadre, astfel că cel mobil se va găsi sub acțiunea cîm-

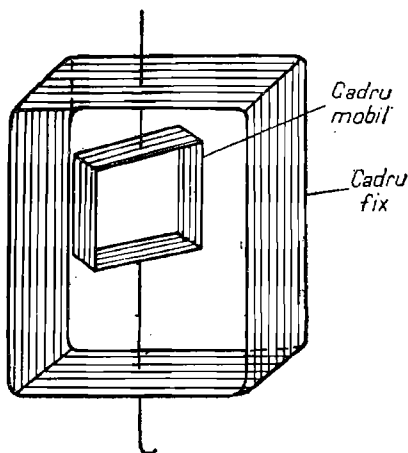


Fig. III.4.12

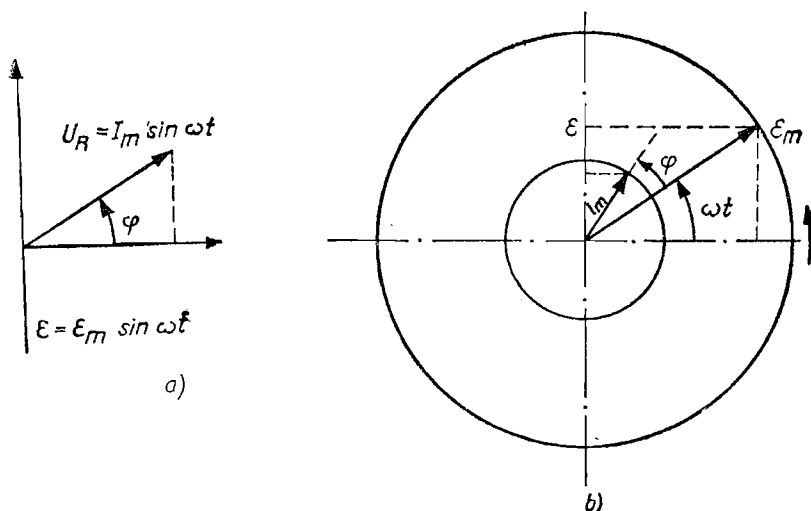


Fig. III.4.13

pului magnetic produs de cadrul fix și va fi supus unui cuplu de forțe care-l vor roti cu un unghi  $\alpha$  pînă cînd momentul cuplului este egal cu momentul de torsiune al spiralei. Cum curenții care circulă prin cele două cadre au aceeași intensitate, rezultă că forța electrodinamică și deci și momentul cuplului este proporțional cu  $I^2$ . Printr-o etalonare prealabilă se poate citi intensitatea direct pe o scară pe care se mișcă vârful unui ac indicator legat solidar cu cadrul mobil.

d) **Moduri de reprezentare a caracteristicilor curentului alternativ.** *Reprezentarea vectorială.* Am văzut că prin rotirea spirei dreptunghiulare în cîmp magnetic ia naștere o tensiune electromotoare periodică ( $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ ), care întreține un curent printr-o rezistență  $R$ , în fază cu tensiunea:  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = I_m \sin \omega t$ . Pe de altă parte, după cum vom vedea mai departe, dacă în circuit avem bobine sau capacități, curentul prin circuitul exterior poate să aibă un defazaj în raport cu tensiunea  $\mathcal{E}$ , adică să avem  $I = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ . În reprezentarea prin *fazori*, vârful vectorului care reprezintă tensiunea se rotește pe un cerc de rază  $\mathcal{E}_m$ , cu aceeași viteză unghiulară ca și vectorul care reprezintă intensitatea  $I_m$ , între ei rămînînd constant în timp unghiul  $\varphi$  (fig. III.4.13). Este evident atunci că nici tensiunea la bornele rezistenței  $U_R$ , în aceste condiții nu mai este în fază cu  $\mathcal{E}$ . De aceea se poate folosi în mod comod reprezentarea *vectorială*, în care fiecărei tensiuni îi asociem un vector de mărime egală cu tensiunea. Toți vectorii care reprezintă tensiunile ce ne interesează, în cazul nostru  $\mathcal{E}$  și  $U_R$  sînt reprezentați în același plan, avînd aceeași origine, dar între ei există unghiul de defazaj  $\varphi$ . Unul dintre vectori este fixat în lungul axei  $x$ , iar ceilalți sînt înclinați față de această axă (fig. III.4.13). Cu această reprezentare putem găsi ușor intensitatea curentului rezultat ca și faza rezultată atunci cînd mai multe tensiuni electromotoare [ $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$ ,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$ , ...] alimentează aceeași rezistență  $R(I_1 = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ , ...).

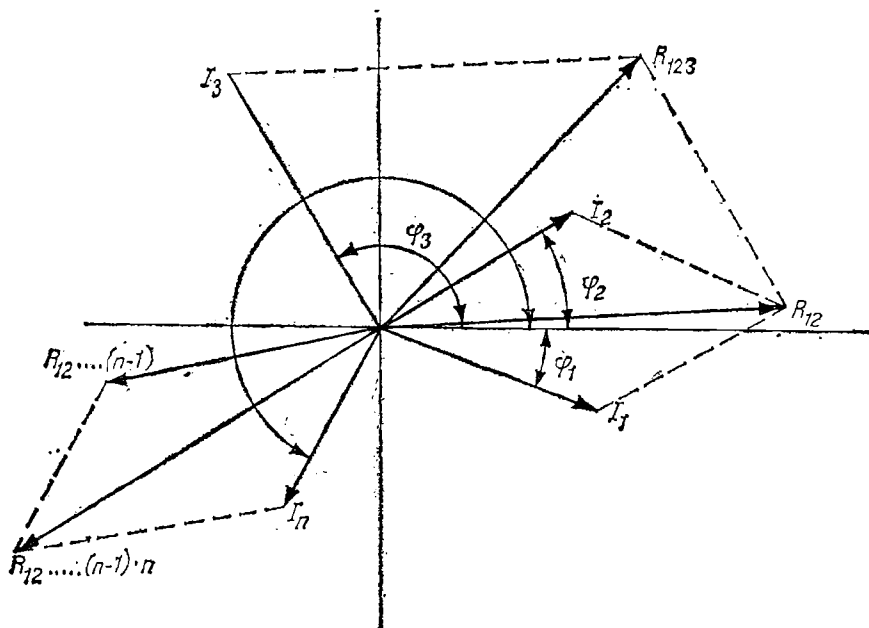


Fig. III.4.14

Tensiunea rezultantă  $U_R = IR$  se obține prin însumarea vectorială a mai multor vectori concurenți (fig. III.4.14), calculînd, de exemplu, rezultantele  $R_{12}$ ,  $R_{123}$ , ..., și, în sfîrșit, rezultanta finală  $R_{12...n-1n}$ . În fig. III.4.14 am numerotat vectorii în ordinea crescătoare a fazelor ( $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n$ ).

*Reprezentarea prin numere complexe.* Să presupunem că avem o tensiune defazată cu un unghi  $\varphi$ ,  $U = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  (fig. III.4.15a). În reprezentarea numerelor complexe, vîrfurile vectorului de mărime  $U$  ar indica un punct din planul complex descris de numărul

$$z = x + iy, \quad (4.27)$$

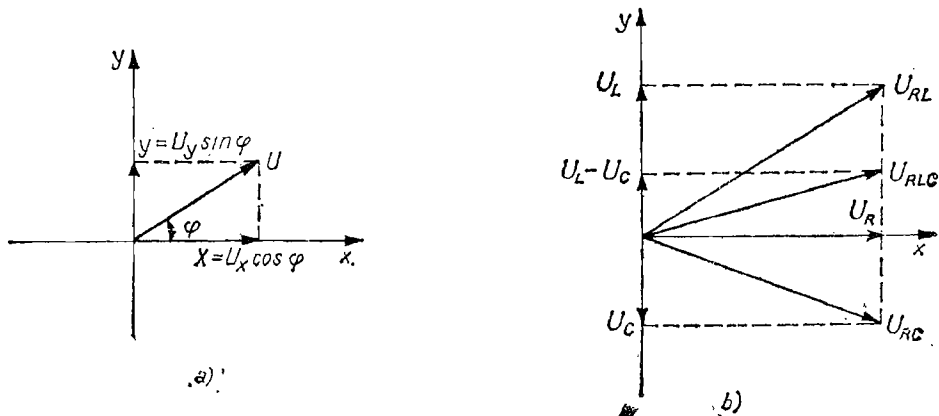


Fig. III.4.15

de modul

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Putem introduce în mod analog o tensiune „complexă”:  $U^c = U_x + iU_y$ , astfel că  $|U^c| = |U|$ , iar  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_y}{U_x}$ . Această reprezentare este deosebit de utilă în descrierea circuitelor în curent alternativ.

#### 4.5. CIRCUITE ELECTRICE ÎN CURENT ALTERNATIV

a) **Circuite cu rezistoare, condensatori și bobine.** Să aplicăm acum la bornele circuitului electric o tensiune alternativă  $U = U_m \sin \omega t$ . Dacă în circuit există numai o rezistență ohmică, atunci intensitatea curentului este în fază cu tensiunea:  $I_R = \frac{U}{R} = I_m \sin \omega t$ .

Să aplicăm aceeași tensiune la bornele unui condensator de capacitate  $C$ . Atunci cînd tensiunea trece printr-o alternanță (o buclă a sinusoidei), condensatorul se încarcă pe partea crescătoare, încărcarea încetînd odată cu atingerea maximumului. Odată cu scăderea tensiunii aplicate, condensatorul începe să se descarce și prin circuit trece un curent a cărui intensitate este dată de scurgerea în timp a sarcinilor acumulate pe armăturile condensatorului:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CdU}{dt} = \frac{CU_m d(\sin \omega t)}{dt} = \omega CU_m \cos \omega t. \quad (4.28)$$

Dacă scriem valoarea maximă sub forma legii lui Ohm,

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} \Rightarrow X_C = 1/\omega C, \quad (4.29)$$

observăm un curent care rezultă prin descărcarea condensatorului, defazat „înainte” față de tensiune cu  $\pi/2$  ( $\cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$ ), iar pe de altă parte condensatorul opune un fel de „rezistență” trecerii curentului, numită *reactanță capacitivă*.

În sfîrșit, ultimul element pe care îl montăm separat este o bobină ideală de inductanță  $L$ . Datorită variațiilor tensiunii aplicate, deci a curentului care circulă, apare o tensiune de autoinducție ( $\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt}$ ) care se opune celei aplicate. Dacă nu avem pierderi prin efect Joule, tensiunea autoindusă este egală cu cea aplicată, deoarece tensiunea totală este nulă pe bobină:

$$U_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow dI = \left( \frac{U_m}{L} \sin \omega t \right) dt, \quad (4.30)$$

de unde, prin integrare, obținem:

$$I = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t + C.$$

Cum  $I = 0$  la  $t = 0$ , constanta de integrare este egală cu  $C = \frac{U_m}{\omega L}$ . Deci, în cazul general:

$$I = + \frac{U_m}{X_L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U_m}{X_L}. \quad (4.31)$$

Pe lângă partea dependentă de timp, curentul are și o componentă continuă. Dacă bobina n-ar fi ideală, deci ar avea o rezistență ohmică diferită de zero, această componentă se stinge prin efect Joule. Presupunind chiar că bobina este ideală, această componentă dispăre prin efect Joule produs pe restul circuitului exterior, care oricum are o rezistență diferită de zero din cauza conductorilor de legătură. În mod analog, aplicăm legea lui Ohm pentru valoarea maximă a intensității: bobina opune și ea o rezistență la trecerea curentului, numită *reactanță inductivă* ( $X_L = \omega L$ ). Se observă că în cazul bobinei ideale curentul rămîne în „urma” tensiunii cu  $\left( \frac{\pi}{2} \right)$ .

b) **Circuite serie (RC), (RL) și (RLC).** În realitate nici condensatorii și nici bobinele nu sînt ideale: condensatorii prezintă scurgeri de sarcină, iar bobinele au rezistență ohmică dată de rezistența conductorului din care sînt confecționate. Vom examina, de aceea, pentru început, circuitele care pe lângă elementele neohmice ( $C$  și  $L$ ) au montate cîte un rezistor ( $R$ ).

În reprezentarea vectorială, plasăm tensiunea la bornele rezistenței  $U_R = IR$  în lungul axei  $x$ , astfel că tensiunea la bornele condensatorului ( $U_C = IX_C$ ) este dirijată în sensul negativ al axei  $y$  (fig. 4.15 b), iar  $U_L = IX_L$  în sens pozitiv. Folosind diagramele tensiunilor, se pot calcula ușor impedanțele \* și tangenta unghiului de defazaj pentru circuitele (RC), (RL) și (RLC) (vezi tabelul 1):

TABELUL 1

Circuit	$z$	$\operatorname{tg} \varphi$
RC	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$	$\frac{1}{R\omega C} (\varphi_C < 0)$
RL	$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{\omega L}{R} (\varphi_L > 0)$
RLC	$\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$	$\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

Pentru circuitul (RLC), dacă  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ,  $\varphi > 0$ , iar cînd  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$   $\varphi < 0$ .

O situație interesantă o prezintă cazul  $\varphi = 0$ , adică  $U_L = U_C$ , ceea ce înseamnă că deși există cele două elemente defazante, impedanța este redusă

\* Impedanța unui circuit care conține, pe lângă rezistori, și bobine sau (și) condensatori, reprezintă coeficientul de proporționalitate între  $U_m$  și  $I_m$ :  $U_m = I_m Z$ .

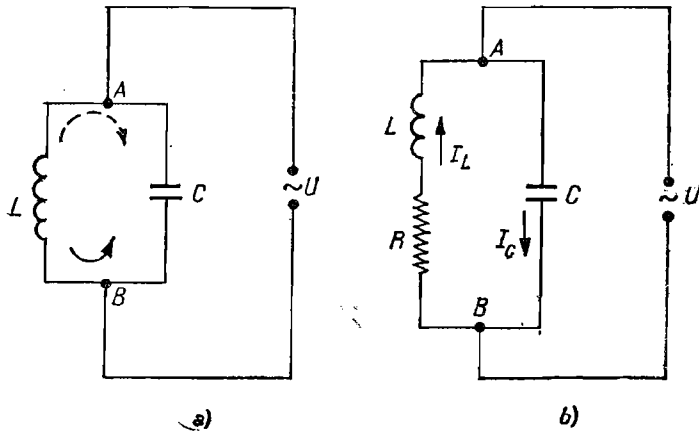


Fig. III.4.16

la rezistența ohmică pură. Din condiția  $U_L = U_C$  rezultă frecvența la care defazajul este nul:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4.32)$$

Această relație corespunde rezonanței tensiunilor, adică tensiunea este în fază cu curentul.

c) **Circuite derivație.** Între două puncte A și B aplicăm o tensiune alternativă  $U = U_m \sin \omega t$ , puncte la care sînt legate și două ramuri ale unui circuit derivație. Pentru început vom lua  $R = 0$  (fig. III.4.16a). Folosind reprezentarea vectorială și ținînd seama că pentru cele două ramuri tensiunea este aceeași, curentul rezultat este:

$$I = I_L - I_C = U \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = U/Z, \quad Z = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}. \quad (4.33)$$

Curentul are intensitate nulă cînd  $Z = \infty$ , adică pentru  $\frac{1}{\omega L} = \omega C \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$ . Am reobținut relația de rezonanță. Deoarece curenții în cele două elemente au sensuri opuse, intensitatea globală este nulă. Deci, la o anumită frecvență, un astfel de circuit împiedică trecerea curentului, de aceea este numit *circuit dop*. Dependența lui  $Z$  și  $I$  de  $\omega$  este prezentată în fig. III.4.17a. Pentru  $\omega \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow 0$ , dar prin valori negative, iar pentru  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $Z \rightarrow 0$  prin valori pozitive. În ambele cazuri, curentul este însă pozitiv.

Funcția prezintă o singularitate pentru  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , cînd la  $Z = \infty$ ,  $I = 0$ . La rezonanță, deci cînd  $\omega = \omega_0$ , nu mai circulă curent prin circuitul

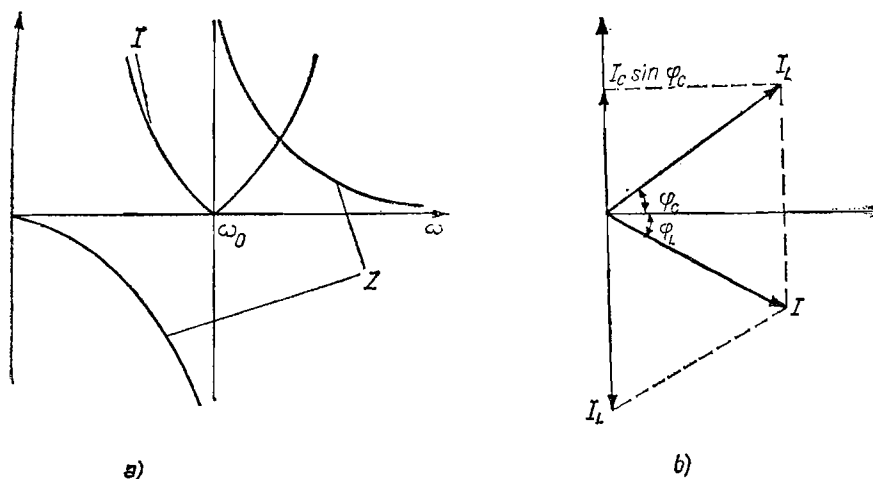


Fig. III.4.17

exterior, dar circulă prin circuitul derivație, deoarece  $I_L$  și  $I_C$  au sensuri contrarii.

Cazul  $R \neq 0$  (fig. III.4.16b) este reprezentat de diagrama din fig. III.4.17b. Curentul  $I_L$  nu mai este în opoziție de fază cu  $I_C$ ;  $I_L$  este obținut din tensiunea  $U$  aplicată între punctele A și B și din impedanța parțială a circuitului ( $RL$ ).

La rezonanță trebuie ca intensitățile curenților pe cele două ramuri să fie egale:

$$I_L \sin \varphi_L = I_C \Rightarrow \frac{\sin \varphi_L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \omega C. \quad (4.34)$$

Pe de altă parte, din defazajul ramurii ( $RL$ ) deducem relațiile:

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R}, \quad \sin \varphi_L = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (4.35)$$

Egalînd cele două expresii care dau pe  $\sin \varphi_L$ , obținem  $\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega C$ , de unde rezultă:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{R^2 C}{L} \right) \text{ cu } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (4.36)$$

Intensitatea curentului în fază cu tensiunea este dată de proiecția pe orizontală a lui  $I_L$ ,

$$I = I_L \cos \varphi_L = \frac{U \cos \varphi_L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (4.37)$$

Ținând seama de expresia cosinusului ( $\cos \varphi_L = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ ) obținem pentru  $I$  expresia:

$$I = \frac{UR}{R^2 + \omega^2 L^2} \Rightarrow Z = \frac{U}{I} = R + \frac{\omega^2 L^2}{R}, \quad (4.37')$$

sau, folosind expresia lui  $\omega^2$ , impedanța circuitului derivație, la rezonanță, are o expresie foarte simplă:  $Z = \frac{L}{CR}$ .

Se observă că la  $\left(\frac{R}{L}\right)$  mare ne aflăm departe de condiția de rezonanță.

#### 4.6. GENERATOARE ȘI MOTOARE DE CURENT ELECTRIC ALTERNATIV ȘI CONTINUU

a) **Generatorul de curent alternativ** (alternatorul). Curentul alternativ studiat pînă în acest moment era generat de o spiră dreptunghiulară care se rotea într-un câmp magnetic uniform. El era cules de la două inele prin intermediul a două perii. Acest colector prezintă însă neajunsuri legate de producerea curenților de intensitate mare, cînd la colector pot să apară scînteii. Pe de altă parte, după un timp îndelungat de funcționare, periile se uzează. De aceea, în tehnică este folosit generatorul de curent alternativ, pe scurt, *alternatorul*, în care pe funcția de stator este *indusul*, iar pe post de rotor este *inductorul*, adică miezul magnetic care generează cîmpul (fig. III.4.18a). Dacă în cazul indusului-rotor fluxul este modificat prin tăierea suprafeței, de data aceasta el este modificat prin rotirea cîmpului magnetic. Bobinele

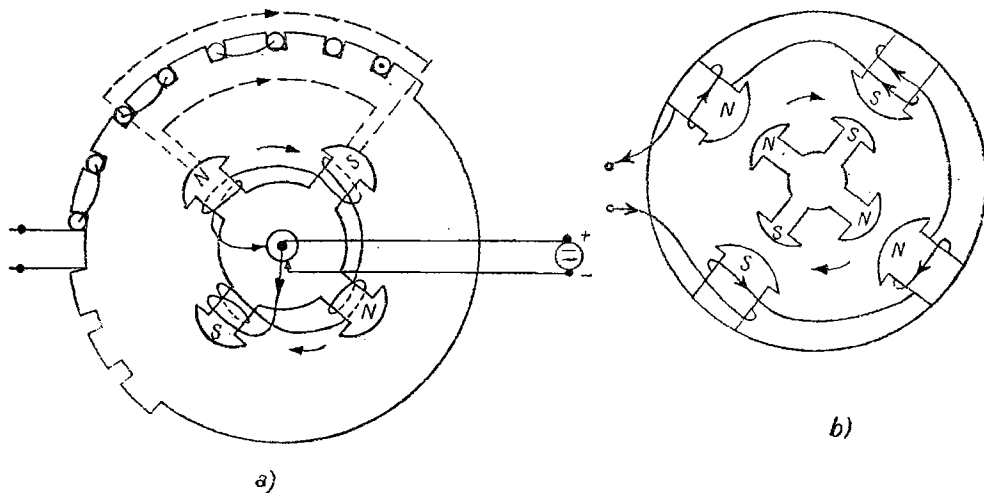


Fig. III.4.18



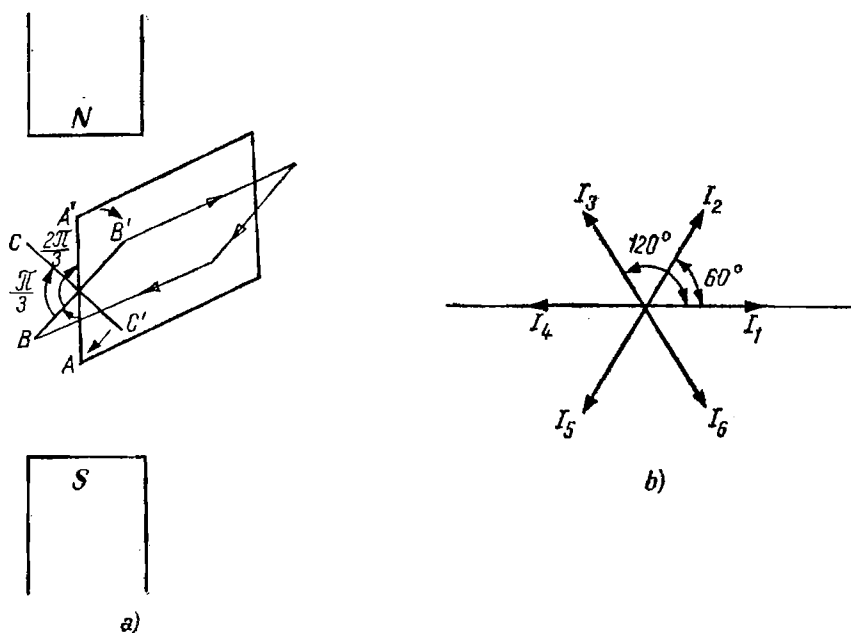


Fig. III.4.19

inductorului sînt alimentate din exterior de la un generator de curent continuu prin intermediul a două perii. El este format de obicei dintr-o coroană cu mai multe perechi de poli. Indusul formează un cadru circular în jurul inductorului și este confecționat din tole feromagnetice pentru a micșora efectul curenților Foucault. În acest cadru circular există șapte canale în care se află îngropați conductori care se leagă între ei așa fel încît curenții generați în fiecare conductor să se adune (fig. III.4.18b). La sfîrșit rămîn două capete libere care constituie bornele de livrare în circuitul exterior. Curentul produs de un asemenea generator este numit *curent monofazat*. În modul descris mai sus, energia electrică apare în urma unui consum de energie mecanică produsă de o cădere de apă, sau de o turbină cu vapor. Deoarece nu toată energia mecanică consumată este transformată în energie electrică, se definește un randament al generatorului, ca fiind raportul dintre puterea electrică furnizată ( $P_{ei}$ ) și puterea mecanică consumată ( $P_{mc}$ ). Pierderi de energie au loc prin frecări, prin efect Joule în bobinajele indusului, sau prin curenți Foucault.

**b) Curenții polifazați.** Un inconvenient pe care-l prezintă generatoarele de curent monofazat este legat de interacțiunea dintre curentul indus și cîmpul magnetic creat de inductor. Datorită acestei interacțiuni, de cîte ori curentul indus trece prin maxim, mașina care antrenează rotorul este supusă unor zguduirii. Pentru a micșora acest efect sînt utilizați curenții polifazați, care se obțin într-un indus format din mai multe circuite, astfel că între curenții din două circuite succesive există un defazaj constant. Fie  $n$  spire dreptunghiulare între planele cărora există unghiul  $\frac{\pi}{n}$ . În fig. III.4.19a este pre-

zentat schematic cazul a trei spire. Montajul prezentat este echivalent cu cel al unui tambur cilindric, pe suprafața laterală a lui fiind săpate canale în care sînt îngropați conductorii ( $2n$  conductori pentru cele  $n$  spire). Se vede că în conductorul  $A'$ , de exemplu, avem un curent nul. După o rotație de  $60^\circ$ ,  $\left(\frac{\pi}{n}\right) = \omega \frac{T}{6}$ , prin aceeași poziție de minim a curentului trece conductorul  $C$ . În felul acesta, curenții în ramurile situate în lungul tamburului sînt descriși de expresiile:

$$I_1 = I_m \sin \omega t, I_2 = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{n} \right), \dots, I_n = I_m \sin \left( \omega t + (n-1) \frac{\pi}{n} \right). \quad (4.38)$$

Valorile curenților pot fi reprezentate în diagrame vectoriale (fig. III.4.19b) prin vectori de mărime  $I$  ale căror vîrfuri sînt dispuse pe un cerc, între ei existînd unghiul  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ . Se observă că dacă avem un număr par de ramuri plasate pe generatoarea cilindrului, există cîte doi curenți de sens contrar, între care există un unghi de  $180^\circ$ . Dacă vom lega între ele cele două ramuri în planul bazei cilindrului ( $A$  cu  $A'$ ,  $B$  cu  $B'$ ), adică vom reveni la spira drept-unghiulară, în circuitul exterior vom avea de fapt trei curenți alternativ defazați cu  $120^\circ$ :

$$I_A = I_m \sin \omega t, I_B = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), I_C = I_m \sin \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Acest curent este curentul trifazat a cărui reprezentare schematică este indicată în fig. III.4.20, în care în locul indicilor  $A, B, C$  s-a folosit notația cificică.

c) **Curentul trifazat.** Pentru obținerea curentului trifazat se poate folosi generatorul cu indusul-stator format din trei bobine dispuse la  $120^\circ$  una de alta, iar inductorul-rotor este confecționat dintr-o pereche de poli.

Să presupunem că cei trei curenți ar intra toți într-o bornă și s-ar întoarce prin alta. Curentul total este nul. Acest lucru se vede fie din fig. III.4.20, fie din efectuarea unor operații algebrice de sumare:  $I_1 + I_2 + I_3 = I_m [\sin \omega t + \sin \omega t \cos 120^\circ + \cos \omega t \sin 120^\circ + \sin \omega t \cos 240^\circ + \cos \omega t \sin 240^\circ] = 0$ . Este necesar, așadar, ca cei trei curenți să fie trimiși separat pe circuitul exterior. Sînt utilizate în acest scop două montaje.

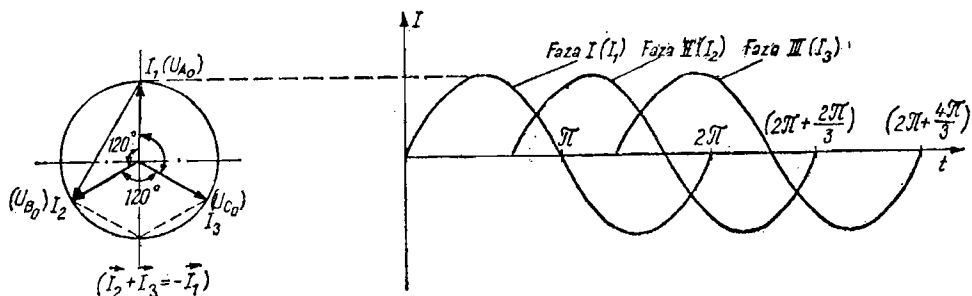


Fig. III.4.20

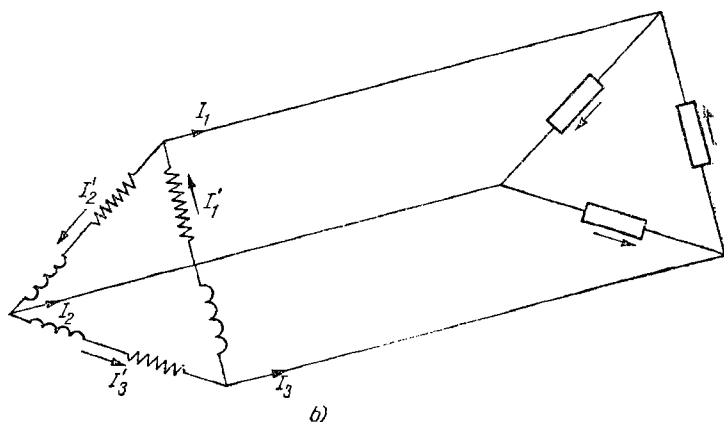
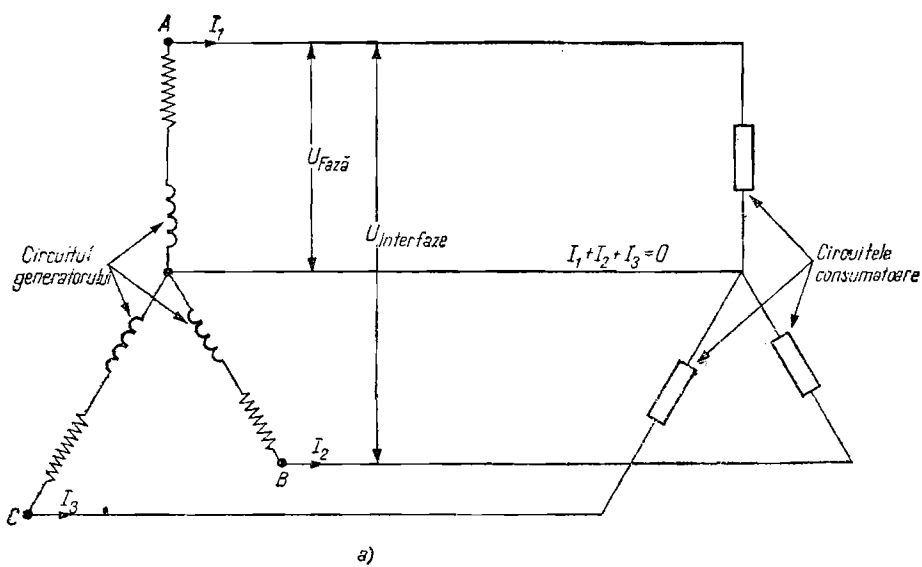


Fig. III.4.21

Montajul în stea sau în Y (fig. III.4.21a) constă din trei conductori pe care circulă cei trei curenți de la cele trei circuite ale generatorului la consumatorii grupați tot pe trei circuite. Conductorul de revenire la sursă este unic și dacă intensitățile maxime nu diferă, iar defazajul nu a fost modificat după trecerea prin consumator, atunci intensitatea pe cel de al patrulea conductor este zero. De aceea el poartă și numele de *conductor de nul*. Pentru aceasta trebuie ca rețelele consumatorilor să fie echilibrate, astfel, încât valorile maxime să nu difere între ele. Tensiunile măsurate între un conductor și cel de nul (sau între punctele AO, BO și CO) sînt tensiunile fazelor ( $U_f$ ), iar cele măsu-

rate între doi conductori laterali (între  $AB$ ,  $BC$  sau  $CD$ ) sînt tensiunile între raze ( $U_{if}$ ). Tensiunile  $U_f$  sînt defazate între ele cu  $120^\circ$ :

$$U_{AO} = U_m \sin \omega t, \quad U_{BO} = U_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right), \quad U_{CO} = U_m \sin \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right)$$

și vor fi dispuse pe diagrama vectorilor în același mod ca și curenții (fig. III.4.20). Tensiunea între două faze  $U_{if}$ , de exemplu,  $U_{AB}$  (fig. III.4.20) este egală cu dublul proiecției unui vector pe direcția vectorului diferență  $U_{AB}$ :

$$U_{AB} = 2 \text{ pr. } U_{AO} = 2 \text{ pr. } U_{BO} = 2 U_{CO} \cos 60^\circ = \sqrt{3} U_{AO}.$$

Deci tensiunea între faze este de  $\sqrt{3}$  ori mai mare decît tensiunea unei faze. Dacă între o fază și nul avem 120 V, atunci între două faze, tensiunea este  $120 \sqrt{3} \approx 220$  V, iar dacă între o fază și nul este 220 V, atunci între două faze avem 380 V.

*Montajul în triunghi sau în  $\Delta$  (delta)* constă din legarea circuitelor generatorului și cele ale consumatorilor în triunghi (fig. III.4.21b). De data aceasta, curenții pe linie ( $I_1, I_2, I_3$ ) pot fi calculați în funcție de curenții din circuitele generatorului ( $I'_1, I'_2, I'_3$ ):  $I_1 = I'_1 - I'_2$ ;  $I_2 = I'_2 - I'_3$ ;  $I_3 = I'_3 - I'_1$ , iar din diagrama curenților rezultă că un curent pe linie,  $I$ , este de  $\sqrt{3}$  ori mai mare decît un curent  $I'$  dintr-un circuit al generatorului ( $I = \sqrt{3} I'$ ). În acest montaj tensiunile maxime între două vîrfuri ale triunghiului generatorului, sau consumatorului, sînt aceleași pentru toate perechile de vîrfuri.

d) **Puterea în curent alternativ.** Puterea în curent alternativ are o expresie diferită de cea evaluată în curent continuu. Am văzut că dacă circuitul este format numai din rezistențe ohmice, atunci puterea este egală cu  $U_{ef} I_{ef} = U_m I_m / 2$ . Cînd însă circuitul conține și elemente reactive, atunci puterea consumată prin efect Joule este dată de căderea de tensiune pe rezistență,

$$U_R = U \cos \varphi = (U_m \cos \varphi) \sin \omega t. \quad (4.39)$$

În acest caz, produsul  $U_m I_m / 2$  poartă numele de *putere aparentă* ( $P_a$ ), iar puterea disipată pe rezistență este numită *reală* ( $P_{\text{real}}$ ) și este exprimată de căderea de tensiune pe rezistență:

$$P_{\text{real}} = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = P_a \cos \varphi. \quad (4.40)$$

Factorul  $\cos \varphi$  poartă numele de *factor de putere* și arată ce fracțiune este disipată prin efect Joule. Cealaltă parte a puterii descrisă de căderea de tensiune pe elementele reactive ( $U_m \sin \varphi \sin \omega t$ ) este numită *putere reactivă* ( $P_{\text{reactiv}}$ ) și este egală cu:

$$P_{\text{reactiv}} = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi = P_a \sin \varphi. \quad (4.41)$$

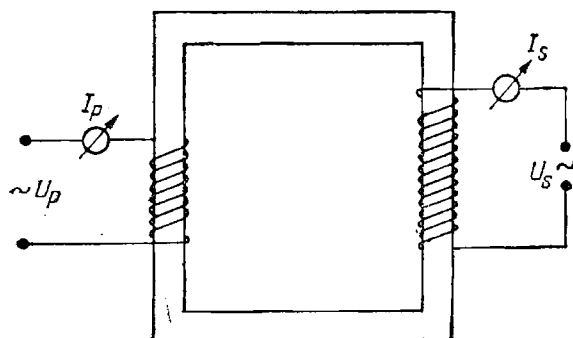


Fig. III.4.22

e) **Transformatorul** este un aparat care primește curent electric sub o intensitate  $I_p$  și tensiune  $U_p$  într-un circuit primar și ne redă un curent de aceeași putere, dar de intensitate  $I_s$  și tensiune  $U_s$  printr-un circuit secundar (fig. III.4.22). Cele două circuite sînt de fapt două bobine cu număr diferit de spire ( $N_p$  și respectiv  $N_s$ ), înfășurate pe un cadru feromagnetic, care constituie un circuit magnetic. Cu alte cuvinte, dacă aplicăm o tensiune alternativă  $U_p$  la bornele circuitului primar, atunci la bornele circuitului secundar va apărea o tensiune indusă  $U_s$ :

$$U_s = - \frac{d\Phi_s}{dt} = - M \frac{dI_p}{dt} = - N_s \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.42)$$

$M$  fiind coeficientul de inducție mutuală, iar  $\Phi_s$  fluxul printr-o spirală a secundarului. În cele ce urmează vom parcurge o altă cale presupunînd că fluxul magnetic prin circuitul magnetic este unic,  $\Phi$ , prin variațiile căruia apar în primar și în secundar tensiuni induse:

$$\mathcal{E}_p = - N_p \frac{d\Phi}{dt}, \quad \mathcal{E}_s = - N_s \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.43)$$

În circuitul primarului cu rezistența  $R_p$ ,  $\mathcal{E}_p$  se opune tensiunii aplicate:

$$U_p - N_p \frac{d\Phi}{dt} = R_p i_p. \quad (4.44)$$

În schimb, în circuitul secundarului, pe lângă rezistența lui proprie  $R_s$ , mai există și rezistența circuitului exterior  $R_{es}$ , deci tensiunea indusă  $\mathcal{E}_s$  trebuie să compenseze căderea de tensiune pe ambele rezistențe:

$$\mathcal{E}_s = - N_s \frac{d\Phi}{dt} = I_s(R_s + R_{es}) = I_s R_s + U_s. \quad (4.45)$$

Dacă vom alege astfel de materiale încît să neglijăm pierderile prin efect Joule în bobinajele transformatorului, adică vom neglija  $I_p R_p$  și  $I_s R_s$ , atunci obținem:

$$\frac{s_p}{s_s} = \frac{U_p}{U_s} = \frac{N_p}{N_s}. \quad (4.46)$$

Rezultă deci că raportul tensiunilor la bornele celor două circuite este proporțional cu raportul numărului de spire, numit și *raport de transformare*. Din condiția ca puterea electrică să fie aceeași ( $P_p = P_s$ ) rezultă:

$$\frac{U_p}{U_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}. \quad (4.46')$$

Este evident că această condiție s-ar aplica unui transformator „ideal”, în care bobinajele circuitelor nu ar avea rezistență. În cazul real, puterea redată ( $P_s$ ) este mai mică decît cea recepționată, astfel că se definește un randament al transformatorului:  $\eta = P_s/P_p$ .

În desenul nostru am figurat un cadru masiv. În realitate se folosește un ansamblu de lamele (tole), strînse una lîngă alta, pentru a evita încălzirea prin curenții Foucault. Apare însă un inconvenient ținînd seama că între două tole toți curenții induși au sensuri opuse, deci se resping. Aceasta face ca lamelele transformatorului să vibreze („zumzetul” transformatorului). Pentru a evita deteriorarea, este necesară strîngerea lamelelor.

Un alt mod de a micșora efectul curenților turbionari îl constituie folosirea miezurilor magnetice cu rezistență electrică mare. Materialele folosite în acest scop sînt feritele, care posedă, pe lîngă permeabilitate mare, și o rezistivitate electrică ce întrece chiar valoarea de  $10^5 \Omega \cdot \text{cm}$ , adică de  $10^{16}$  ori mai mare decît a metalelor.

Transformatorul are multe aplicații, dintre care menționăm rolul jucat în transportul energiei electrice și în alimentarea tuburilor electronice. În centralele electrice de astăzi funcționează generatoare de curent cu puteri uriașe, unele proiecte vizează construirea de generatoare cu putere de 1 milion de kW. Dacă energia electrică ar fi transportată sub tensiunea de consum a rețelelor (220 V), atunci puterea disipată pe liniile de transport ar fi enormă:

$$P = \left( \frac{P_g}{U_p} \right)^2 R_{\text{linie}},$$

unde  $P_g$  este puterea furnizată de generator,  $U_p$  — tensiunea primarului, iar  $R_{\text{linie}}$  este rezistența liniei de transport. Dacă însă transportăm energia sub tensiune înaltă ( $U_s \gg U_p$ ) și intensitate mică, atunci pierderile de energie pe linie prin efect Joule vor fi micșorate. Să presupunem că  $U_s$  este de 220 000 V ( $U_s/U_p = 10^3$ ). Pierderile în acest caz sînt de 1 milion de ori mai reduse.

f) **Motoare de curent alternativ.** *Cîmpul magnetic rotitor și motorul sincron.* Să presupunem că alimentăm cu curent trifazat trei bobine dispuse pe un cerc, la  $120^\circ$  una de alta (fig. III.4.23). Dacă montăm un ac magnetic în centrul cadrului, vom constata că acesta se rotește atunci cînd prin bobine trece curentul. Zicem că acul magnetic se află sub acțiunea unui cîmp magnetic

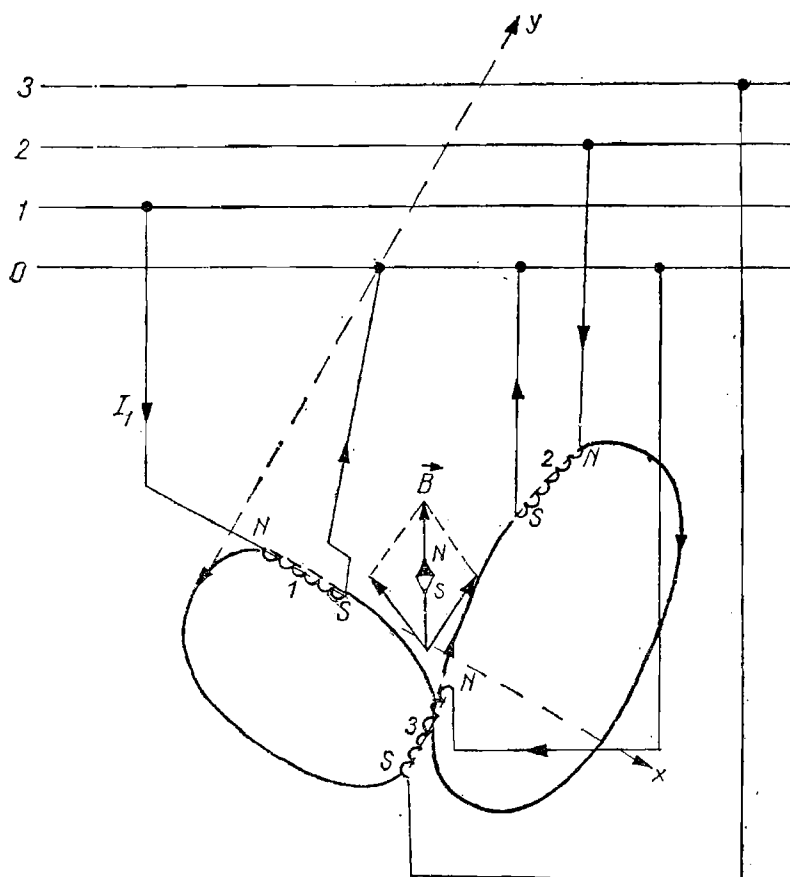


Fig. III.4.23

rotitor. Apariția lui poate fi înțeleasă dacă ținem seama de diagrama curenților (fig. III.4.20). Dacă printr-o bobină circulează un curent maxim de la o fază, de exemplu, curentul  $I_1$ , atunci prin celelalte două, curenții  $I_2$  și  $I_3$  au sensuri opuse, astfel că liniile câmpului magnetic create de cele trei bobine au configurația din fig. III.4.23, și dau un câmp rezultat  $H$ . Când maximum curentului trece de la faza 1 la faza 2, atunci și vectorul câmpului rezultat s-a rotit cu  $120^\circ$ . În felul acesta în timpul unei perioade câmpul magnetic rezultat se rotește cu aceeași frecvență. Dacă nu am avea frecări, acul magnetic s-ar roti cu frecvența câmpului rotitor. Intensitatea câmpului este proporțională cu intensitatea curenților,  $B_i = CI_i = CI_m \sin(\omega t + \varphi_i) = B_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ :  $B_1 = CI_m \sin \omega t$ ,  $B_2 = CI_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$ ,  $B_3 = CI_m \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$ .

Pentru a calcula intensitatea câmpului rezultat vom aduna proiecțiile celor trei câmpuri, odată pe direcția axei  $x$  luată pe axul bobinei 1 ( $B_x = B_{1x} +$

+  $B_{2x} + B_{3x}$ ) și apoi pe o axă perpendiculară (axa  $y$ ) obținînd pe  $B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y}$ :

$$\begin{aligned} B_x &= B_1 + B_2 \cos \frac{2\pi}{3} + B_3 \cos \frac{4\pi}{3} = B_1 - \frac{1}{2} (B_2 + B_3) = \\ &= CI_m \left[ \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{3}{2} CI_m \sin \omega t = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t, \\ B_y &= B_2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + B_3 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (B_2 - B_3) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} CI_m \left[ \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = + \frac{3}{2} B_m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Deci cîmpul rezultat  $B$  are valoarea:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m, \quad (4.47)$$

care, după cum se vede, este constantă în timp, ceea ce corespunde descrierii calitative prezentată mai înainte.

Pe principiul prezentat mai sus este construit motorul sincron. Ca rotor este folosit un electromagnet alimentat din exterior. Se poate obține un motor sincron dacă plecăm de la un generator trifazat, alimentînd bobinele statorului în curent trifazat și punînd în mișcare rotorul datorită interacțiunii electromagnetice cu cîmpul rotitor. Dacă solicitarea mecanică nu întrece o anumită limită, atunci viteza lui de rotație unghiulară este egală cu cea a cîmpului rotitor, de unde și numele de *motor sincron*. Un aspect deosebit, care apare la motoare, în general, îl constituie „reacțiunea” rotorului față de stator, atunci cînd este pus în mișcare. Datorită rotației sale se va induce în bobinele statorului o tensiune, numită *contraelectromotoare* datorită faptului că este de sens contrar tensiunii de alimentare.

*Motorul asincron.* Spre deosebire de motorul descris mai sus, în motorul asincron rotorul are o frecvență de rotație mai mică decît frecvența cîmpului rotitor. El are o răspîndire mai mare, deoarece rotorul nu mai este confecționat dintr-un electromagnet alimentat din exterior, ci este format din două coroane metalice, paralele între ele, unite prin conductori groși („cușca de veveriță”). Acest „tambur” cilindric, care seamănă cu o colivie este plasat sub acțiunea unui cîmp magnetic rotitor (fig. III.4.24). Montajul unui motor asincron este redat în fig. III.4.24 pentru un rotor cu doi conductori. Cele trei bobine alimentate în curent trifazat au un capăt legat la un inel metalic, legat la rîndul lui la conductorul de nul. Planul inelului, în care este situat cîmpul rotitor este perpendicular pe conductorii rotorului. Să presupunem că sensul de rotație al cîmpului este cel al acelor unui ceasornic, iar viteza



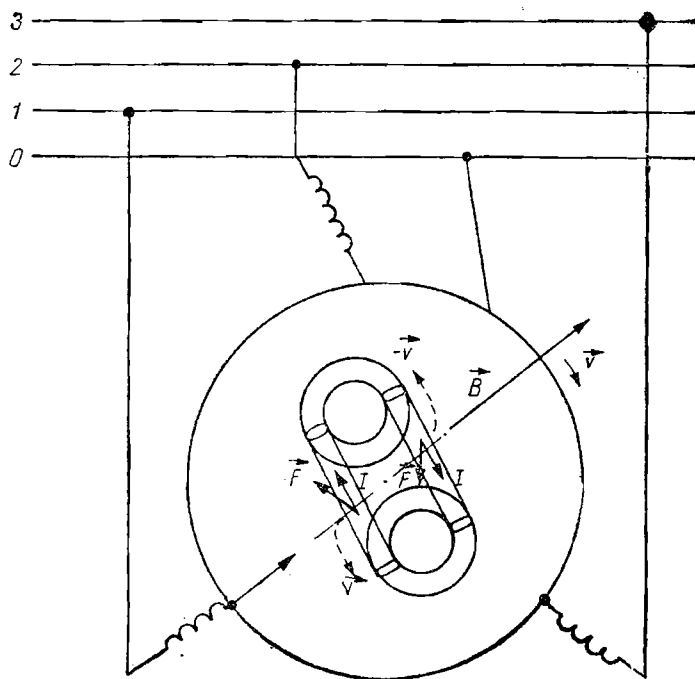
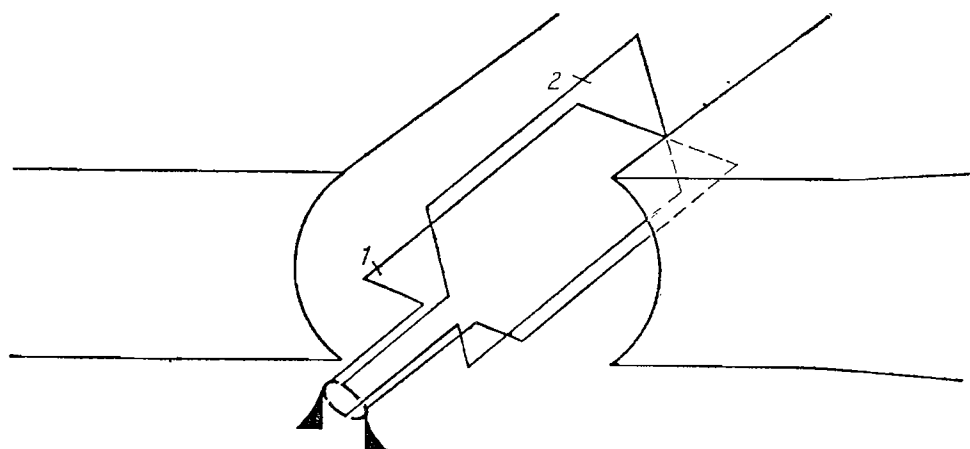


Fig. III.4.24

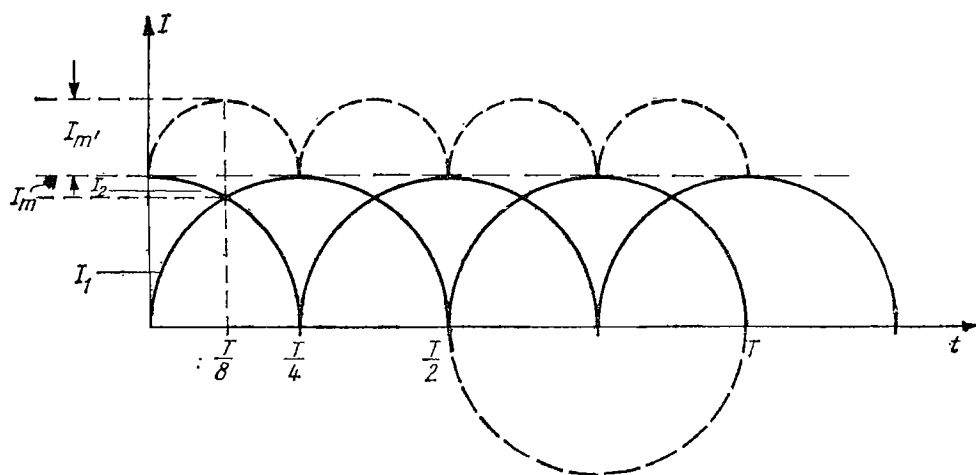
lui liniară este  $\vec{v}$  și frecvența  $\nu_B$ . În timpul mișcării, cîmpul taie conductorii, deci are loc o variație de flux magnetic. Ținînd seama de faptul că în mod relativ fenomenul ar fi identic dacă ar sta pe loc cîmpul și s-ar roti conduc-

torii cu viteza  $-\vec{v}$ , deci în sens invers acelor unui ceasornic, se poate găsi sensul curenților induși. Între curenții induși și cîmpul rotitor ia naștere o forță electromagnetică, astfel încît cele două ramuri sînt supuse unui cuplu care antrenează rotorul în sensul cîmpului rotitor. Deci este posibilă rotirea „tamburului” fără a fi nevoie de un electromagnet. Să vedem de ce frecvența lui de rotație nu este egală cu cea a cîmpului rotitor. Dacă frecvențele ar fi egale, atunci cîmpul nu ar mai tăia conductorii. Cînd rotorul este în repaus și introducem curentul trifazat, ia naștere brusc un curent de inducție, care va da naștere unui cuplu violent de pornire. Pe măsură ce crește viteza lui unghiulară, scade viteza de variație a fluxului magnetic, care depinde de diferența dintre frecvențele de rotație ale cîmpului și rotorului, dar scade și intensitatea curentului. În felul acesta scade forța electromagnetică, deci scade viteza unghiulară, ceea ce duce la o creștere a diferenței între frecvențele de rotație, deci din nou la o creștere a vitezei de variație a fluxului ș.a.m.d. Acest proces antagonist conduce la o stare în care viteza de rotație rămîne constantă.

g) **Generatorul de curent continuu.** Curentul pulsant era obținut prin rotirea terminațiilor celor două ramuri ale spirei în interiorul a două semiinele. În practică, ramurile sînt lipite de semiinele și de pe acestea curentul



a)



b)

Fig. III.4.25

este cules cu ajutorul a două perii. Dacă avem o singură spirală, intensitatea poate fi descrisă prin modulul sinusului:

$$I = I_m | \sin \omega t |.$$

Curentul pulsant nu se apropie de condiția de curent continuu. Să presupunem însă că avem două spirale, ale căror plane formează un unghi diedru de  $90^\circ$  (fig. III.4.25a). De data aceasta, colectorul este fragmentat în patru arce de cerc.

În felul acesta, după o jumătate de perioadă, cînd curentul  $I_1 = I_m |\sin \omega t|$  este nul, curentul din spira a doua devine maxim,  $I_2 = I_m \left| \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right|$ , deci, în loc să avem pe o perioadă două bucle ale sinusului, avem patru (fig. III.4.25b), curentul rezultat fiind obținut prin însumarea curenților celor patru ramuri. În fig. III.4.25b, curentul rezultat (linia punctată) are patru maxime într-o perioadă și este tot pulsant, dar față de o valoare constantă  $I_m$ . Astfel, curentul rezultat este descris în cazul a patru conductori de funcția:

$$I(t) = I_m + I'_m |\sin(2\omega t)|. \quad (4.48)$$

Dacă există  $2n$  ramuri, colectorul trebuie să fie format din  $2n$  arce de cerc. Curentul total este descris de o funcție de tipul:

$$I(t) = I_m + I'_m |\sin(n\omega t)|,$$

unde partea pulsantă, avînd o frecvență mare, poate fi aproximată ca o parte continuă. Un astfel de generator se numește *dinam*. Cînd curentul de alimentare a inductorului este furnizat de o sursă exterioară, avem de-a face cu un *dinam cu excitație exterioară*, iar dacă înfășurările inductorului sînt alimentate din curentul produs de el, avem de-a face cu un *dinam cu autoexcitație*. Autoexcitația poate fi realizată în trei moduri: excitație în serie (fig. III.4.26a), în paralel (fig. III.4.26b) și mixtă (fig. III.4.26c). În fig. III.4.26 sînt figurate indusul de rezistență  $r$ , inductorul de rezistență  $r'$  și circuitul exterior de rezistență  $R$ .

În excitația în serie tot curentul  $I$  trece atît prin inductor, cît și prin rezistența exterioară  $R$ . Deci tensiunea la borne  $U$  va fi dată de:

$$U = \mathcal{E} - I(r) = I(R + r'),$$

unde  $\mathcal{E}$  este tensiunea electromotoare indusă.

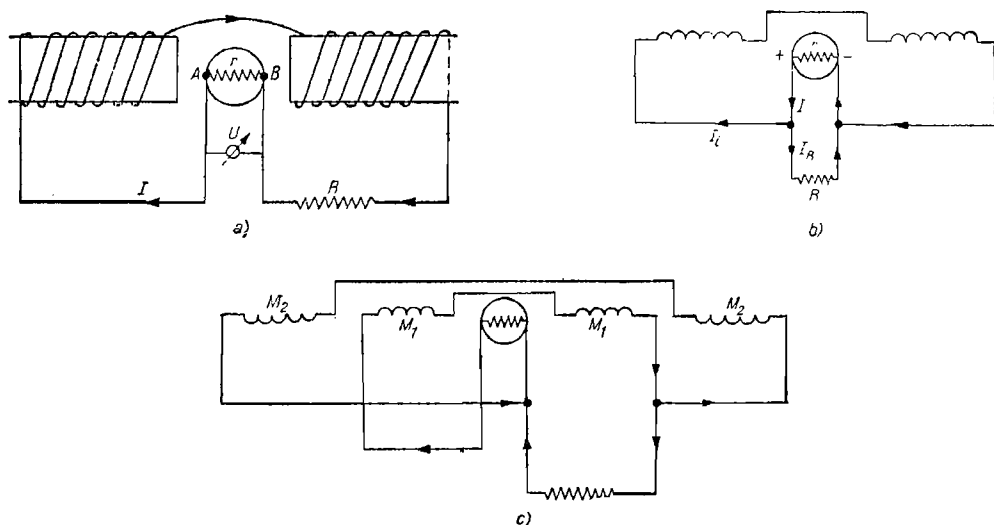


Fig. III.4.26

În excitația în paralel, prin inductor trece numai o parte din curentul produs ( $I_i$ ). Ecuațiile sînt:

$$I = I_i + I_e, \quad I_i r' = I_e R \quad \text{și} \quad \mathcal{E} = I \left[ r + \frac{r' R}{r' + R} \right].$$

În primul montaj, curentul este mare prin inductor și se magnetizează puternic miezurile. Dar de la o anumită valoare a intensității curentului, se poate atinge saturația și deci o creștere ulterioară a curentului ar produce doar pierderi Joule, deci ar trebui ca la pornire dinamul să fie autoexcitat în serie pentru a atinge rapid saturația miezurilor, iar apoi să se treacă pe o excitație în paralel. Pentru a înlătura acest inconvenient, este folosită excitația mixtă, în care inductorul are două înfășurări, una alimentată în serie, iar alta în paralel.

h) **Motorul de curent continuu.** Acest tip de motor funcționează pe principiul reversibilității generatorului, adică prin introducerea în rotor a unui curent electric aplicînd o tensiune din exterior ( $U$ ); rotorul începe să se rotească datorită cuplului forțelor electromagnetice, care acționează asupra fiecărei perechi de ramuri. Este interesant de remarcat faptul că dacă aplicăm tensiunea la bornele motorului, ca să avem aceeași polaritate ca în cazul cînd funcționa ca generator, rotorul se rotește în sens invers decît în cazul generatorului (fig. III.4.27).

Dacă presupunem că inductorul este alimentat separat, atunci în circuitul rotorului putem înregistra doi curenți, unul atunci cînd rotorul este imobil (la pornire),  $I_p$ , și un curent atunci cînd rotorul se află în mișcare, dar nu antrenează o altă mașină (mersul în gol),  $I_g$ ;  $I_p$  este dat de:

$$I_p = \frac{U}{r + R}.$$

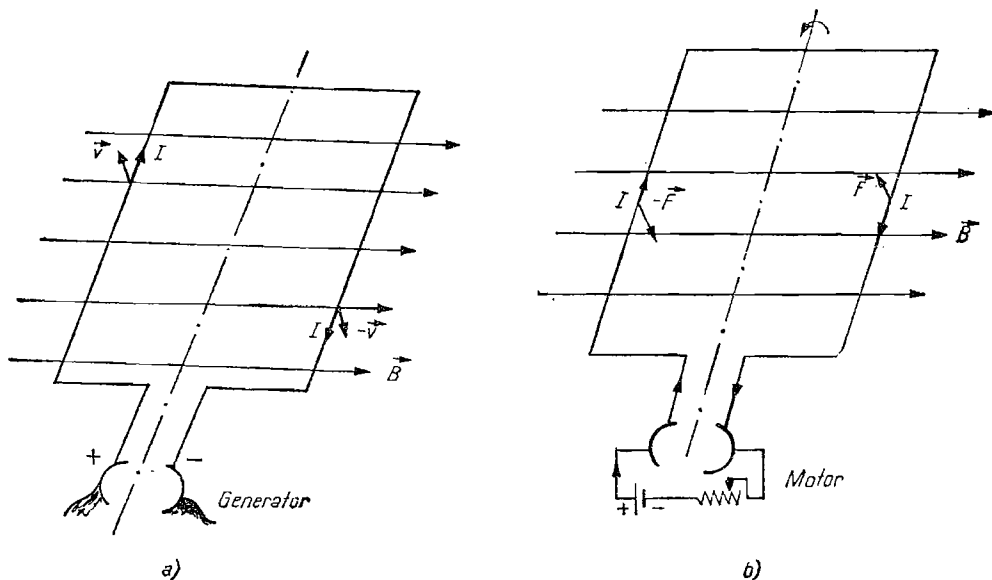


Fig. III.4.27

La mersul în gol apare tensiunea *contraelectromotoare* ( $E_c^{(g)}$ ), astfel că  $I_g$  are expresia:

$$I_g = \frac{U - E_c^{(g)}}{r + R_e}.$$

În realitate, chiar la mersul în gol, rotorul are de învins frecările la axul de rotație și rezistența aerului. Cu alte cuvinte, viteza lui va fi limitată de aceste forțe pasive.

La mersul în sarcină, viteza este micșorată și mai mult, deoarece momentul forțelor electromagnetice trebuie să învingă cuplul rezistent. În acest caz, scăderea vitezei, care este însoțită de scăderea tensiunii  $E_c$ , este însoțită de o creștere a intensității curentului ( $I > I_g$ ), deci de o creștere a puterii Joule disipată pe rezistența rotorului.

Așa cum am arătat, la pornire vom avea un curent mai intens față de mersul în sarcină, de aceea este necesară montarea unui reostat de pornire care să limiteze acest curent. Randamentul motorului este dat de raportul între puterea mecanică furnizată și puterea electrică consumată ( $UI$ ). Puterea furnizată este egală cu puterea consumată, din care trebuie scăzută puterea Joule disipată pe rezistențe ( $r + R$ ) $I^2$ . Deci expresia randamentului este următoarea:

$$\eta = \frac{UI - (r + R)I^2}{UI} = \frac{E_c}{U},$$

în care s-a ținut seama că  $U = E_c + (r + R)I$ . Se observă deci că randamentul este exprimat indirect, prin intermediul tensiunii contraelectromotoare.

## 5. Oscilații și unde electromagnetice

### 5.1. ÎNCĂRCAREA ȘI DESCĂRCAREA CONDENSATORULUI PRINTR-O REZISTENȚĂ

În paginile precedente am studiat comportarea condensatorului în curent alternativ, arătând că în cazul ideal el introduce un defazaj al curentului față de tensiune cu un unghi  $\pi/2$ , iar în prezența unei rezistențe  $R$ , montată în serie, defazajul  $\varphi$  este mai redus ( $\varphi < \pi/2$ ). Să studiem mai detaliat procesul de încărcare-descărcare cu ajutorul unui montaj simplu (fig. III.5.1) în care un comutator special ne permite trecerea de pe bornele bateriei de încărcare, pe bornele prin care condensatorul este legat direct pe rezistența  $R$ . Să plecăm de la starea în care condensatorul este descărcat, deci sarcina lui,  $q$ , și tensiunea la bornele sale,  $U_C$ , sînt nule. Atunci cînd stabilim brusc contactul cu sursa, se stabilește brusc un curent. Pe măsură ce electronii se acumulează pe plăcile condensatorului, apare o diferență de potențial între plăcile sale,  $U_C$ , care are sens contrar tensiunii la borne și care deci se opune trecerii curentului. Intensitatea  $i$  scade treptat, pînă cînd diferența de potențial de la bornele condensatorului este egală cu diferența ( $U - U_R$ ) și deci curentul este stopat. Pe măsură ce scade intensitatea curentului, scade căderea de tensiune pe  $R$ , deci crește tensiunea pe plăcile condensatorului. La sfîrșitul operației de încărcare, cînd nu mai trece curent,  $U_R = 0$  și deci  $U_C = U$ . În acest moment este înmagazinată sarcina  $Q = CU$ . În cazul alimentării în curent continuu, acest regim de încărcare are un caracter tranzitoriu. Pornind de la condiția exprimată mai sus, obținem relația:

$$(U - iR) = U_C = \frac{q}{C}. \quad (5.1)$$

Ținînd seama că sarcina  $q$  este acumulată în timp prin curgerea curentului, atunci intensitatea lui este  $i = dq/dt$ , astfel că relația (5.1) devine:

$$U = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{CU - q} = + \frac{dt}{RC}. \quad (5.2)$$

Produsul ( $RC = \tau_c$ ) are dimensiunea timpului. Integrînd pentru intervalul de timp  $(0, t)$ , în care sarcina pe condensator crește de la 0 la  $q$ , obținem succesiv expresiile:

$$\int_0^q \frac{dq}{CU - q} = \int_0^t \frac{dt}{\tau_c} \Rightarrow -\ln(CU - q) \Big|_0^q = \frac{t}{\tau_c},$$

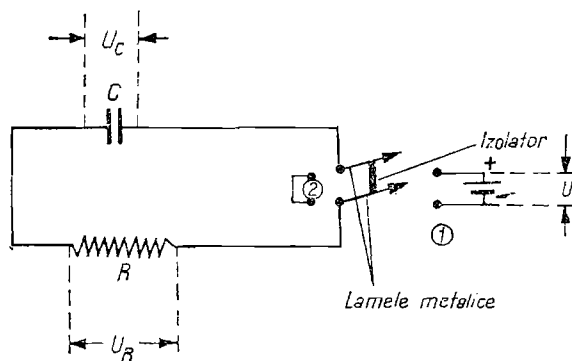


Fig. III.5.1

de unde rezultă valoarea sarcinii  $q$  după timpul  $t$ :

$$q = Q(1 - e^{-t/\tau_c}). \quad (5.3)$$

Pentru  $t = 0$ ,  $q = 0$ , iar la  $t = \infty$ ,  $q = Q$ . Dependența lui  $q$  de timp este redată în fig. III.5.2 (curba 1). Se vede ușor că valoarea maximă  $Q = CU$  este atinsă asimptotic;  $\tau_c$  ne arată timpul după care sarcina  $q$  a ajuns la valoarea  $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,63$  din cea maximă. Pentru a vedea cum se modifică intensitatea curentului în timpul încărcării, folosim relația (5.3):

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} = \frac{U}{R} e^{-t/\tau_c}. \quad (5.4)$$

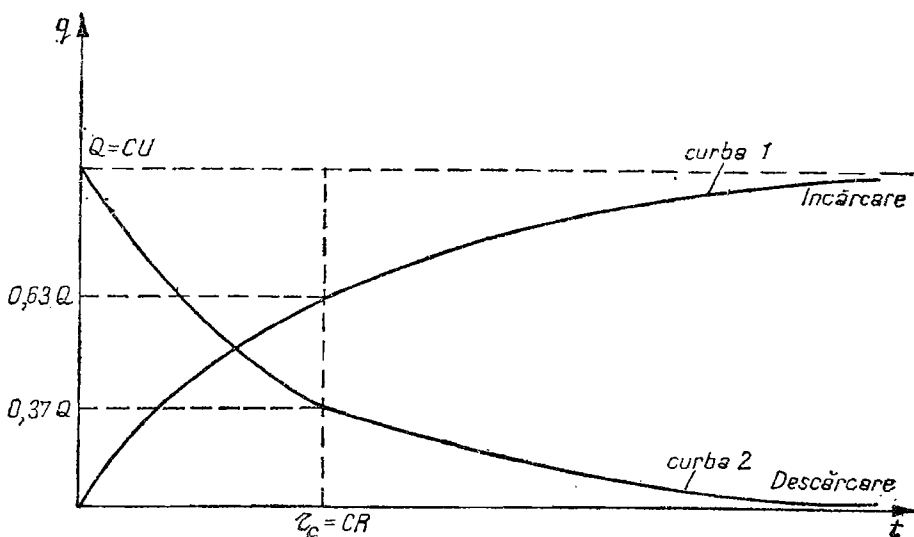


Fig. III.5.2

Deci pentru  $t = 0$ ,  $i = \frac{U}{R}$  (valoarea maximă), de la care scade asimptotic la zero pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Pentru a studia descărcarea, trecem comutatorul din fig. III.5.1 de pe poziția (1) pe poziția (2). Sarcinile negative de pe o armătură se scurg prin rezistența  $R$  pentru a anihila sarcinile de pe cealaltă armătură. Cum tensiunea externă este nulă, (5.1) devine:

$$iR = -\frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{\tau_c} \quad (5.5)$$

După scurgerea a  $t$  secunde, sarcina pe armături scade de la valoarea maximă  $Q = CU$  la valoarea  $q$ :

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau_c} \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{\tau_c} \Rightarrow q = Qe^{-t/\tau_c}, \quad (5.6)$$

a cărei dependență de timp este ilustrată în fig. III.5.2b (curba 2): la  $t = 0$ ,  $q = Q$ , iar pentru  $t \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0$ . După  $\tau_c$  secunde, sarcina de pe condensator ajunge la aproximativ o treime din valoarea maximă  $\left(\frac{1}{e} Q = 0,37 Q\right)$ .

După cum se vede, produsul  $CR$ , numit și *constantă de timp* a circuitului, arată cât de rapid se încarcă sau se descarcă un condensator. Viteza de descărcare este invers proporțională cu rezistența  $R$ , astfel că în cazul ideal ( $R = 0$ ) descărcarea s-ar produce instantaneu. Pentru a ne da seama de ordinul de mărime al lui  $\tau_c$ , să luăm unele valori uzuale: pentru  $R = 100 \Omega$  și  $C = 1 \text{ pF}$ ,  $\tau_c = 10^{-6} \text{ s}$ , iar pentru  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $\tau_c = 10^{-3} \text{ s}$ . Se poate remarca deci că intervalele de timp în care are loc descărcarea sînt extrem de scurte. Intensitatea curentului de descărcare variază în mod asemănător cu cea a curentului de încărcare  $\left(i = \frac{dq}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-t/\tau_c}\right)$ , dar curentul circulă în sens invers.

Prin încărcare se înmagazinează în condensator o cantitate de energie egală cu cea furnizată de bateria de încărcare:

$$dW = U_C dq = \frac{q}{C} dq,$$

de unde rezultă:

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU_m^2. \quad (5.7)$$

Relația (5.7) este identică cu cea dedusă în (III.1).



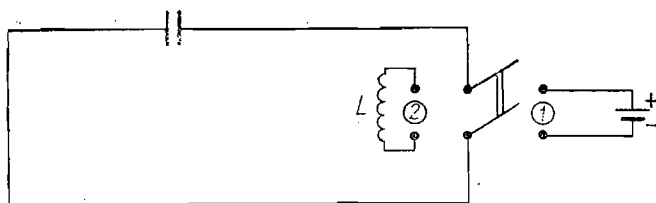


Fig. III.5.3

## 5.2. OSCILAȚII ELECTRICE

a) **Descărcarea printr-o bobină ideală.** Să legăm, în locul rezistenței  $R$  din fig. III.5.1, o bobină ideală de inductanță  $L$  (fig. III.5.3). În momentul inițial, tensiunea la bornele condensatorului este maximă ( $U_{cm}$ ), dar, fiind aplicată brusc pe bobină, generează în aceasta o tensiune de autoinducție ( $U_{Lm}$ ) care se opune trecerii curentului de descărcare. Odată cu creșterea lui  $i$ , scade  $U_c$ , scade tensiunea autoindusă  $U_L$ , și, când în condensator câmpul electric are intensitate nulă, întreaga energie ( $\frac{1}{2}CU_{cm}^2$ ) este furnizată bobinei. Curen-

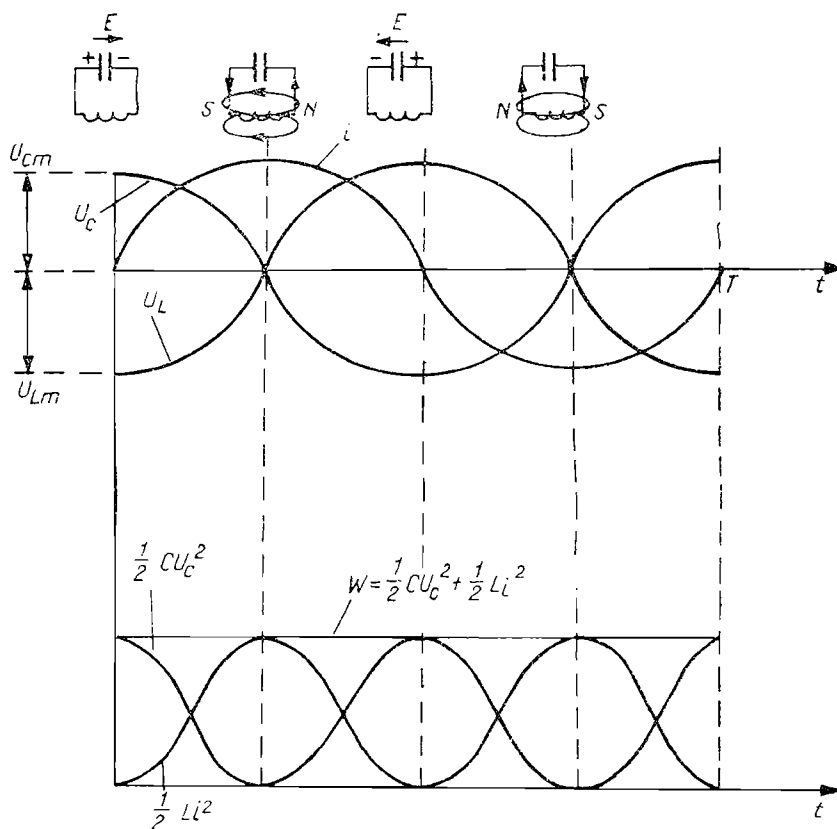


Fig. III.5.4

tul fiind maxim și cîmpul magnetic are o intensitate maximă. Dar, intensitatea curentului începe să scadă și din nou intră în joc autoinducția care furnizează o tensiune ce tinde să se opună dispariției curentului. Acest fapt face ca de pe placa încărcată negativ în etapa anterioară, acum neutră, să plece în continuare electronii, devenind astfel pozitivă. Scurgerea acestora de sarcini duce la creșterea tensiunii între plăcile condensatorului, dar în sens contrar etapei inițiale și reduce intensitatea curentului. Din nou revine în condensator energia electrică. Are loc astfel un „joc” al energiei între cîmpul electric și cîmpul magnetic. Acest balans al energiei, ilustrat în fig. III.5.4, are loc atunci cînd se realizează „rezonanța” între cele două tensiuni, cînd reactanțele sînt egale. În acest caz, energia totală rămîne constantă:

$$W = \frac{1}{2} CU_C^2 = \frac{1}{2} LI_m^2 = \frac{1}{2} CU_C^2 + \frac{1}{2} Li^2 = \text{const.} \quad (5.8)$$

Relația (5.8) este similară expresiei care descrie legea conservării și transformării energiei unui resort:

$$W = \frac{1}{2} ky^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \text{const.},$$

în care  $\frac{1}{2} Li^2$  joacă rolul energiei cinetice deoarece descrie sarcinile în mișcare, iar  $\frac{1}{2} CU_C^2$  joacă rolul energiei potențiale deoarece descrie sarcinile acumulate.

Rezultă deci că la descărcarea condensatorului printr-o bobină, tensiunea la bornele lui nu se mai reduce asimptotic la zero, ci oscilează periodic, neamortizat, cu o frecvență dată de relația lui Thomson:  $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

Să vedem ce se întîmplă dacă bobina nu este ideală, adică are o rezistență ohmică  $R$ . Raționamente fizice simple ne permit să spunem că și aici vor exista oscilații de tensiune, dar ele vor fi amortizate, deoarece în fiecare perioadă este pierdută o parte din energia electrică prin efect Joule pe rezistența  $R$ . Dacă

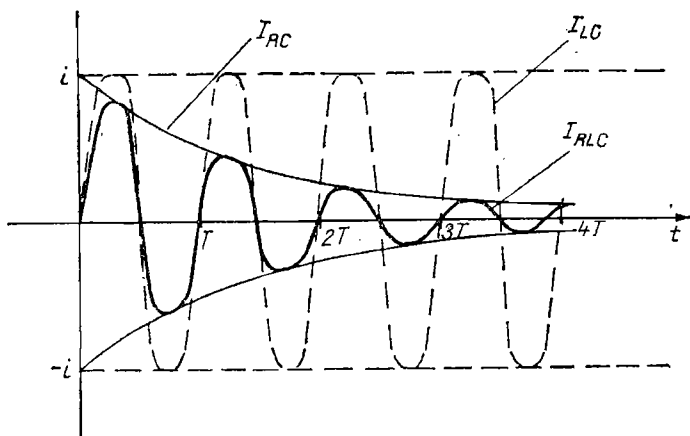


Fig. III.5.5

o să „combinăm” tendința de descărcare aperiodică prin rezistența  $R$  (curba 2 din fig. III. 5.2) cu tendința de descărcare periodică (fig. III. 5.4), atunci intensitatea curentului prin circuit va fi o funcție de timp, periodică și amortizată (fig. III.5.5). La prima vedere, „combinația” celor două curbe descrie fără cusur tendința de amortizare, dar, la o analiză mai atentă, se vede că nu este vorba de o suprapunere mecanică. Să ne reamintim că dacă constanta de timp  $\tau_c$  tinde la zero ( $R \rightarrow 0$ ), descărcarea tinde să se facă într-un timp infinit scurt, ceea ce ar duce la o amortizare puternică a oscilațiilor. Or, dacă  $R \rightarrow 0$ , amortizarea este mai slabă, deoarece autoinducția este cu atât mai puternică cu cît variațiile intensității curentului sînt mai rapide.

În circuitul  $RLC$ , conform legii conservării energiei, scăderea energiei totale pe bobină și condensator, în unitatea de timp, este egală cu puterea disipată de rezistență:

$$-\frac{d(\Pi'_L + \Pi'_C)}{dt} = P_j \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} CU_C^2 \right) = - Ri^2,$$

deci

$$\frac{d}{dt} (Li^2) + \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{C} \right) + 2Ri^2 = 0, \quad (5.9)$$

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + i^2 R = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{iR}{L} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (5.9')$$

În continuare, se poate obține variația în timp a sarcinii pe armăturile condensatorului:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = 0. \quad (5.10)$$

Ecuția (5.10) seamănă perfect cu ecuația dedusă pentru elongația oscilatorului amortizat (I.3) în care:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} \rightarrow \ddot{y}, \quad \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{b}{m} \dot{y}, \quad \text{iar} \quad \frac{q}{CL} \rightarrow \omega_0^2 y,$$

asa încît dependența de timp a sarcinii electrice este descrisă de o funcție de tipul (I.3.63):

$$q(t) = Ae^{-b't} \sin \omega't, \quad b' = \frac{R}{2L}, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (5.11)$$

care reprezintă o descărcare periodică în timp, amortizată de factorul  $e^{-b't}$ .

**b) Circuite oscilante cuplate.** Este posibil să producem oscilații ale curentului (*oscilații electrice*) într-un circuit, sub influența oscilațiilor produse în alt circuit (rezonanța electrică). Fenomenul acesta este identic cu rezonanța a două pendule care au aceeași perioadă proprie. Pentru a ușura transmiterea oscilațiilor sînt alăturate două circuite oscilante. Cînd vom avea variații de flux prin bobina unui circuit, va apare un curent în bobina celui alt (fig. III.5.6) deoarece o parte din liniile cîmpului magnetic trec prin ea. Condiția de rezonanță cere ca frecvențele lor să fie egale, adică  $C_1 L_1 = C_2 L_2$ . Dacă frecvențele nu sînt egale, atunci se poate face „acordarea” lor folosind într-unul din ele un condensator variabil.

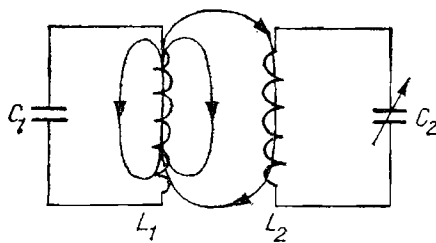


Fig. III.5.6

c) **Cîmpul electromagnetic\***. Transmiterea rezonantă a oscilațiilor electrice dintr-un circuit, în care sînt generate, în altul de recepție, constituie baza radio-tehnicii. Dar fenomenul ne arată și altceva, aparent surprinzător, că este posibil un transfer de energie prin spațiul liber. Acest transfer se poate face și în vid. Se pune întrebarea, cum are loc transmiterea energiei prin spațiu? Are loc prin intermediul cîmpului magnetic, așa cum apare din cuplajul între bobine, sau prin intermediul cîmpului electric? De fapt nu se transmite o energie magnetică sau una electrică, ci o energie *electromagnetică*. Acest răspuns a fost elaborat de Maxwell prin generalizarea legii lui Faraday și a expresiilor care descriu cîmpul magnetic creat de curenți. Arătînd că ori de cîte ori există un cîmp magnetic variabil în timp, în jurul lui este generat un cîmp electric și invers, Maxwell a introdus noțiunea de *cîmp electromagnetic*, ca o realitate fizică, ca o entitate ce conține două laturi: cîmpul electric și cîmpul magnetic. Cele două laturi nu pot fi separate decît în fenomene statice. În fenomene dinamice, cele două cîmpuri se află în strînsă legătură, se generează reciproc. O altă caracteristică o constituie faptul că el nu este legat de o poziție ci se propagă în spațiu. Pentru a demonstra această afirmație să ne imaginăm o experiență în care cele două circuite cuplate din fig.III.5.6 sînt plasate la diferite distanțe unul de altul. Oscilațiile produse în  $(L_2C_2)$  sînt interceptate de  $(L_1C_1)$  la diverse intervale de timp în funcție de distanță, astfel că viteza de propagare a cîmpului electromagnetic ar fi finită și măsurabilă. Cîmpul electromagnetic se propagă sub formă de unde, numite *unde electromagnetice*, iar viteza de propagare este egală cu... *viteza luminii*. Această viteză a fost găsită prin calculul de Maxwell și în plus, el a arătat că există o strînsă legătură între viteza de propagare și caracteristicile electrice și magnetice ale unui mediu:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \text{ astfel că în vid } \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c.$$

Extraordinara previziune a lui Maxwell a condus la ipoteza că lumina este de natură electromagnetică. În felul acesta au fost explicate o serie de fenomene (interferența, difracția etc.), caracteristice opticii ondulatorii. Pe de altă parte, a fost dată o justificare indicelui absolut de refracție al unui mediu  $\left( n = \frac{c}{v} \right)$  și, în plus, s-a găsit a fi egal cu cel calculat:  $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ .

\* O discuție mai detaliată a proprietăților cîmpului electromagnetic este redată în IV.3.

## 6. Elemente de electronică

### 6.1. EMISIA TERMoeLECTRONICĂ

a) **Curentul electric în gaze.** În condiții normale de presiune și temperatură, un gaz se prezintă ca un dielectric perfect. Dacă în gaz reușim, printr-un mijloc oarecare, să generăm purtători de sarcină, atunci între doi electrozi metalici aflați în acel gaz și legați la o tensiune constantă se poate stabili un curent electric. Generarea de purtători într-un gaz se poate face pe mai multe căi: a) ionizare sub acțiunea unui agent exterior; b) ionizare prin ciocnire cu particulele electrice accelerate existente în gaz; c) emisie electronică din electrozi. În toate cazurile, intensitatea curentului depinde de diferiți parametri: presiunea gazului, tensiunea aplicată electrozilor, distanța dintre ei etc.

Ionizarea sub acțiunea unui agent extern este și ea produsă în diverse moduri, în funcție de natura acestuia: particulă elementară cu masă de repaus diferită de zero (electroni, protoni), sau radiații electromagnetice (luminoase, X, gamma). În primul caz, particulele ionizează atomii, sau moleculele din gaz prin ciocnire, iar în al doilea caz, prin efect fotoelectric. Cazul b) se referă la un mecanism intern de ionizare, sub acțiunea electronilor deja existenți, care sînt accelerați în câmpul electric dintre cei doi electrozi. Electronii rezultați din prima ciocnire suferă o nouă accelerare pînă capătă energia necesară ionizării altor atomi sau molecule neutre ș.a.m.d. Procesul astfel descris conduce la apariția unei „avalanșe” de electroni, de unde și numele de *ionizare în avalanșă*. Pentru ca un electron să poată ioniza prin ciocnire alți atomi sau molecule, el trebuie să poată cîștiga energia necesară, numită *energie de ionizare*, prin accelerare în câmpul electric  $E$ . În acest sens, este necesar ca *drumul lui liber mediu*,  $\lambda$ , să fie mai mare decît distanța  $d$  necesară acumulării de energie cinetică:  $W_c = eEd = W_{\text{ioniz.}}$  ( $d < \lambda$ ). Din acest motiv, o ionizare în avalanșă nu poate avea loc decît în gaze rarefiate ionizate, unde  $\lambda$  este mare. Stabilirea curentului electric prin gaze rarefiate ionizate poartă numele de *descărcare electrică*. La anumite valori ale presiunii ea devine luminescentă, deoarece ciocnirile electronilor cu particulele neutre, sau încărcate conduc și la excitări ale atomilor, care în urma dezexcitării emit lumină. Dacă am scădea presiunea gazului tot mai mult, atunci, sub o anumită limită, descărcarea luminescentă dispăre, și anume de la acea limită la care drumul liber mediu este mai mare decît distanța dintre electrozi, deci cînd în acest spațiu nu mai au loc ciocniri. Numărul de perechi de ioni generate în primul caz, este proporțional cu numărul de particule elementare care străbat gazul în unitatea de timp și pe unitatea de suprafață, depinzînd totodată

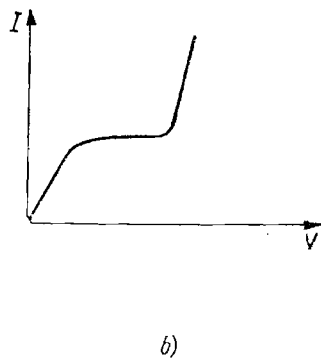
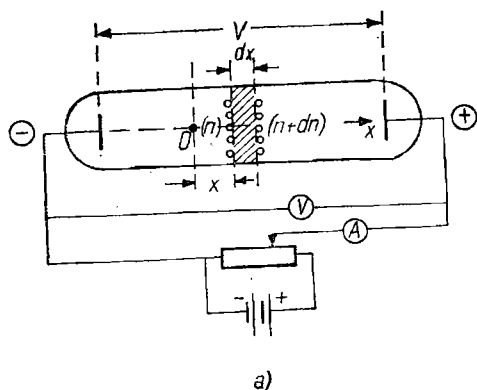


Fig. III.6.1

și de energia particulelor. În cazul ionizării prin efect fotoelectric, numărul de sarcini generate în unitatea de timp va fi proporțional cu numărul de fotoni incidenti pe unitatea de suprafață.

În ionizarea prin ciocniri cu electroni accelerați, se poate calcula numărul de perechi electron-ion apărute, în funcție de distanța parcursă în lungul liniilor câmpului electric. Fie  $n_0$  concentrația de electroni în punctul  $x = 0$  dintr-un tub în care avem un gaz rarefiat, electroni apăruiți prin ionizare sub acțiunea unor agenți externi (fig. III.6.1). Prin accelerare în câmpul electric dintre electrozi, electronii se mișcă în lungul direcției  $x$  și suferă ciocniri cu atomii sau moleculele gazului. Fie  $n$  concentrația de electroni care intră la distanța  $x$  în spațiul hașurat extins cu  $dx$  în lungul axei, iar  $dn$  numărul de electroni secundari generați prin ciocniri. Numărul  $dn$  este proporțional cu numărul de electroni care intră și cu spațiul  $dx$  de-a lungul căruia are loc ionizarea:

$$dn = C_T n dx. \quad (6.1)$$

Prin integrare găsim numărul total de electroni la distanța  $x$  față de origine:

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_0^x C_T dx = \ln \frac{n}{n_0} = C_T x \Rightarrow n = n_0 e^{C_T x}. \quad (6.2)$$

Relația (6.2) ne arată că la  $x = 0$ ,  $n = n_0$ , iar pentru  $x \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , adică are loc o ionizare în avalanșă;  $C_T$  este o constantă numită *constantă lui Townsend*.

Sarcinile generate în spațiul rarefiat, care se mișcă ordonat spre cei doi electrozi, vor asigura închiderea circuitului electric, deci se va stabili un curent electric. Acest curent va depinde de diferența de potențial aplicată electrozilor, dar, din cauza proceselor complicate de generare a ionilor, legea lui Ohm nu mai rămâne valabilă. De aceea, pentru a descrie comportarea într-un circuit electric a acestui tub de descărcare, este nevoie să cunoaștem dependența curentului de tensiunea aplicată, care poartă numele de *caracteristică tensiune-curent*.

Cu ajutorul dispozitivului din fig. III.6.1a se poate studia caracteristica tensiune-curent a gazului, care este o curbă ce reprezintă intensitatea curentului în funcție de tensiunea dintre electrozi. Forma ei generală se prezintă ca în fig. III. 6.1b.

O altă sursă importantă de sarcini libere o constituie emisia *termoelectronică*, care apare la încălzirea unui metal. Electronii liberi, cu cea mai mare energie cinetică, pot ieși din metale prin încălzire. Numărul de termoelectрони depinde puternic de temperatură. S-a stabilit experimental și teoretic că intensitatea curentului termoelectronic este dată de relația Richardson-Dushman:

$$I = AT^2 e^{-\frac{W_e}{kT}}, \quad (6.3)$$

unde  $A$  este o constantă,  $W_e$  energia de extracție (vezi efectul fotoelectric), iar  $k$  constanta lui Boltzmann. Se observă deci, că intensitatea curentului termoelectronic crește aproape exponențial cu creșterea temperaturii.

## 6.2. TUBURI ELECTRONICE ȘI APLICAȚII

a) **Dioda.** Dioda este cel mai simplu tub electronic în care este utilizată emisia termoelectronică pentru a închide circuitul prin vid. Ea este confecționată dintr-un balon de sticlă în care există un izvor de termoelectрони (*catodul*) și un colector legat la polul pozitiv al unei baterii (*anodul* sau *placa*). Catodul poate fi confecționat fie sub forma unui filament de tungsten încălzit cu ajutorul curentului furnizat de o baterie (încălzire directă), fie dintr-un strat emisiv depus pe un cilindru de nichel care îmbracă filamentul (fig. III.6.2a). În acest ultim caz, dioda funcționează cu încălzire indirectă, tensiunea de încălzire fiind furnizată fie de o sursă de curent continuu, fie de una de curent alternativ. În fig. III.6.2 sînt redată schematic un catod cu încălzire indirectă, o diodă cu încălzire indirectă, cu cele patru legături și schema de alimențare (fig. III.6.2c). Anodul  $A$  se prezintă sub forma unui cilindru metalic plasat în jurul catodului. În tub este vid suficient de înalt pentru ca drumul liber mediu să fie mai mare decît distanța  $C-A$  și astfel să evite ciocnirea termoelectронilor cu molecule de aer. În cazul diodei se pot

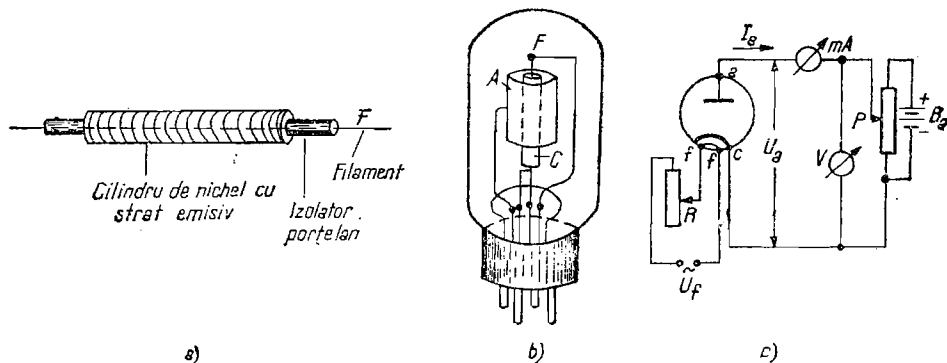


Fig. III.6.2

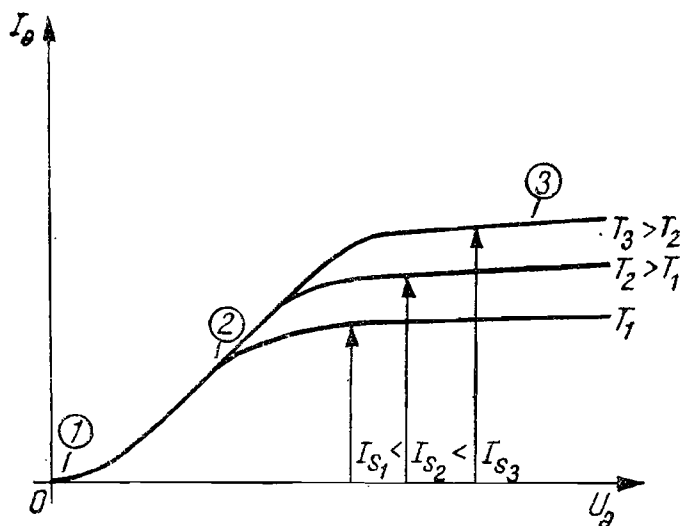


Fig. III.6.3

delimita două circuite: *circuitul de filament*, compus din sursa de curent pentru filament,  $U_f$ , rezistența variabilă  $R$  și filamentul  $f$  și *circuitul anodic* compus din bateria anodică  $B_a$ , potențiometrul  $P$ , miliampermetrul mA, anodul  $a$  și catodul  $c$ .

Cînd în circuitul anodic se aplică o tensiune cu polul pozitiv la placă, în circuitul exterior se stabilește un curent numit *curent anodic* (*curent de placă*) dacă filamentul este încălzit.

Studiul diodei presupune (ca și la descărcările în gaze) găsirea dependenței intensității curentului anodic  $I_a$  de tensiunea  $U_a$  aplicată între catod și anod, motiv pentru care atît alimentarea anodului cît și încălzirea catodului pot fi variate prin intermediul potențiometrului  $P$  și rezistorului  $R$ . Caracteristica tensiune-curent a unei diode arată ca în fig. III.6.3 și ea prezintă, pentru o anumită tensiune de alimentare a filamentului, trei porțiuni: porțiunea inițială, *neliniară*, care poate avea o „coadă” și în regiunea unor tensiuni mici negative, *regiunea liniară* în care avem o relație „ohmică” între  $I_a$  și  $U_a$  și ultima porțiune, *zona de saturație*, în care intensitatea curentului rămîne practic constantă. Regiunea inițială, care poate să se situeze chiar în partea negativă a tensiunii anodice, corespunde situației în care pot să ajungă pe placă electroni chiar cînd tensiunea pe aceasta este zero, sau chiar ușor negativă, deoarece în norul de electroni din jurul catodului există unii care au o viteză (deci energie cinetică) suficientă pentru a învinge repulsia electrostatică exercitată de anodul negativ. Regiunea liniară corespunde situației în care numărul de electroni smulși din norul de termoelectroni și dirijat spre anod este proporțional cu tensiunea aplicată.

În sfîrșit, regiunea de saturație corespunde situației în care s-a ajuns la o asemenea valoare a intensității cîmpului între catod și anod, încît toți electronii emiși în unitatea de timp sînt colectați de anod, sarcina spațială din jurul lui  $C$  fiind astfel lichidată. Pentru a obține o creștere a valorii curentului de saturație, trebuie mărită tensiunea de încălzire a filamentului, deci



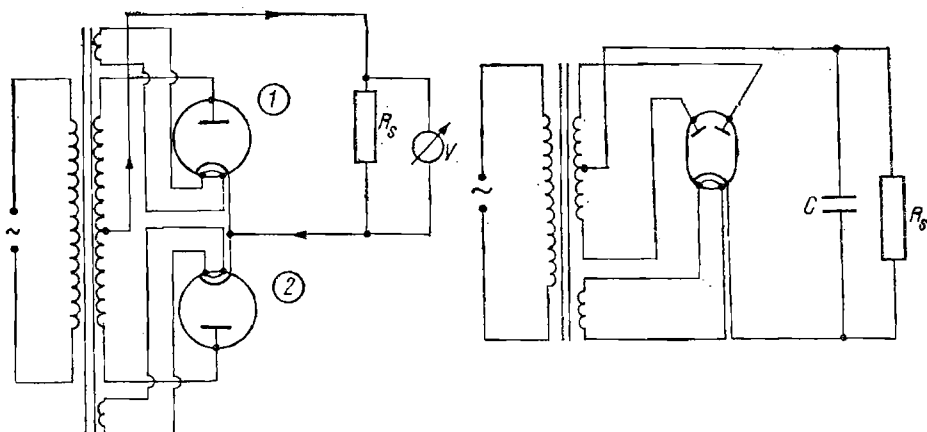


Fig. III.6.4

temperatura  $T$  a catodului, ceea ce va duce, conform relației Richards on-Dushman, la o creștere a densității curentului termoelectronic.

Modul de funcționare al diodei ne indică imediat posibilitatea transformării curentului alternativ în curent pulsant, adică utilizarea diodei ca redresor. Dacă vom avea o singură diodă alimentată în circuitul ei anodic cu o tensiune alternativă, atunci ea va „lăsa” să treacă curent numai în alternanța în care placa este pozitivă. În cealaltă alternanță curentul va fi nul. Se obține astfel un curent pulsant. Într-o astfel de situație se pierde jumătate din energia electrică. Pentru ca eficiența să fie maximă, deci pentru a redresa și cea de-a doua alternanță, se montează două diode într-un circuit, în așa fel încît pe plăcile lor să fie aplicată o tensiune alternativă luată de pe secundarul unui transformator (fig. III.6.4a). Tot de la acest transformator luăm și tensiunile necesare încălzirii filamentelor. Tensiunea redresată o „culegem” de pe o rezistență montată în circuitul celor două plăci, numită și rezistență de sarcină ( $R_s$ ). În aceste condiții sînt redresate ambele alternanțe, dar folosim două diode. Pentru simplificarea și ieftinirea montajului, se folosește o *diodă dublă* (fig. III.6.4b), un tub în care există un singur catod și două plăci (doi anodi).

Tensiunea redresată este „culeasă” între catod și mijlocul secundarului ce alimentează plăcile. Pentru a înțelege acest lucru să urmărim mersul electronilor în dioda (1) (fig. III.6.4a). Atunci cînd conduce, anodul fiind la un potențial pozitiv, curentul electronic parcurge drumul C — anod — o parte din înfășurarea secundarului și trece apoi în circuitul exterior. Atunci cînd dioda (2) conduce, curentul electronic parcurge și el o parte din înfășurarea secundarului. Pentru ca cele două pulsuri redresate să fie identice (adică să aibă aceeași amplitudine) în cazul diodelor identice, trebuie ca și drumurile parcurse în secundarul transformatorului să fie identice. Iată de ce punctul de „culegere” a tensiunii este plasat la mijlocul secundarului.

Un alt element introdus în circuitul anodic al unei diode duble (fig. III.6.4b) este condensatorul ( $C$ ) montat în paralel cu  $R_s$ . Care este rolul lui? Fără el, dioda ne-ar da un curent pulsant. Cu ajutorul lui  $C$ , curentul este mai „nete-

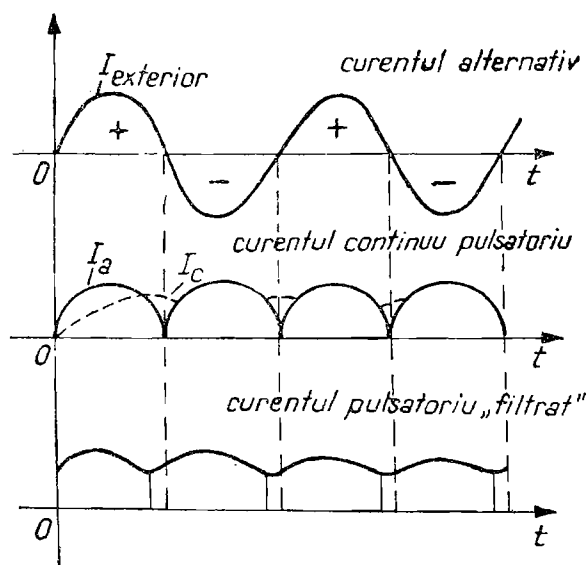


Fig. III.6.5

zit" („filtrat") prin micșorarea pulsațiilor. Această netezire este posibilă dacă ținem seama că într-o pulsație condensatorul se încarcă, iar cînd tensiunea scade, el se descarcă mai lent, astfel că intensitatea curentului anodic arată aproximativ ca în fig. III.6.5 curba inferioară, care se obține dacă ținem seama de mersul curentului de încărcare-descărcare a condensatorului ( $I_c$ ) reprezentat prin linia punctată de pe curba mediană din fig. III.6.5.

b) **Trioda și parametrii ei.** Trioda, sau tubul cu trei electrozi, are plasat un al treilea electrod, *grila*, între placă și catod, care se prezintă sub forma unei site. În schema diodei din fig. III.6.2b, grila este o sită cilindrică plasată între cilindrul catodic și cel anodic. Sita nefiind deasă, introducerea ei nu împiedică mersul electronilor, dar le poate influența viteza aplicînd un potențial pe ea. Astfel se poate exercita un control mai eficient asupra curentului anodic, grila fiind mai aproape de catod. În acest fel, apare un circuit suplimentar față de cel existent la diodă, *circuitul de grilă*. Pentru o temperatură fixă a catodului, poate fi studiată dependența curentului anodic  $I_a$  de tensiunea pe grilă  $U_g$ , cu ajutorul unui montaj de tipul celui din fig. III.6.6a. Pentru diferite valori ale tensiunii anodice  $U_a$  se obțin diferite curbe  $I_a(U_g)$  (fig. III.6.6b). În fig. III.6.6a bateria de grilă  $B_g$  este legată la catod prin intermediul unei prize mediane. Această legătură permite ca grila să fie negativă sau pozitivă în raport cu catodul, în funcție de poziția cursorului potențiometrului  $P_2$ . În aceeași figură am introdus instrumentele de măsură precum și o rezistență de sarcină, în circuitul anodului, la bornele căreia este culeasă o tensiune  $U_s$ . Pentru o tensiune  $U_a$  fixată, caracteristica tensiune-curent a unei triode poate fi înțeleasă ușor, dacă ținem seama de cea a diodei. Trioda funcționează și cu grila negativă, pînă la anumite valori ale tensiunii la care intensitatea cîmpului electric atractiv al anodului, în dreptul catodului, este mai mare sau cel mult egală cu intensitatea cîmpului repulsiv al grilei. Cînd acesta din urmă este dominant, trioda se blochează. Cînd tensiunea anodică

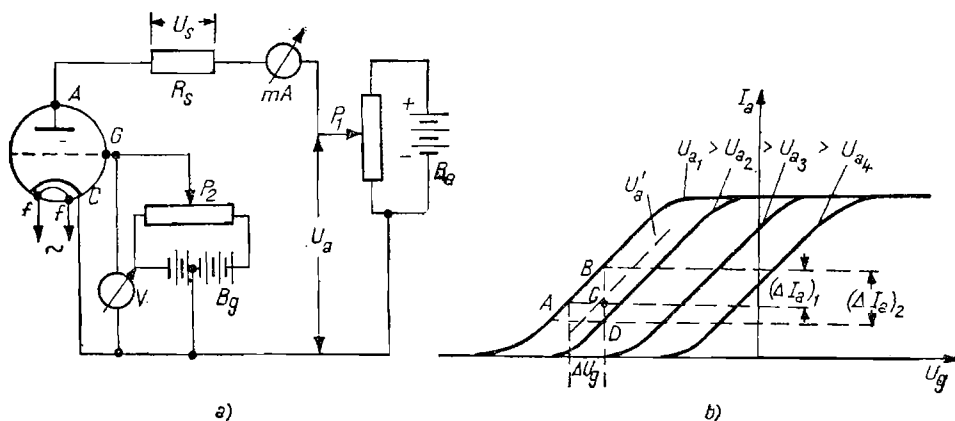


Fig. III.6.6

este suficient de mare, se poate atinge saturația chiar în regim negativ a grilei. Trebuie menționată însă o diferență esențială. Grila negativă are acțiune de frînare asupra electronilor pe spațiul  $C - G$ , dar devine un factor de accelerare pe spațiul  $G - A$ , acțiunile grilei pozitive fiind inverse. Un dezavantaj esențial al grilei pozitive îl prezintă *curentul de grilă*, care apare prin captarea de electroni din drumul lor, dacă are un potențial pozitiv față de catod. Acest curent poate provoca perturbații în funcționarea tubului și de aceea de obicei se folosesc montaje electronice cu grila negativată față de catod.

Pentru caracterizarea triodelor, în tabele, pe lângă tensiunea de încălzire a filamentului, sînt date și unele valori ale parametrilor triodei: *panta*  $S$ , *factorul de amplificare*  $\mu$  și *rezistența internă*  $R_i$ .

*Panta*  $S$  arată cît de abruptă este porțiunea liniară a caracteristicii și este definită prin intermediul coeficientului unghiular al unei drepte pentru  $U_a = \text{const.}$ :

$$S = \frac{(\Delta I_a)_1}{(\Delta U_g)} \quad (6.4)$$

unde  $\Delta I_a$  reprezintă variația curentului anodic cînd tensiunea pe grilă s-a modificat cu  $\Delta U_g$ .

*Factorul de amplificare* este definit pentru  $I_a = \text{const.}$  și arată care ar fi variația  $\Delta U_a$  a tensiunii anodice care ar produce o variație de curent  $\Delta I_a$  echivalentă cu cea produsă de o variație  $\Delta U_g$  indicată anterior. Pe desenul din fig. III. 6.6b s-ar obține același  $(\Delta I_a)_1$  dacă am trece de la o tensiune anodică  $U_{a1}$ , corespunzătoare punctului  $B$ , la una  $U'_a$ , corespunzătoare punctului  $C$ :  $U_{a1} - U'_a = \Delta U_a$ . Raportul  $\mu = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}$  definește factorul de amplificare și ne arată indirect cît de mari sînt variațiile tensiunii ce pot fi „culese” pe o rezistență de sarcină  $R_s$ , dacă apar variații ale tensiunii pe grilă. Într-adevăr, cum  $U_s = I_a R_s$ , obținem ușor:

$$\Delta U_s = R_s \Delta I_a = R_s S \Delta U_g = R_s \frac{S}{\mu} \Delta U_a. \quad (6.5)$$

Deci  $\Delta U_s$  este proporțional cu  $\Delta U_a$  și prin urmare și cu  $\Delta U_g$ .

Rezistența internă caracterizează tubul din punctul de vedere al comportării lui ca un rezistor și este definit printr-o relație analogă legii lui Ohm:

$$R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}. \quad (6.6)$$

Un punct de pe caracteristica tensiune-curent reprezintă un *punct de funcționare*. Relația (6.6) definește o *rezistență dinamică* pentru că este egală cu raportul variațiilor tensiunii și curentului anodic, în timp ce legea lui Ohm definește *rezistența statică* prin raportul dintre tensiune și curentul anodic corespunzător unui punct de funcționare.

În condițiile din fig. III.6.6b,  $R_i = \frac{U_{a1} - U_a}{(\Delta I_a)_1} = \frac{U_{a1} - U_{a2}}{(\Delta I_a)_2} = \dots$ . Între cei trei parametri se poate stabili ușor relația:

$$\mu = S R_i, \quad (6.7)$$

care ne arată că se poate obține o amplificare cu atît mai mare cu cît rezistența internă și panta sînt mai mari. O creștere a amplificării atrage însă după sine o scădere a intensității curentului anodic.

În practică, tensiunile anodice sînt de ordinul a 100–300 V, tensiunile negative pe grilă merg de la zero la –50 V, iar curenții de saturație ating cîteva zeci de miliamperi. Rezistența internă atinge valori de zeci de k $\Omega$ , iar factorul de amplificare variază între 10 și 100.

c) **Trioda ca amplificator de tensiune.** Pentru a înțelege funcționarea triodei ca amplificator sîm montăm în circuitul grilei negative un circuit oscilant cu condensatorul variabil, pe care-l putem acorda cu diferite circuite oscilante cuplate (fig. III.6.7a). La rezonanță, sînt induse oscilații în circuitul ( $L_2 C_2$ ) care, suprapunîndu-se peste tensiunea  $U_g$  a grilei, vor produce oscilații ale ei cu frecvența  $\nu$ :  $U_g(t) = U_g + U_m \sin \omega t$  (fig. III.6.7b). Acestor variații, pentru  $U_a = \text{constant}$ , le vor corespunde variații ale curentului anodic între

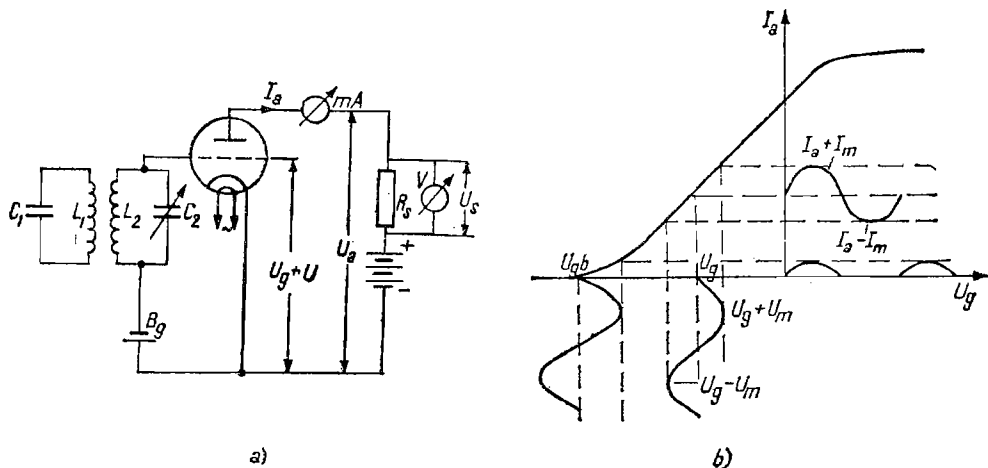


Fig. III.6.7

limitele ( $I_a + I_m$ ) și ( $I_n - I_m$ ), care vor provoca la rîndul lor oscilații ale tensiunii „culese” pe rezistența de sarcină între limitele ( $U_s + U_m$ ). Variațiile  $\Delta U_s = 2U'_m$  sînt amplificate față de cele ale tensiunii pe grilă  $\Delta U_g = 2U_m$ .

Pentru ca o triodă să funcționeze ca amplificator, punctul de funcționare este în porțiunea liniară\*, cu grila negativă, astfel plasat încît variațiile lui  $I_n$  să fie simetrice. Pentru a crește amplificarea, ne putem gândi să folosim încă o triodă pe grila căreia să intre semnalul amplificat de prima. Am obținut astfel un amplificator cu două etaje. Teoretic, coeficientul de amplificare total ar fi dat de raportul dintre variațiile tensiunii anodice pe tubul secund  $(\Delta U_a)_2$  și variațiile tensiunii grilei primului tub:

$$\mu = \frac{(\Delta U_a)_2}{(\Delta U_g)_1} = \frac{(\Delta U_a)_1}{(\Delta U_g)_1} \cdot \frac{(\Delta U_a)_2}{(\Delta U_g)_2} = \mu_1 \cdot \mu_2. \quad (6.8)$$

Relația a fost dedusă în ipoteza că întreaga variație  $(\Delta U_a)_1$  a fost transmisă tubului secund:  $(\Delta U_g)_2 = (\Delta U_a)_1$ , ceea ce constituie evident o idealizare. Prin montarea mai multor etaje pot fi obținuți factori de amplificare mai mari de  $10^3$ . Construcția „amplificatorului” discutat este însă prea greoaie și neeconomică deoarece conține multe baterii și surse de alimentare a filamentelor (fig. III.6.8a). De aceea, în practică se folosește un număr minim de baterii de alimentare. În primul rînd, vom renunța la bateriile anodice și de grilă folosind o tensiune obținută prin redresarea tensiunii dată de secundarul unui transformator, cu o dublă diodă. Am obținut astfel înalta tensiune (IT), necesară pozitivării anozilor. În montajele electronice toate punctele de alimentare cu polarizare negativă sînt legate la un conductor comun, numit „masă” instrumentului, cele pozitive fiind legate la un alt conductor. Încălzirea filamentelor se face prin legarea lor la o înfășurare a secundarului transformatorului, care dă o tensiune mică (6,3 V este tensiunea standard pentru majoritatea tuburilor).

Cum realizăm negativarea grilei? Se folosește un montaj ingenios în care este utilizată căderea de tensiune pe o rezistență, produsă de curentul anodic. Fie o rezistență  $R$  montată în circuitul anod-catod (fig. III.6.8b). La bornele ei se măsoară o cădere de tensiune  $I_a R$ , ceea ce înseamnă că pentru a avea o curgere de electroni între cele două capete trebuie ca cel legat la anod să fie mai negativ decît cel legat la catod. Dacă vom lega deci grila la punctul de intrare a curentului anodic în rezistența  $R$ , atunci ea se va afla la un potențial negativ față de catod. Această concluzie iese mai direct în evidență folosind legea a doua a lui Kirchhoff pentru ochiul catod-anod-baterie anodică —  $R$  — catod: suma căderilor de tensiune pe tub și pe  $R$  este egală cu tensiunea la bornele bateriei anodice. Aceasta ne arată că pe rezistența  $R$  curentul trece spre anod, deci capătul respectiv este negativ în raport cu catodul. În fig. III.6.8b este montat și un condensator  $C$  în paralel cu rezistența  $R$ . Rolul lui iese în evidență dacă ținem seama de oscilațiile curentului anodic în timpul amplificării, oscilații care ar provoca oscilații ale tensiunii grilei. Condensatorul are deci misiunea de a atenua aceste oscilații, deci de a menține tensiunea de grilă la o valoare constantă. Ansamblul

---

\* Amplificator de clasă A. Dacă punctul de funcționare se află în regiunea neliniară avem de-a face cu un amplificator de clasă B, iar cînd se află în punctul de tăiere al caracteristicii avem un amplificator de clasă C.

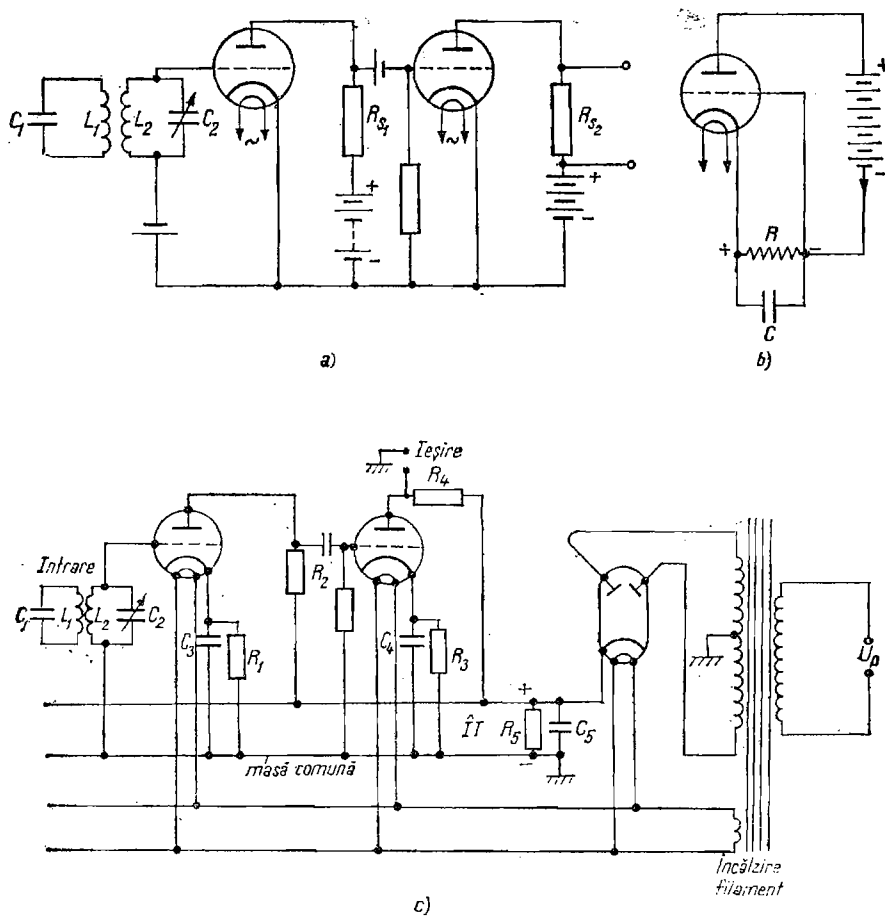


Fig. III.6.8

RC din fig. III.6.8b se numește *circuit de negativare a grilei*. Ipoteticul nostru amplificator cu două etaje ar arăta acum ca în fig. III.6.8c.

d) **Trioda ca detector (amplificator de clasă C).** Acțiunea de detecție poate fi ușor înțeleasă dacă urmărim variațiile curentului anodic prin mutarea punctului de funcționare spre „coada” caracteristicii (fig. III.6.7b). Apropiindu-ne de punctul de blocare, variațiile  $\Delta I_a$  devin asimetrice, iar când punctul de funcționare coincide cu tensiunea de blocare ( $U_{gb}$ ), atunci trioda nu mai lasă să treacă decît o alternanță.

Odată cu detecția are loc și o amplificare. Pentru a redresa ambele alternanțe ne putem imagina și aici folosirea a doi anodi, obținînd astfel o *dublă triodă*.

e) **Trioda ca generator de oscilații întreținute.** Modul de generare a oscilațiilor poate fi înțeles examinînd mersul curenților într-un montaj numit *heterodină*, care astăzi nu mai este folosit curent (fig. III.6.9.). Am folosit

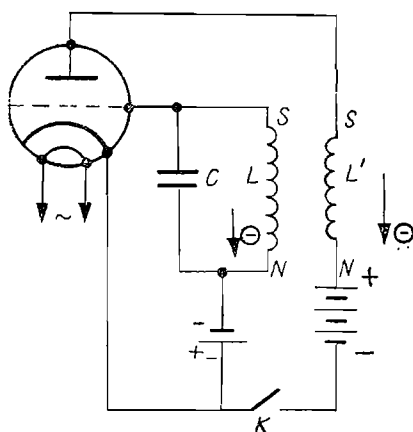


Fig. III.6.9

pentru simplificarea discuției tot alimentarea cu baterii. Se vede că a fost introdus un circuit oscilant  $LC$  în circuitul grilei și o bobină  $L'$  în circuitul anodic, cuplată inductiv cu  $L$ . Să presupunem că stabilim curentul prin închiderea întrerupătorului  $K$ . În circuitul anodic curentul crește rapid de la zero la o valoare oarecare, ceea ce va duce la o variație a cîmpului magnetic generat de  $L'$ , deci în bobina  $L$  a circuitului oscilant va fi indus un curent, deoarece cele două bobine sînt cuplate magnetic. Acest curent, care tinde să se opună creșterii fluxului magnetic în  $L'$ , crește pînă cînd se atinge saturația, ceea ce duce la stingerea curentului indus în  $L$ . Saturația este atinsă cînd grila este pozitivă. În faza aceasta, intră în acțiune condensatorul  $C$ , care a fost încărcat cu electronii măturați de pe grilă: se descarcă prin bobina  $L$  și renegativizează grila treptat. Din acest motiv, are loc o scădere a curentului anodic, iar curentul prin  $L$  crește, deoarece tinde să se opună scăderilor lui  $I_a$ , avînd ca efect negativarea tot mai pronunțată a grilei pînă cînd curentul anodic ajunge la zero. Între timp condensatorul s-a descărcat și s-a reîncărcat în sens invers, așa că atunci cînd curentul prin  $L$  devine zero, el se descarcă din nou și începe deblocarea tubului, procesul repetîndu-se. Deci, în circuitul  $LC$  apar oscilații care sînt transmise bobinei  $L'$  sub forma oscilațiilor curentului anodic.

f) **Tetroda** este un tub cu patru electrozi, cel de-al patrulea fiind tot o grilă montată între grila triodei și anod. Acest electrod se numește *grilă-ecran*. Pentru a înțelege rolul ei, să revenim la schema oscilatorului. Acțiunea inductivă pe care o exercită bobina  $L$  din circuitul plăcii asupra celei din circuitul grilei reflectă acțiunea circuitului de ieșire asupra celui de intrare și se numește *reacție*. Ținînd seama de exercitarea funcției de amplificare, curenții din  $L'$  vor servi la inducerea de noi tensiuni în bobina  $L$ , care vor amplifica pe cei din  $L'$  ș.a.m.d. Reacția are deci un efect favorabil asupra amplificării, efectul fiind limitat de pierderile prin efect Joule. Reacția are însă și efecte nedorite, deoarece poate duce la oscilații în tubul amplificator în care semnalul de amplificat este introdus pe grilă. În afara cuplajului inductiv, între cele două circuite mai pot apărea și capacități parazite între conduc-

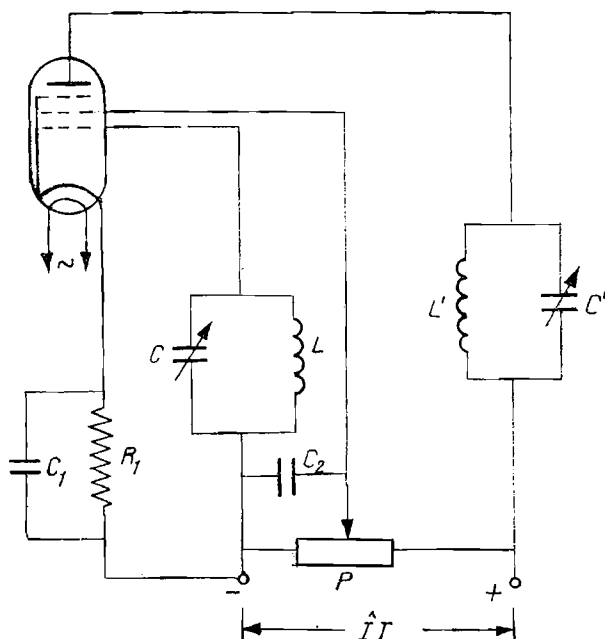


Fig. III.6.10

torii legați de grilă și placă, de care nu se poate scăpa oricât i-am îndepărtat. O altă capacitate, care poate perturba funcționarea stabilă a unei triode ca amplificator este capacitatea dintre grilă și placă. Pentru a elimina capacitățile parazite, remediul cel mai bun îl constituie blindajul, adică închiderea bobinelor în blindaje metalice. Un rol analog îl joacă grila-ecran, „izolind” grila de placă. Ea este pusă la un potențial pozitiv egal cu aproximativ jumătate din potențialul plăcii.

g) **Pentoda.** Introducerea grilei-ecran conduce însă la întărirea unui fenomen nedorit, acela al *emisiei secundare*. Emisia secundară constă din smulgerea de electroni din anod prin bombardarea lui cu electroni care vin de la grilă. Și într-o triodă sînt generați electroni secundari, dar datorită spațiului mare  $A - G$ , aceștia sînt frînați și în cele din urmă revin pe anod. În tetrodă, grila  $GE$ , pozitivă, fiind aproape de anod, poate capta electronii emisiei secundare, ceea ce are ca efect micșorarea curentului de placă. Pentru a suprima emisia secundară se introduce o altă grilă, *grila supresoare*  $GS$ , cu ochiuri largi, plasată între grila-ecran și anod. Ea este pusă de obicei la potențialul catodului. Aceasta se realizează fie prin legarea ei în circuitul exterior la catod, fie prin unirea cu catodul, direct prin construcție. Modul de dispunere a electrozilor unei pentode ca și montajul acesteia într-un etaj de amplificare este redat în fig. III.6.10. Potentiometrul  $P$  servește la fixarea grilei-ecran la un potențial pozitiv față de catod; circuitul oscilant  $L'C'$  din circuitul anodic servește la transmiterea oscilațiilor etajului următor. În figură mai este desenat un condensator  $C_2$  între grilă și grila-ecran. Rolul său poate fi înțeles dacă ținem seama de reactanța condensatorului,  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ . O componentă



continuu ( $\omega = 0$ ), implică o reactanță infinită ( $X_C = \infty$ ) din partea condensatorului; în schimb, o componentă oscilantă de înaltă frecvență (î.f.) întâmpină o reactanță mică. În felul acesta, electronii circuitului de î.f. care s-ar opri pe grila-ecran se vor scurge prin intermediul lui  $C_2$  la grilă și vor fi readuși în circuitul principal.  $C_2$  are astfel rolul de a menține tensiunea pe grilă constantă, curenții variabili scurgându-se la pământ.

### 6.3. EMISIA ȘI RECEPȚIA UNDELOR RADIO

a) **Introducere.** Într-un circuit oscilant închis, oscilațiile pot fi amortizate sau întreținute, dacă va fi consumată energie în mod continuu. Un mod de a întreține oscilațiile îl constituie montarea unui asemenea circuit oscilant în circuitul grilei unei triode. Pentru a transmite energie în spațiu este nevoie de o *antena* care este de fapt un *circuit oscilant deschis*. Pentru a înțelege acest aspect să ne reamintim faptul că un cuplaj între două circuite oscilante era posibil prin intermediul câmpurilor magnetice variabile care induceau curenții în bobinele alăturate. Dacă circuitul oscilant în care se produc oscilațiile este departe de circuitul de recepție (circuitul este slab cuplat) atunci oscilațiile induse sînt foarte slabe. Să presupunem că îndepărtăm plăcile condensatorului puțin câte puțin. În această situație liniile câmpului electric capătă o dispersie din ce în ce mai mare în spațiu, iar dacă le-am aduce tot paralel, dar în linie dreaptă, atunci am obține o *antena*, cu liniile câmpului electric uniform distribuite în jurul ei. Dacă punem placa inferioară la pământ (fig. III.6.11), atunci liniile câmpului electric se închid între vîrf și pămînt, unele dintre ele parcurgînd distanțe enorme. Cum câmpul electric este oscilant în timp, el va da naștere, în jurul lui, unui câmp magnetic tot oscilant, apărînd

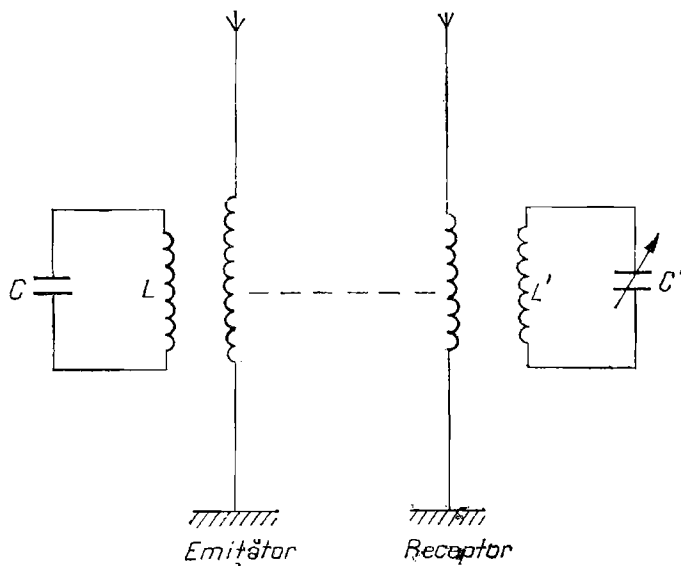


Fig. III.6.11

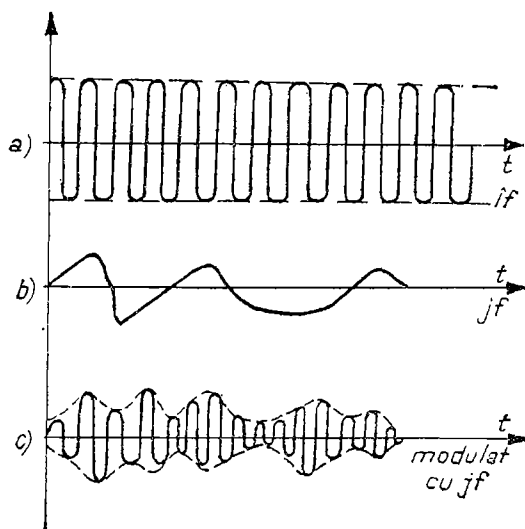


Fig. III.6.12

astfel o undă electromagnetică a cărei lungime de undă este  $\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}$ . Deci postul de emisie va fi, schematic, un circuit oscilant cuplat inductiv cu bobina unei antene care radiază în spațiu unde electromagnetice. La recepție avem de-a face tot cu o antenă care, prin cuplaj inductiv, transmite oscilațiile unui circuit oscilant montat la intrarea în aparatul de recepție. Este evident că antena va recepționa toate oscilațiile, dar prin acordarea aparatului receptor se vor prinde selectiv numai undele a căror frecvență coincide cu frecvența proprie a circuitului de intrare.

b) **Emisia radiofonică** constă însă din transmiterea oscilațiilor sonore. Un circuit oscilant cuplat cu antena ar expedia în spațiu doar un tren de oscilații periodice de î.f. cu amplitudine constantă (fig. III.6.12a). Pentru a transmite și oscilațiile de joasă frecvență (j.f.), în circuitul grilei se cuplează microfonul, care transformă oscilațiile membranei în oscilații neregulate ale tensiunii grilei oscilatorului. Deci în locul unor oscilații întreținute de î.f. cu amplitudine egală, vom avea de-a face cu oscilații de amplitudine variabilă, sau cum se spune, curentul de înaltă frecvență este „modulat” de oscilațiile de j.f. (fig. III.6.12b). Schema unui „post” de emisie cu pentodă este redată în fig. III.6.13.

În circuitul oscilant, montat în circuitul grilei iau naștere oscilații de î.f. neamortizate. Peste ele se suprapun oscilațiile neregulate date de microfon, astfel că oscilațiile de î.f. sînt *modulate* de oscilațiile de j.f. ale curentului microfonic. Aceste oscilații sînt transmise antenei prin cuplaj inductiv. În circuitul antenei este montat de asemenea un condensator variabil care asigură reglarea ei.

c) **Recepția undelor radio.** Să urmărim, pe scurt, fenomenele care au loc într-un receptor: recepția undei printr-o antenă, amplificarea semnalului de î.f. recepționat, detecția, separarea componentei de î.f. de componenta de j.f., amplificarea ultimei componente și redarea ei într-un difuzor (fig. III.6.14).

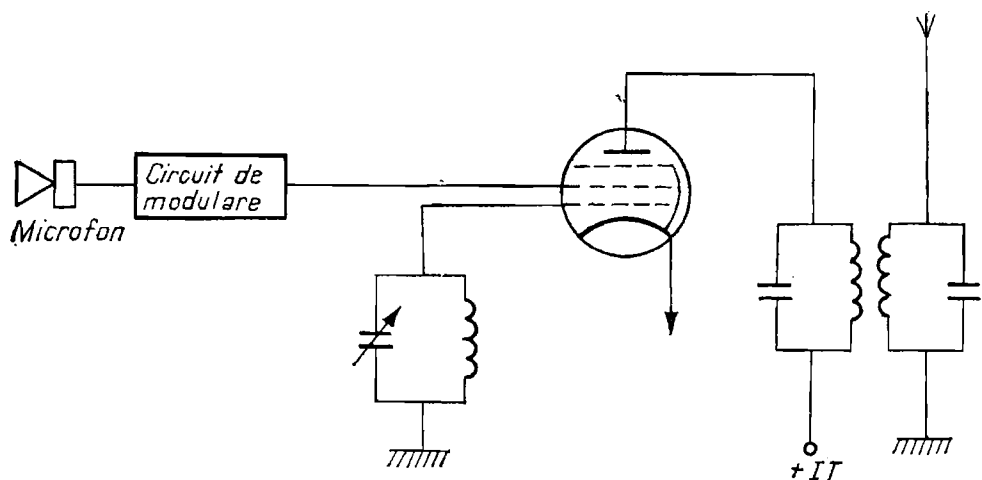


Fig. III 6.13

Așa cum am enumerat aceste operații este necesar un transfer al oscilațiilor de la un etaj la altul, transfer care se face prin cuplaj inductiv și nu prin „culegere” de pe o rezistență de sarcină ca în fig. III. 6.8a. Un cuplaj inductiv sau prin transformator este ilustrat în fig. III.6.15. Se vede că oscilațiile curentului anodic din primul tub, produse de oscilațiile introduse pe grila lui, sînt transmise, prin cuplaj inductiv, pe grila celui de-al doilea tub, semnalul final de ieșire fiind „cules” din circuitul anodic al celui de-al doilea tub. Transformatoarele diferă în funcție de domeniul frecvențelor în care se lucrează. Pentru frecvențe înalte, cînd pierderile prin curenți Foucault ar fi apreciable chiar în transformatoare cu tole, se renunță la miezul feromagnetic, utilizîndu-se fie pulbere feromagnetică dispersată într-o masă izolantă, fie miezuri din ferite care au rezistivitate mare. Să presupunem acum că avem semnalul (i.f.) amplificat. Acesta trebuie detectat și trebuie separată din el

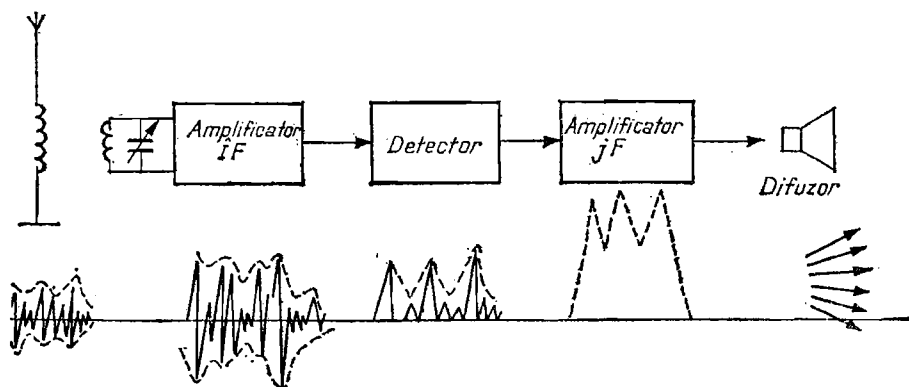


Fig. III.6.14

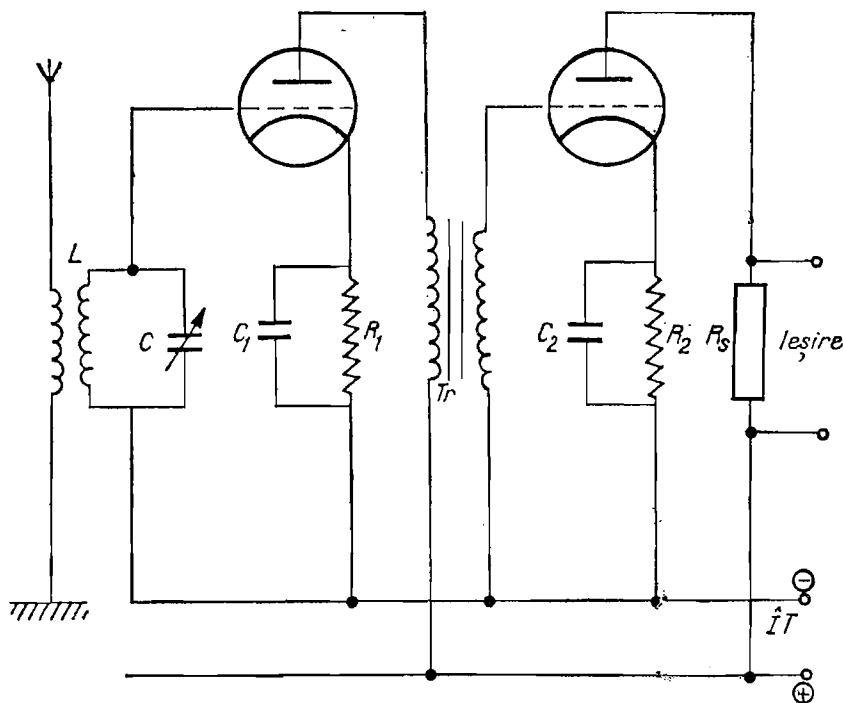


Fig. III.6.15

componenta de j.f. Operația se poate realiza, într-un caz simplificat, cu ajutorul unei triode care face detecția pe grilă, dar cu circuitul anodic modificat ca în fig. III.6.16. În primul rând, trebuie observată apariția în circuitul grilei a unui circuit  $R_2C_2$  care are rolul de a amplifica componenta de j.f. în felul următor: condensatorul  $C_2$  prezintă o reactanță mare pentru componenta de j.f. ( $\omega$  mic), deci pe rezistența  $R_2$  vom avea o cădere de tensiune între grilă și catod, ceea ce va face să crească semnalul de la intrare pentru această componentă. În continuare, curentul anodic detectat este separat în cele două componente la o bifurcație, într-una fiind montată o capacitate variabilă  $C_4$ , care prezintă o reactanță mică pentru î.f., care trece apoi prin  $L'$  la „masă”. Trecând prin  $L'$  se produce o reacție favorabilă asupra circuitului oscilant  $LC_3$ . Separarea componentei de î.f. de cea de j.f. este ușurată de bobina de „oprire”  $L$  care îi opune o reactanță ( $\omega L$ ) mare. Componenta de j.f. trece apoi spre casca telefonică sau, dacă este amplificată, spre un difuzor. În paralel cu casca este legat un alt condensator  $C_5$ , care, în cazul existenței unei componente de î.f. slabă, îi favorizează scurgerea.

Cum ar arăta acum un receptor avansat. O schemă de principiu poate fi urmărită în fig. III.6.17 în care sînt folosite trei pentode. Primele două etaje de amplificare sînt pentru î.f.: ( $A_{i.f.}^{(1)}$  și  $A_{i.f.}^{(2)}$ ). Receptorul are deci două etaje de amplificare în î.f., detecția pe o diodă și două etaje de amplificare pentru j.f. Pe schemă nu sînt trecute în detaliu circuitele de alimentare, cele de polarizare a grilei și modul de alimentare a grilei-ecran. Cititorul poate acum să

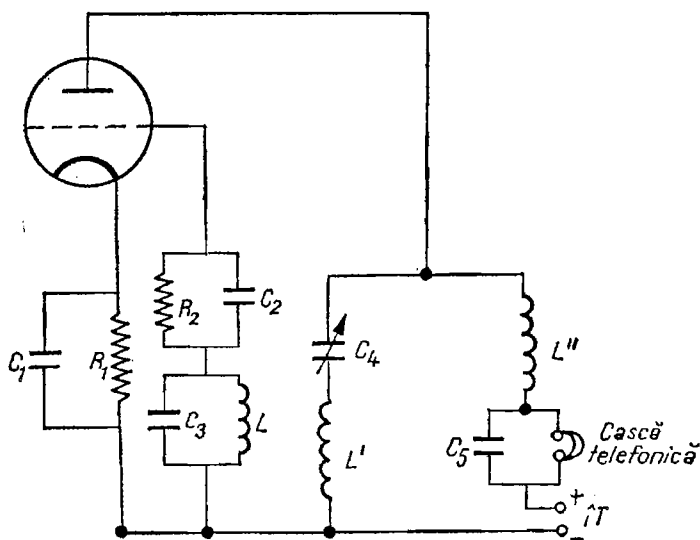


Fig. III.6.16

vădă semnificația tuturor elementelor. Sînt necesare unele mici precizări. În primul rînd, punctele negative au fost legate la „pămînt”, indicînd astfel că ele sînt toate în legătură. În al doilea rînd, transferul de la dioda detectoare la trioda din primul etaj de amplificare pentru j.f. ( $A_{jf}^{(1)}$ ) se face prin intermediul unui circuit RC pentru a separa componenta de j.f. de cea de î.f. În sfîrșit, cuplajul între cele două etaje de amplificare pentru j.f. se face prin rezistențe și capacități, deoarece prin capacitate avem aceeași componentă de j.f., iar cea de înaltă frecvență care ar mai trece, se scurge prin rezistența din circuitul anodic al triodei.

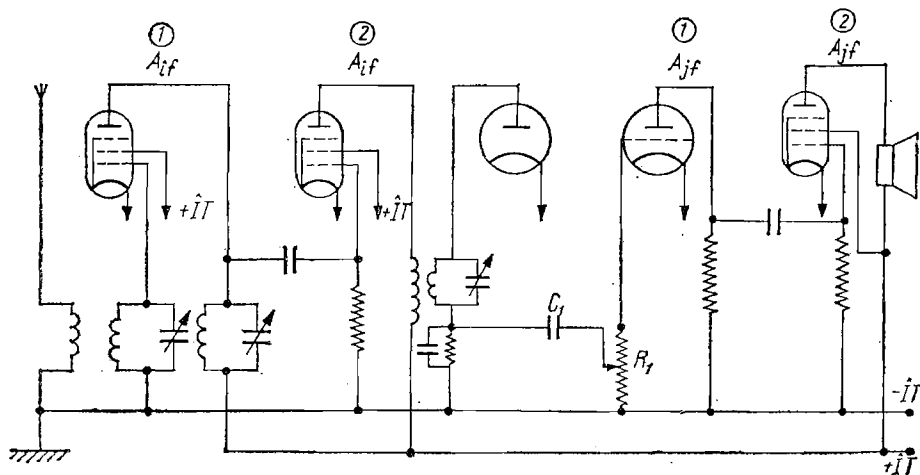


Fig. III.6.17

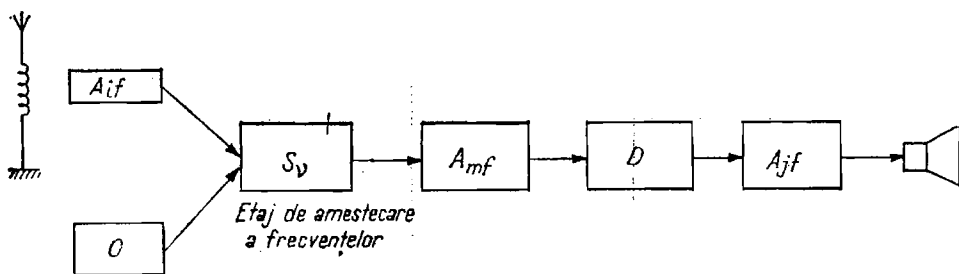


Fig. III.6.18

d) **Principiul superheterodinei.** Receptoarele radio moderne sînt de tip superheterodină, a căror schemă bloc este redată în fig. III.6.18. În receptor intră pe o cale semnalul de î.f. recepționat de la antenă, și amplificat ( $A_{if}$ ). Peste acesta se suprapun, într-un etaj numit *schimbător de frecvență*  $S_v$ , oscilațiile produse de un oscilator  $O$  montat în aparat, a cărui frecvență este reglabilă, dar apropiată de înalta frecvență. „Amestecul” celor două oscilații duce la un fenomen de „bătăi”, de frecvență egală cu diferența și suma frecvențelor celor două semnale. Diferența, în general de ordinul a 400 kHz, este numită și *medie frecvență* (m.f.). Urmează apoi căile obișnuite: amplificator de m. f. ( $A_{mf}$ ), detector ( $D$ ), amplificator de j.f. ( $A_{jf}$ ) și, în sfîrșit, *difuzorul*. Avantajul esențial al ei constă în faptul că este mai ușor de amplificat curentul de medie frecvență pentru că are o frecvență fixă (în etajul de amestec oscilatorul de frecvență variabilă trimite o astfel de tensiune încît diferența frecvențelor să rămînă constantă).

#### 6.4. OSCILOGRAFUL CATODIC ȘI UNELE APLICAȚII

Oscilograful este unul din instrumentele de mare utilitate în laboratorul de cercetări (studiul curenților alternativi) sau în sfera multor aplicații practice (televiziune, radar etc.). El folosește deviația unui fascicul de electroni sub acțiunea cîmpului electric la trecerea printre plăcile unor condensatori (*deflecție electrică*) sau sub acțiunea cîmpurilor magnetice (*deflecție magnetică*). După modul de urmărire a fasciculului pe ecranul fluorescent, avem de-a face cu un *oscilograf* dacă se utilizează fotografierea sau filmarea, sau cu un *osciloscop* dacă fenomenul este urmărit pe cale vizuală. Partea principală a unui astfel de aparat o constituie tubul catodic (fig. III.6.19), un tub de sticlă vidat în care la un capăt sînt emiși termoelectroni dintr-un „tun” electronic sub forma unui fascicul îngust. În drumul spre ecranul fluorescent fasciculul trece prin elementele de deflecție, care, de obicei, sînt două perechi de condensatori montate perpendicular unele față de altele. Pentru a obține un fascicul îngust, emițătorul, care nu diferă de catodul cu încălzire indirectă al unei triode, este montat în interiorul unui cilindru metalic pus la o tensiune negativă, astfel că electronii ies printr-un orificiu mic și se îndreaptă spre o grilă care poate modifica intensitatea fasciculului. Între grilă și plăcile de deflecție se află plasați doi cilindri de accelerare, puși la un *potențial pozitiv*.

Cum se studiază un semnal alternativ? Dacă avem un semnal de studiat, atunci plăcile verticale, care dau deviații pe orizontală ( $x$ ) sînt puse la o

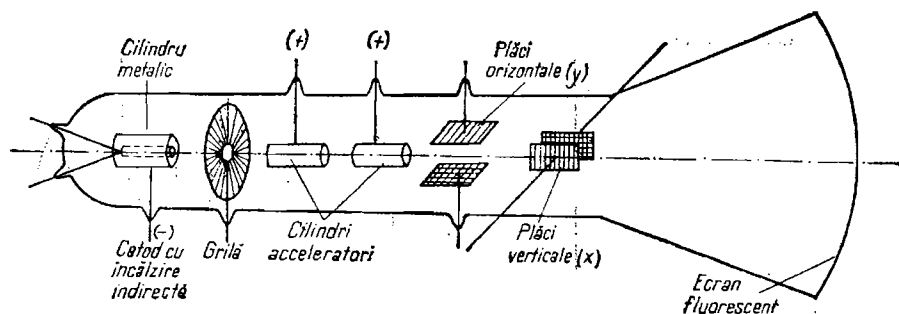


Fig. III.6.19

tensiune alternativă de frecvență reglabilă, produsă de un oscilator intern, numit *oscilator de baleiaj*. Tensiunea de baleiaj „plimbă” fasciculul electronic pe orizontală, astfel că la frecvențe mai mari de 10 Hz, apare pe ecran o linie laminoasă (pe care o putem deplasa în sus și în jos). Semnalul de studiat este aplicat direct pe plăcile orizontale, care dau deviația pe verticală ( $y$ ), dacă este suficient de intens; în caz contrar este trecut printr-un amplificator. Cum și pe plăcile orizontale este aplicată o tensiune alternativă, atunci fasciculul electronic suferă și o deviație pe verticală, mișcarea lui fiind rezultanta a două mișcări ale căror viteze sînt perpendiculare. Dacă cele două semnale au aceeași frecvență, atunci se va observa pe ecran „forma” semnalului necunoscut. Dacă se cunosc frecvențele de baleiaj se poate determina frecvența semnalului necunoscut.

O frumoasă aplicație a oscilografului o constituie studiul figurilor Lissajous prin compunerea a două semnale alternative aplicate pe cele două perechi de plăci. Dacă vrem să studiem compunerea a două mișcări cînd au frecvențe egale, sau diferite, se aplică tensiuni alternative pe ambele perechi de plăci, scoțînd din funcțiune oscilatorul de baleiaj. În felul acesta, fasciculul de electroni se va găsi sub acțiunea a două cîmpuri electrice, periodice în timp, perpendiculare.

Un alt exemplu de folosire a osciloscopului o constituie trasarea ciclului de histerzis. Să presupunem că avem un inel feromagnetic pe care bobinăm două înfășurări ca la un transformator (fig. III.6.20). Curentul alternativ din circuitul primar  $I_p = I_{pm} \sin \omega t$  va magnetiza torul, iar în circuitul secundar va apare un curent prin inducție electromagnetică. Fie  $N_p$  și respectiv  $N_s$ , numărul spirelor din cele două circuite, de secțiune  $S$ . Inducția magnetică  $B = B_{\max} \sin \omega t$  produce un flux magnetic variabil în secundar,  $\Phi = N_s SB = N_s SB_0 \sin \omega t$  și deci o tensiune indusă:  $E_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -N_s SB_0 \omega \cos \omega t$ . În fig. 6.20 se observă că pe plăcile verticale se aplică un semnal „cules” de pe un potențiomtru  $P$ , semnal proporțional cu intensitatea  $I_p$ , deci cu  $H$ . În schimb, dacă aplicăm direct pe plăci tensiunea  $E_s$ , care este o funcție cosinusoidală, am reprezenta pe  $\frac{dB}{dt}$  în funcție de  $H$ . De aceea se montează un circuit „integrator”  $RC$ , care schimbă faza tensiunii  $E_s$  cu  $\frac{\pi}{2}$ , deci de la  $\cos \omega t$

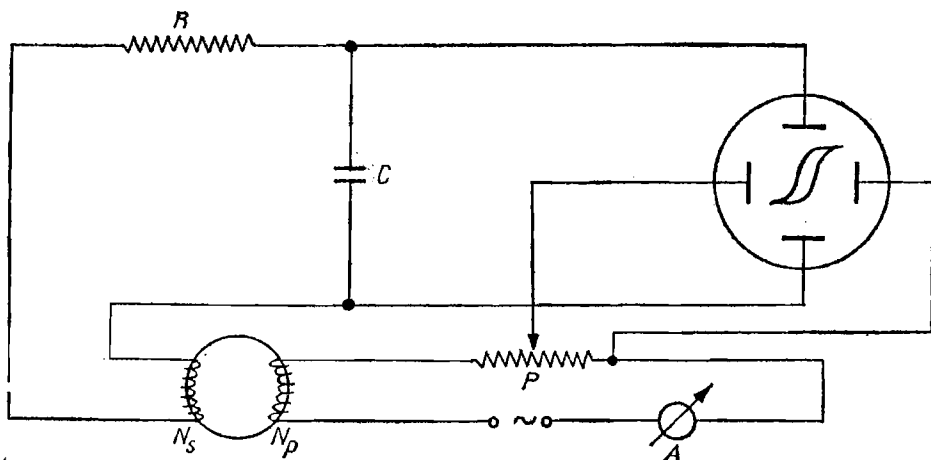


Fig. III.6.20

la  $\sin \omega t$ . Pentru a fi mai expliciți, să pornim de la faptul că pe plăcile orizontale este aplicată tensiunea de la bornele condensatorului:

$$\begin{aligned}
 U &= \int \frac{dQ}{C} = \int_0^t \frac{idt}{C} = \int_0^t \frac{E_s}{RC} dt = \frac{N_s S B_0 \omega}{RC} \int_0^t \cos \omega t dt = \\
 &= \frac{N_s S B_0}{RC} \sin \omega t, \text{ deci } U \sim B.
 \end{aligned}$$

În felul acesta, fasciculul electronic se găsește sub acțiunea simultană a două forțe, una proporțională cu  $H$ , iar alta cu  $B$ , din care cauză el descrie ciclul de *histeresis*. Intervalul de timp dintre două treceri consecutive prin același punct este mai mic de  $(1/10)$  s dacă circuitul este alimentat de la rețeaua de curent alternativ, astfel încît curba apare continuă.

## 6.5. PRINCIPIUL RADIOLOCAȚIEI

Principiul radarului este oarecum simplu. Seamănă, dacă vrei, cu acela al *sonarului*, adică al măsurătorii distanței dintre două corpuri prin intermediul măsurării duratei de timp necesare sunetului să parcurgă distanța dus-întors de la emițător spre corpul de care se reflectă undele sonore. Radarul face același lucru numai că el utilizează, ca semnal de investigație, undele electromagnetice în domeniul undelor radio de lungime de undă mică, numit și *domeniul microundelor*. Un mod simplificat de descriere constă în următoarele: de la un emițător este expediat în spațiu un puls (tren de unde), momentul emisiei lui fiind înregistrat pe un oscilograf. Dacă undele electromagnetice întîlnesc un obiect în spațiu, atunci ele se reflectă și sînt recepționate de aceeași antenă, fiind apoi amplificate și transmise la oscilograf. În felul acesta, alături de pulsul luminos care reprezintă unda emisă, apare un alt



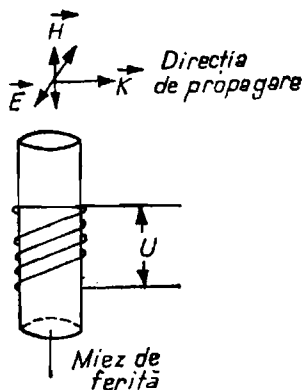


Fig. III.6.21

puls, care reprezintă unda reflectată. Ținând seama că viteza de propagare în aer a undelor electromagnetice ( $c$ ) este mult mai mare decât a obiectelor care se deplasează (tren, avion, rachetă), rezultă rapid distanța radar-obiect:  $d = ct/2$ , unde  $t$  este timpul necesar pentru a parcurge distanța dus-întors.

Se ridică unele probleme speciale, care au fost rezolvate de fizicieni și anume, este vorba pe de o parte, de emisia dirijată, pentru a explora pe rînd diversele regiuni din spațiu, iar pe de altă parte, de separarea semnalului emis de cel reflectat. Primul obiectiv este realizat de *antena direcțională*, iar al doilea de așa-numitele *dispozitive neregiproce*.

*Antena direcțională* este confecționată dintr-o bară cilindrică de ferită pe care este înfășurată o bobină (fig. III.6.21). Ferita respectivă are o permeabilitate magnetică mare și conductibilitate electrică foarte redusă, pentru a micșora pierderile prin curenți turbionari la frecvențe înalte. Prin bara de ferită unda electromagnetică trece numai dacă vectorul cîmp magnetic oscilează în lungul ei, astfel că direcția de propagare este perpendiculară pe antenă. Deci, dacă o astfel de antenă va fi montată la un receptor, semnalul va fi minim dacă antena este dirijată pe direcția emițătorului și maxim dacă va forma un unghi de  $90^\circ$ .

*Dispozitivele neregiproce* sînt construite pe baza efectului Faraday, descoperit cu 100 de ani în urmă. Amintim aici unele noțiuni legate de polarizarea luminii, care vor fi prezentate în detaliu la optică. Într-o undă electromagnetică avem de-a face cu un cîmp electric  $\vec{E}$  oscilant în timp, dispus perpendicular pe cîmpul magnetic  $\vec{H}$  și el variabil în timp, ambii fiind perpendiculari pe direcția de propagare. Planul format de vectorul  $\vec{E}$  și direcția de propagare (o notăm cu  $\vec{K}$ ) se numește plan de polarizare. Atunci cînd există numai o direcție de oscilație a lui  $\vec{E}$ , respectiv  $\vec{H}$ , lumina respectivă este *polarizată liniar*.

Efectul Faraday constă în rotirea planului de polarizare a luminii polarizate, la trecerea printr-o sticlă. În cazul acesta însă, sticlele sînt nemagnetice. Un efect analog poate fi obținut la trecerea luminii prin substanțe magnetizate. Efectul poate fi înțeles făcînd analogia cu orientarea unei bare magnetice

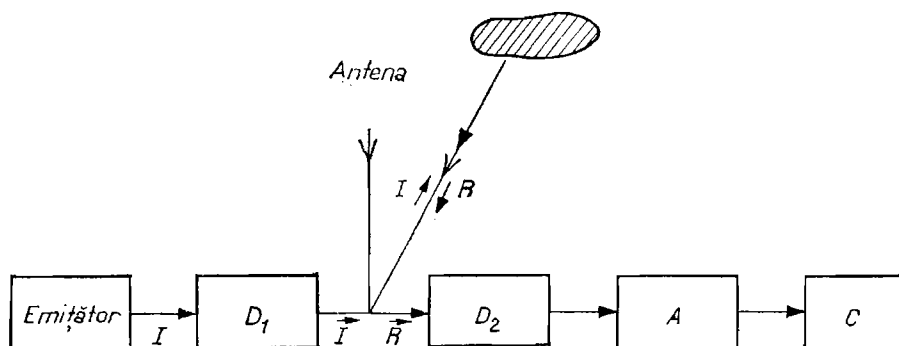


Fig. III.6.22

într-un câmp magnetic după tangenta la liniile de câmp. Ne putem imagina că o asemenea interacțiune există între câmpul magnetic al undei și inducția magnetică a substanței, interacțiune care tinde să aducă direcția de oscilație a câmpului undei paralel cu direcția magnetizării. Deci o substanță magnetizată într-o direcție, ar trebui să permită trecerea undelor electromagnetice al căror câmp magnetic oscilează paralel cu direcția de magnetizare. Există unele dispozitive cu miezuri magnetice care prezintă însă și o ciudățenie și anume, lasă să treacă prin ele unda care vine dintr-un sens, dar nu o lasă să treacă pe cea reflectată, de aceea poartă numele de *dispozitive nereciproce*. Schema unui radar poate fi modificată folosind asemenea dispozitive (fig. III.6.22). Trenul de unde (I) pleacă prin *dispozitivul magnetic nereciproce*  $D_1$  de la emițător și este transmis prin antenă. El nu ajunge însă și la receptor (R) din cauza dispozitivului nereciproce  $D_2$ . Dacă vine un semnal reflectat (R), din cauza inversării fazei cu  $180^\circ$ , dispozitivul  $D_2$  lasă să treacă semnalul spre receptorul R, dar nu și spre emițător. Semnalul trecut de  $D_2$  este amplificat și pus să acționeze un dispozitiv de vizualizare C. Să cităm unele exemple de aplicare a radarului: conducerea navelor pe timp de ceață sau întuneric, pilotarea avioanelor, aplicații militare în tehnica apărării antiaeriene etc.

## PROBLEME

1. O bilă de greutate  $G = 10\sqrt{3}\text{ N}$  este suspendată de un fir izolator inextensibil, imponderabil, cu lungimea  $l = 1\text{ m}$ . Bila, încărcată cu o sarcină  $+q$ , se află sub acțiunea unei sarcini  $-q$  fixată în planul orizontal ce conține punctul de suspensie, la distanța  $d = 1\text{ m}$  de el. Să se calculeze mărimea sarcinilor care țin acest pendul într-o poziție înclinată cu  $30^\circ$  față de verticală. Mai stă firul întins în această poziție? Dacă înlăturăm sarcina  $-q$ , pendulul începe să oscileze neamortizat. Să se calculeze tensiunea în fir când pendulul trece prin poziția de echilibru.

R:  $q = (10^{-4}/3)\text{ C}$ . Da.  $30(\sqrt{3} - 1)\text{ N}$ .

2. Două sfere cu densitatea de  $5 \text{ g/cm}^3$  și cu raza de  $1 \text{ cm}$  sînt suspendate în același punct de cîte un fir izolator cu lungimea egală cu  $10 \text{ cm}$ , de grosime și greutate neglijabile. Dacă fiecare bilă este încărcată cu  $1 \mu\text{C}$ , să se calculeze unghiul dintre fire cînd sferile se află în apă ( $\epsilon_r = 81$ ). Presupunem că am neutraliza brusc sarcinile. În cît timp ajung în contact cele două sfere dacă neglijăm rezistența la înaintare?

R:  $\alpha = \arcsin \left( \frac{q^2}{16\pi\epsilon l^2 g V (\rho_{corp} - \rho_{apd})} \right) \approx \arcsin 0,017$ ;  $t^2 < 0$ . Forța electrostatică este insuficientă pentru a despărți sferile.

3. Să se deseneze liniile cîmpului electric pentru două sarcini electrice de același semn, dar neegale, și să se compare cu figura obținută pentru cele egale.

4. O pipetă cu raza gurii de scurgere de  $1 \text{ mm}$ , care conține  $100 \text{ g}$  dintr-un lichid dielectric, este plasată între plăcile unui condensator plan cu  $S = 100 \text{ cm}^2$  și  $d = 10 \text{ cm}$ . Presupunem că tot lichidul este încărcat uniform cu  $10 \mu\text{C}$  și are tensiunea superficială  $\sigma = 10^{-2} \text{ N/m}$ . Să se calculeze numărul de picături de lichid care se scurg pînă la golirea completă a pipetei, în prezența și în absența cîmpului electric generat prin legarea condensatorului la o tensiune de  $10^3 \text{ V}$ . Densitatea lichidului este de  $2 \text{ g/cm}^3$  și se neglijează efectul presiunii hidrostatice.

$$\begin{aligned} \text{R: } n_0 = Mg/2\pi r\sigma \approx 10^5/6, \quad n_1 &= \frac{M \left( g + Q \frac{U}{d} \right)}{2\pi r\sigma} \approx 1,001 \cdot 10^5/6; \\ n_2 &= \frac{M \left( g - Q \frac{U}{d} \right)}{2\pi r\sigma} \approx 0,999 \cdot 10^5/6. \end{aligned}$$

4. În colțurile unui hexagon cu latura de  $1 \text{ cm}$  sînt plasate sarcinile  $\pm 1 \mu\text{C}$  prin alternanță. Să se calculeze lucrul mecanic consumat pentru a deplasa o sarcină din poziția ei, pe direcția bisectoarei unghiului, într-o poziție situată la  $10 \text{ cm}$  depărtare.

$$\text{R: } \mathcal{E} \approx -4,8 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

6. Într-o eprubetă de masă neglijabilă, care conține  $V \text{ cm}^3$  de apă, este introdus un corp cu greutatea  $G$ , densitatea  $\rho$  și sarcina  $q$ . a) Să se calculeze intensitatea cîmpului electric aplicat pe verticala locului pentru a menține corpul în echilibru. b) Cu cît crește temperatura apei, dacă tot lucrul mecanic cheltuit, de forța rezultantă, pe distanța de  $d(\text{cm})$ , cînd cîmpul electric este inversat, se transformă în căldură?

$$\text{R: } E = \frac{G}{q} \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right); \quad \Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-2} G (1 - \rho_a/\rho) d}{\rho_a V c}.$$

7. Să se calculeze capacitatea echivalentă  $C_t$  a grupării de condensatori din fig. III.P.1. Să se scrie  $U_{AB}$ ,  $U_{CD}$  și  $U_{EF}$  în funcție de  $U$  și  $C_t$ , precum și energia totală înmagazinată.

$$\text{R: } C_t = \frac{2}{5} C; \quad U_{AB} = U_{EF} = \frac{4}{11} U; \quad U_{CD} = \frac{3}{11} U; \quad W = \frac{U^2 C}{5}.$$

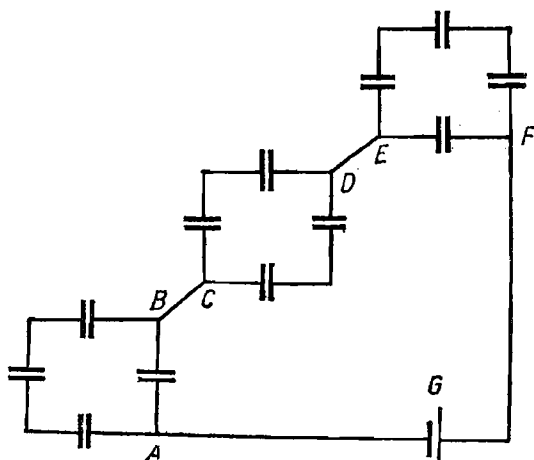


Fig. III.P.1

8. O radiație cade pe o substanță care are lucrul de extracție de 1 eV. Unul dintre fotoelectronii emiși intră într-un condensator plan pe linia mediană. Condensatorul, cu lungimea de 10 cm și distanța dintre plăci de 1 cm, este pus la 100 V. După traversarea condensatorului electronul este deviat cu 1 mm de la linia mediană. a) Care este lungimea de undă când se neglijează efectul gravitației? b) Care ar fi lungimea condensatorului pentru ca electronul considerat să nu mai iasă din condensator?

R:  $\lambda \approx 0,4 \text{ \AA}$ ;  $l = 2,5 \text{ m}$ .

9. Se leagă o sîrmă de cupru la o baterie de tensiune electromotoare  $\mathcal{E}$  și rezistență internă neglijabilă. Scrieți puterea Joule la o temperatură  $t > 0^\circ\text{C}$  ținînd seama de dilatarea sîrmei.

$$\text{R: } P_t = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0} \frac{1}{(1 + \alpha_p t)(1 - \alpha t)} \approx P_0(1 - \alpha_p t)(1 + \alpha t).$$

10. Într-un vas cilindric de 1 kg se află  $200 \text{ cm}^3$  dintr-un lichid pînă la  $h_0 = 1 \text{ mm}$  de marginea superioară. În lichid este scufundată o sîrmă cu  $\rho = 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm}$ ,  $\alpha_p = 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ , lungimea de 10 m și secțiunea de  $0,1 \text{ mm}^2$ , alimentată la un acumulator de 6 V. Care este temperatura față de  $0^\circ\text{C}$  la care lichidul ar atinge marginea vasului și în cît timp este atinsă? Căldura specifică a vasului este egală cu cea a lichidului ( $4000 \text{ J/kg.grd.}$ ), coeficientul de dilatare al lichidului ( $2 \cdot 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$ ) este de două ori mai mare decît cel al vasului. Secțiunea vasului este de  $5 \text{ cm}^2$ , iar densitatea lichidului este de  $1 \text{ g/cm}^3$ .

$$\text{R: } \Delta t \approx \frac{2\rho_0 h_0}{(3V_{os} + V_{ol})} \approx 230^\circ\text{C}; \quad \tau \approx \frac{R_0}{U^2} (m_v + m_l) c \Delta t = 333 \text{ h}.$$

11. Să se calculeze rezistența echivalentă a unui circuit format din trei rezistori cu rezistențele egale cu  $R$  și două potențiometre cu rezistențele egale cu  $2R$ , montați ca în fig. III.P.2.

R: Circuitul din fig. III.P.2 este echivalent cu cel din fig. III.P.3a și apoi cu cel din fig. III.P.3b prin transformarea circuitului stea ( $ABC$ ) în circuitul triunghi ( $A'B'C'$ ) cu  $R = 3R$ ;  $R_{total} = 2R$ .

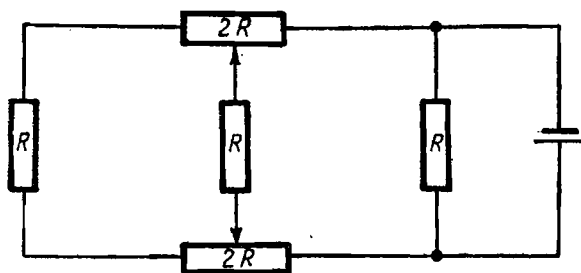


Fig. III.P.2

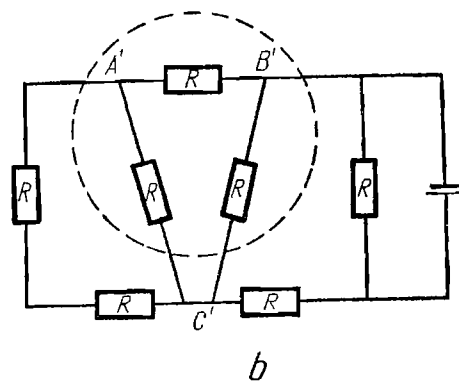
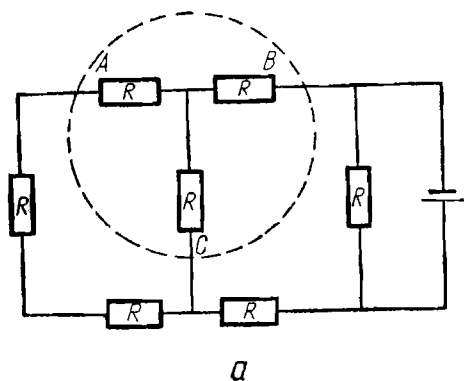


Fig. III.P.3

12. Cum trebuie legate 100 de baterii identice pentru ca intensitatea curentului debitată pe o rezistență  $R$  să fie maximă, cu condiția ca rezistența internă a grupării să nu depășească de 10 ori valoarea rezistenței interne a unei baterii?

$$R: n = 10 \sqrt{\frac{r}{R}} \text{ șiruri de câte } m = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{R}{r}} \text{ elemente; } \frac{m}{n} < 10.$$

13. Rezistența unei băi electrolitice este de  $10 \Omega$ . Cum variază timpul în care se depune o substanță la catod, când un voltmetru este montat, pentru a măsura tensiunea, la bornele băii? Cu cât la sută variază acest timp, dacă baia este alimentată la o sursă cu  $\mathcal{E} = 11 \text{ V}$  și rezistența internă de  $1 \Omega$ , iar voltmetrul arată  $9,9 \text{ V}$ ?

$$R: \text{Crește: } \Delta t/t_0 = 1,01\%.$$

14. Un electron este emis dintr-o sîrmă prin care trece un curent electric. Sîrma este plasată perpendicular pe liniile unui câmp electric uniform. De ce nu rămîne traiectoria electronului paralelă cu direcția câmpului electric? În ce direcție este deviat electronul când liniile câmpului electric sînt paralele cu direcția de emisie?

$$R: \text{Deviat în sensul curentului.}$$

15. Doi conductori paraleli, cu lungimea  $l$ (m) fiecare și aflați la distanța  $d$  unul de altul, prin care circulă curenți de sens contrar,  $I_1 = I_0 \sin \omega t$  și  $I_2 = I_0 \sin (\omega t + \pi/4)$ , sînt legați între ei printr-un resort de constantă  $k$ . Scrieți ecuația de mișcare a unui cap al resortului, mărimea amplitudinii deplasării lui și desenați graficul elongației.

$$\mathbf{R:} \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\mu_0 I_0^2 l^2}{k d} \sin \omega t (\sin \omega t + \cos \omega t); \quad A = y(3T/8).$$

16. Un electron cu o componentă a vitezei de  $10^3$  m/s intră într-o bobină în lungul axului central. Bobina, lungă de 1 m, este făcută din sîrmă de 0,1 mm în diametru, spiră lîngă spiră, înfășurată pe o țevă izolatoare cu diametrul de 1 cm. Cît de mare este tensiunea alternativă de 50 Hz la care electronul ar atinge pereții bobinei într-o alternanță? Care trebuie să fie direcția componente vitezei pentru a avea efect maxim? Se va folosi  $\rho = 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm}$ .

**R:** Componenta vitezei să fie perpendiculară pe axul central al bobinei;

$$U = 0,707 \frac{mv}{e v} \cdot \frac{1}{\mu_0 n} \sqrt{R^2 + \omega^2 l^2} \approx 7/24 \text{ V}.$$

17. Cît de mare este forța de interacțiune între spirele unui cadru pătratic confecționat din sîrmă de  $0,5 \text{ mm}^2$  și  $\rho = 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm}$  cînd se rotește într-un cîmp magnetic uniform de  $0,1 \text{ T}$  avînd viteza liniară maximă de  $1500 \text{ cm/s}$ ? Cuplul forțelor de interacțiune are același sens cu cuplul motor?

$$\mathbf{R:} \quad F = \frac{\mu_0 B^2 v^2}{16 \rho^2} s^2 \sin \omega t \approx 42,2 \sin \omega t; \text{ momentul cuplului este nul.}$$

18. O bobină este introdusă într-un vas ce conține 1 l de apă la  $10^\circ\text{C}$ . Apa este adusă la fierbere prin alimentarea bobinei în curent continuu sau alternativ de 50 Hz. În primul caz ajunge la fierbere în  $t_1 = 5 \text{ min}$ , iar în al doilea în  $t_2 = 10 \text{ min}$ . Tensiunea de alimentare este în ambele cazuri de 209 V. Se cere: a) defazajul; b) parametrii bobinei.

$$\mathbf{R:} \quad \tan \varphi \approx 0,54; \quad R = 52,25 \Omega; \quad L \approx 0,09.$$

19. Un dinam excitat în paralel alimentează o rezistență externă de  $10^3 \Omega$ . Să se calculeze intensitatea curentului din rotor dacă bobinele inductorului și rotorului au rezistențele de 100 și respectiv  $10 \Omega$ . Cîm trebuie plasat un circuit oscilant cu  $L = 1 \text{ mH}$  pentru a produce oscilații a căror frecvență este egală cu cea de rotație a dinamului (50 Hz)? Care este capacitatea condensatorului. Se dă tensiunea la borne de 100 V.

$$\mathbf{R:} \quad I = 1,1 \text{ A}; \text{ între rotor și colector}; \quad C = 10^{-2} \text{ F}.$$

20. În secundarul unui transformator cu raportul de transformare de  $1/10$  este montat un condensator de  $1 \mu\text{F}$ . Să se calculeze mărimea tensiunii induse în primar la întreruperea contactului lui cu o sursă de  $1000 \text{ V}$ . Rezistența secundarului este de  $100 \Omega$ , iar inductanța de  $1 \text{ mH}$ . Se neglijează pierderile prin efect Joule.

$$\mathbf{R:} \quad U_p = \frac{L_s U_s}{C R_s^2} e^{-1/CR_s} = 10^2 e^{-10^4} (\text{V}).$$

21. Fasciculul unui radar este emis la un unghi constant față de orizontală când întâlnește un avion care se deplasează uniform. Semnalul reflectat este înregistrat pe un oscilograf a cărui viteză de baleiaj este de  $10^3$  cm/s. Distanța dintre două semnale reflectate succesiv scade cu 2 mm după fiecare rotație a radarului pe suprafața unui con, rotație care se face într-un minut. Care este sensul mișcării avionului și viteza lui? Ce mișcare suplimentară ar trebui să execute radarul când avionul s-ar deplasa paralel cu orizontala spre radar.

**R:** Vine spre radar cu viteza de 500 m/s; o mișcare de înălțare.





**IV**

## **Optică și spectroscopie**



# 1. Introducere

Optica studiază lumina și fenomenele luminoase. Ea constituie o ramură a științelor fizice ce se ocupă cu probleme ca: natura și proprietățile luminii, modul de producere a ei, legile propagării luminii, modul de interacțiune cu substanța.

Lumina provenită de la diferite corpuri constituie agentul fizic care, prin intermediul retinei, face ca ochiul să poată „vedea” aceste corpuri (Opsis = știința despre vedere).

Natura luminii, structura ei a preocupat pe oameni din cele mai vechi timpuri. Diversele ipoteze emise în vechime erau însă pur speculative, deoarece nu exista posibilitatea verificării lor prin experiențe. Doar legile propagării luminii au putut fi studiate mai amănunțit pe baza observației că, în mod obișnuit, lumina se propagă în linie dreaptă, astfel că între 1626 (Snellius) și 1637 (Descartes) sînt enunțate legile refracției, cele ale reflexiei fiind cunoscute din timpuri imemorabile (știm, de exemplu, că Euclid și Aristotel le utilizau deja, însă nu cunoaștem descoperitorul lor).

În prezent se știe că fenomenele luminoase (acțiunea fotochimică, luminescența, efectul fotoelectric, efectele fiziologice ale vederii etc.) sînt produse de cîmpul electric alternativ al undei electromagnetice, domeniul vizibil fiind cuprins aproximativ între lungimile de undă  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$  și  $\lambda = 7600 \text{ \AA}$ . Așadar, o rază de lumină este de fapt o undă electromagnetică. Teoria electromagnetică a luminii a contribuit mult la perfecționarea aparatelor optice, totodată explicînd și fundamentînd din punct de vedere fizic legile opticii geometrice.

Studiul fenomenelor optice se grupează de obicei în trei secțiuni:

— OPTICA GEOMETRICĂ, în care se studiază legile propagării luminii și formării imaginilor optice, făcîndu-se în general abstracție de natura luminii.

— OPTICA ONDULATORIE, unde sînt studiate fenomene ca difracția, interferența și polarizația luminii. Astfel de fenomene pot fi explicate considerînd lumina ca un fenomen de natură ondulatorie, în speță, o undă electromagnetică.

— OPTICA FOTONICĂ, în care sînt studiate procese ca efectul fotoelectric și altele ce scot în evidență aspectul corpuscular al undelor electromagnetice.

## 2. Optică geometrică

### 2.1. LEGILE FUNDAMENTALE ALE OPTICII GEOMETRICE

Optica geometrică este un capitol al opticii care studiază mersul razelor de lumină prin diferite medii transparente. Legile opticii geometrice stau la baza construirii unui mare număr de aparate optice ca microscopul, lupa, telescopul, aparatul de fotografiat, aparatul de proiecție etc. Astfel de aparate formează imaginile diverselor obiecte luminoase, sau luminate, cu ajutorul „razelor” de lumină provenite de la aceste obiecte, raze ce se propagă în linie dreaptă. Precizia acestor aparate, construite pe baza conceptului de „rază de lumină”, poate fi dusă destul de departe, atâta timp cât nu devin dominante fenomenele legate de natura ondulatorie a luminii, cum sînt cele de difracție și interferență, care conduc la alte principii constructive. Marea majoritate a instrumentelor folosite în industrie, în știință și în viața de toate zilele se bazează însă pe legile opticii geometrice date mai jos, legi experimentale, stabilite direct, în urma a numeroase observații efectuate de-a lungul timpurilor asupra fenomenelor luminoase.

a) **Legea propagării rectilinii a luminii.** Dacă între un paravan opac,  $P$  și un izvor de lumină punctiform,  $I$ , așezăm un creion  $AB$  (sau un alt corp opac oarecare), atunci pe paravan se va forma umbra  $A'B'$  a creionului (fig. IV. 2.1). Se constată că direcțiile  $IBB'$  și  $IAA'$  sînt drepte.

Pămîntul și Luna, fiind luminate de Soare, lasă în partea opusă Soarelui cîte un con de umbră. Cînd o regiune din suprafața Pămîntului intră în conul de umbră al Lunii, în acea regiune avem eclipsă de Soare (fig. IV.2.2). Spațiul conic corespunzător regiunii  $A$  din fig. IV.2.2 se numește umbră, iar cel ce corespunde regiunii  $A'$  se numește penumbră. Forma acestora se datorește mersului rectiliniu al razelor luminoase provenite de la Soare.

În general, formarea umbrei și penumbrei, formarea imaginilor prin instrumentele optice, alinierea obiectelor prin vizare, precum și alte fenomene asemănătoare, au la bază următoarea lege: *Într-un mediu transparent omogen lumina se propagă în linie dreaptă.*

Segmentul de dreaptă de-a lungul căruia se propagă lumina se numește *rază de lumină*. Un grup de raze de lumină formează un *fascicul de lumină*. Dacă razele sînt concurente într-un punct, ele formează un *fascicul omocentric, izogen sau conic*. Un fascicul omocentric este *divergent*, cînd razele sale pleacă din vîrfurile conului, și *convergent*, cînd sensul razelor este spre vîrfurile conului. Dacă razele sînt paralele, ele formează un *fascicul paralel sau cilindric*. Un fascicul paralel poate fi considerat ca fiind omocentric, avînd punctul de con-

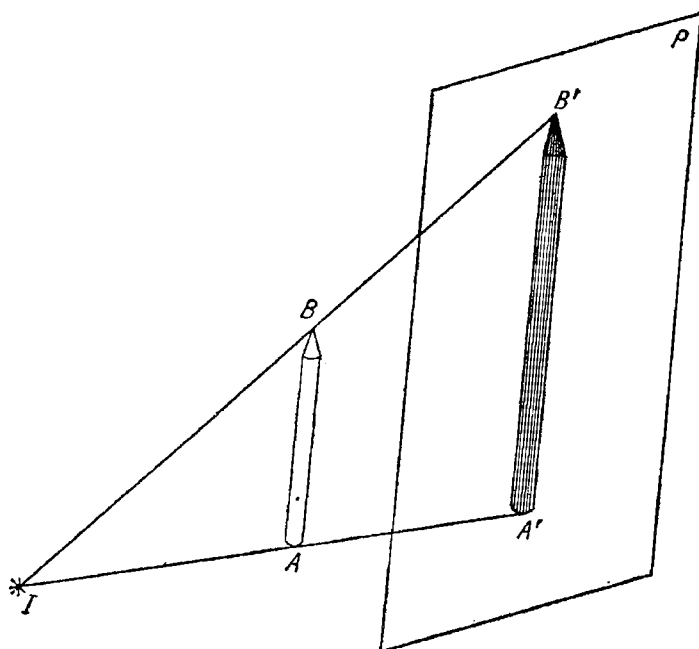


Fig. IV.2.1

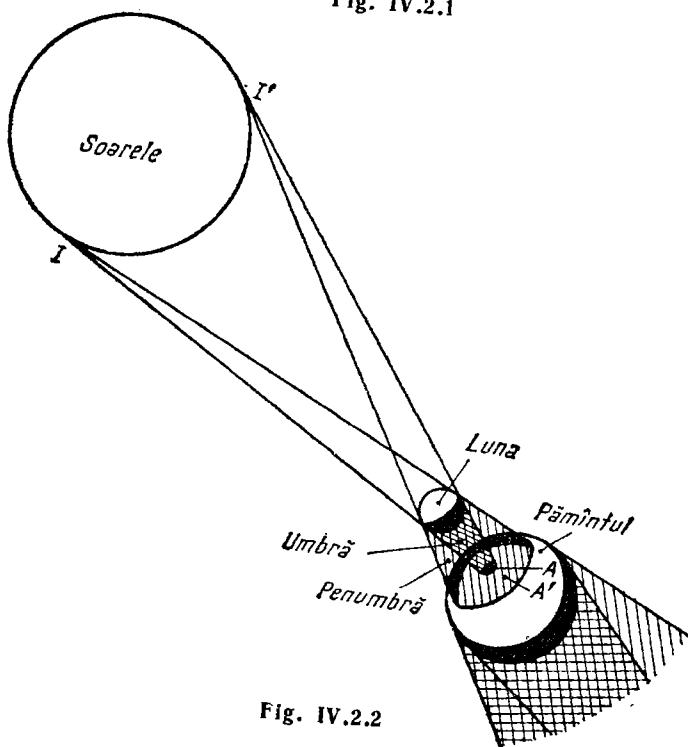


Fig. IV.2.2

curență situat la infinit. Izvoarele de lumină dau de obicei fascicule conice divergente; condensatorii aparatelor de proiecție dau fascicule convergente; colimatoarele dau fascicule paralele (cilindrice).

Segmentele  $IA'$  și  $IB'$  din fig. IV.2.1 sînt raze de lumină. Experimental, o singură rază de lumină, nu poate fi realizată riguros, ci numai aproximativ și anume, făcînd ca lumina să treacă printr-o deschidere foarte mică, separînd deci prin diafragmă, un fascicul cît mai îngust dintr-un fascicul larg. Dacă însă orificiul este prea mic (avînd diametrul sub aproximativ 0,001 mm), lumina vizibilă nu-l mai străbate după legea propagării rectilinii; prin orificiu trece o lumină slabă ce se răspîndește în toate direcțiile, datorită fenomenului de difracție. Acest fenomen este desigur prezent și în cazurile orificiilor mari, însă în mod obișnuit, el nu este observabil și de aceea lumina apare ca propagîndu-se în linie dreaptă.

b) **Legea independenței mutuale și a inversiunii drumului optic.** Să considerăm camera obscură din fig. IV. 2.3. Se reamintește că o cameră obscură este o cutie închisă cu pereții interiori înnegriți, avînd un orificiu,  $O$ , prin care poate trece lumina de la un obiect, ce formează pe peretele opus o imagine răsturnată a acelui obiect. Uneori în orificiul  $O$  se montează și o lentilă conver-

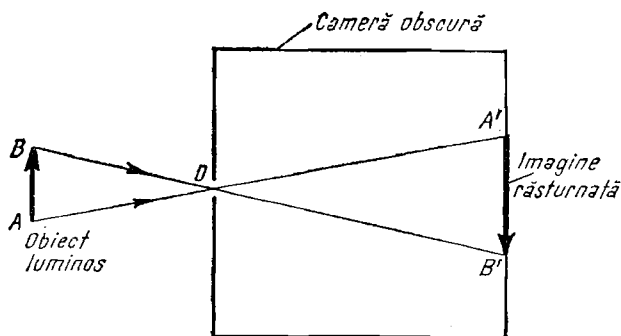


Fig. IV.2.3

gentă. Dacă se obturează fasciculul provenit din extremitatea  $A$ , de exemplu, se constată că fasciculul  $BB'$  nu suferă nici o modificare. Cu alte cuvinte, fiecare din fasciculele ce se întretaie în  $O$  își păstrează individualitatea, nefiind perturbat de prezența celorlalte, propagîndu-se ca și în absența lor. Aceeași independență mutuală se constată în numeroase alte fenomene din optica geometrică (formarea imaginilor prin obiectivul aparatului fotografic, microscopului, prin pupila ochiului etc.). Se mai constată experimental că drumul parcurs de lumină între două puncte date nu se schimbă dacă se mută izvorul luminos dintr-un punct în celălalt, adică atunci cînd se inversează sensul de parcurs al luminii.

Toate aceste fapte experimentale au condus la următoarea lege: *Parcursul unei raze de lumină este independent de acțiunea altor raze și de sensul de propagare.*

*Observație (1).* Așa cum se va vedea la studiul opticii ondulatorii, dacă razele ce se întretaie provin de la izvoare coerente, atunci ele se influențează apreciabil datorită fenomenului de interferență. Prin urmare, legea independen-

ței mutuale este valabilă numai în cazul fasciculelor ce vin de la izvoare ne-coerente, ceea ce se întâmplă de fapt aproape în toate cazurile obișnuite.

c) **Legile reflexiei.** Când o rază de lumină ajunge la limita de separare dintre două medii de propagare diferite, o parte din ea trece în mediul al doilea, iar o parte se reîntoarce în primul mediu (fig. IV.2.4). Revenirea luminii în mediul în care se află raza incidentă atunci când întâlnește suprafața de sepa-

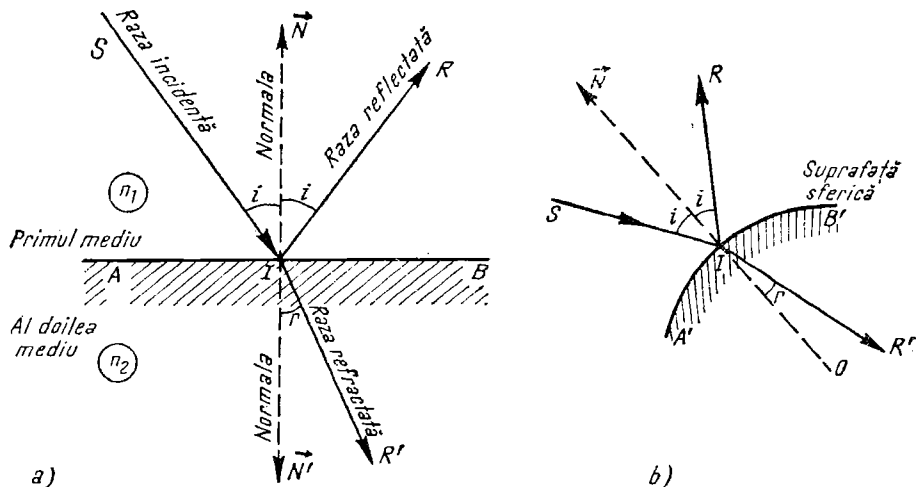


Fig. IV.2.4

rare între două medii, se numește *reflexie*. Reflexia luminii înseamnă deci o modificare a direcției razei incidente, ea rămânând însă în același mediu de propagare. Punctul  $I$  în care are loc această deviere se numește *punct de incidență*, iar noua direcție  $IR$  se numește *rază reflectată*. Considerând normala  $N$  la suprafața de separare în punctul de incidență, unghiul dintre normala  $IN$  și raza incidentă  $SI$  se numește *unghi de incidență*, iar unghiul dintre normală și raza reflectată  $IR$  se numește *unghi de reflexie*. Legile reflexiei, stabilite experimental, sînt:

1. Raza incidentă, normala și raza reflectată se găsesc în același plan.
2. Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

Modul în care se construiește raza reflectată în cazul unei suprafețe plane, poate fi urmărit pe fig. IV.2.4.a. Dîndu-se raza incidentă  $SI$ , planul de incidență fiind chiar planul caietului, raza reflectată se obține ducînd direcția  $IR$  în același plan după un unghi egal cu  $i$  față de normala  $N$ . În același mod se poate afla direcția razei reflectate pe orice suprafață, cum este de exemplu cea sferică, în fig. IV. 2.4.b, unde normala la suprafață este după direcția razei.

**Reflexie dirijată și reflexie difuză.** Dacă suprafața reflectătoare este perfect plană, un fascicul incident paralel va fi, după reflexie, tot paralel, cum se vede în fig. IV 2.5.a. În acest caz avem de-a face cu fenomenul de *reflexie dirijată*. În cazul în care suprafața prezintă mici denivelări (fig. IV.2.5.b), lumina paralelă este împrăștiată după reflexie în toate direcțiile. Acest fenomen

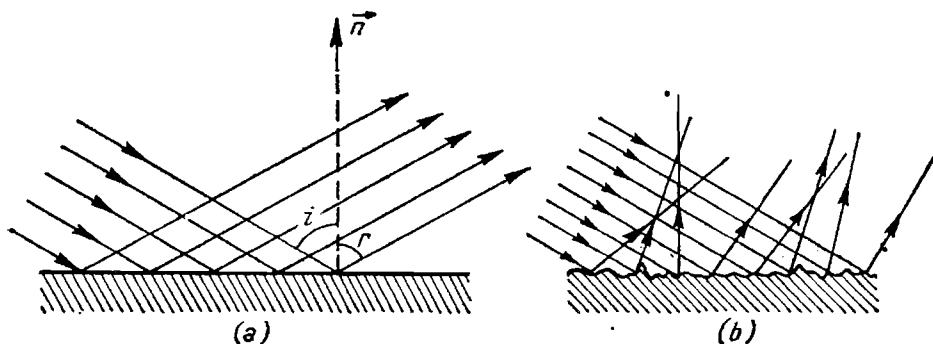


Fig. IV.2.5

se numește reflexie difuză. În general, orice suprafață difuzează mai mult sau mai puțin lumina. Astfel, de exemplu, pe o suprafață de hirtie obișnuită lumina se reflectă, practic, difuz, în timp ce pe o suprafață metalică lustruită, nichelată sau argintată, reflexia este, practic, dirijată. Desigur, există și în acest din urmă caz lumină difuzată, însă e atât de slabă încât de obicei nu este observată.

d) **Legile refracției.** În fig. IV.2.4 se vede că raza de lumină care trece dintr-un mediu în celălalt, nu-și mai păstrează direcția de propagare din primul mediu, ci se frânge (în cazul nostru, apropiindu-se de normala  $IN$ , la suprafața de separare dusă în punctul de incidență). Această schimbare a direcției razei de lumină la trecerea dintr-un mediu transparent în altul, se numește *refracție*. Unghiul dintre raza refractată și normală se numește *unghi de refracție*. Dacă unghiul de refracție este mai mic decât unghiul de incidență, mediul al doilea este *optic mai dens* decât primul. În caz contrar, spunem că mediul al doilea este *optic mai puțin dens* decât primul. Fenomenul de refracție a luminii la limita de separare a două medii transparente diferite are loc conform următoarelor legi:

1. Raza incidentă, normala și raza refractată se află în același plan.

2. Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție, pentru două medii date, păstrează o valoare constantă care se numește *indicele de refracție al mediului al doilea față de primul*.

În fig. IV. 2.4 sînt date două exemple de refracție a luminii, în care mediul al doilea este optic mai dens decât primul. Notînd cu  $n$  indicele de refracție relativ al mediului al doilea față de al primului, formularea matematică a legii a doua este:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n. \quad (2.1)$$

Indicele de refracție al unei substanțe transparente față de vid se numește *indice de refracție absolut* al acelei substanțe. El reprezintă raportul între sinusul unghiului de incidență în vid și sinusul unghiului de refracție în substanța respectivă. Notînd cu  $n_1$  și  $n_2$  indicii de refracție absoluți a două sub-



stanțe oarecare, atunci *indicele de refracție relativ*,  $n$ , al celei de a doua substanțe (care conține raza refractată) față de prima va fi:

$$n = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.2)$$

iar legea refracției se va putea scrie și sub forma:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r. \quad (2.3)$$

Conform celor spuse mai sus, este evident că indicele de refracție absolut al vidului este egal cu unitatea. Sticla obișnuită are indicele de refracție absolut pentru radiația galbenă a sodiului 1,5, apa 1,33, sulfura de carbon 1,63, diamantul 2,43, aerul 1,0003 etc. Aerul, avînd indicele de refracție foarte apropiat de cel al vidului, în practică se pot lua ca indici de refracție absoluți pentru substanțe valorile lor față de aer, atunci cînd nu este nevoie de o precizie prea mare.

## 2.2. REFLEXIA TOTALĂ

În cazul în care lumina trece dintr-un mediu optic mai dens în unul mai puțin dens (de exemplu, din apă în aer, din sticlă în aer, din sticlă în apă etc.), unghiul de refracție este totdeauna mai mare decît unghiul de incidență și de aceea el poate atinge valoarea  $\pi/2$  pentru o anumită valoare  $i = l$  a unghiului de incidență mai mică decît  $\pi/2$  (fig. IV.2.6). Valoarea  $l$  a unghiului de incidență pentru care unghiul de refracție este  $\pi/2$  se numește *unghi limită*. Mai departe, pentru orice valoare a unghiului de incidență mai mare decît unghiul limită,  $l$ , lumina nu mai trece în mediul al doilea, ci se reflectă în punctul de incidență, întorcîndu-se în primul mediu, conform legilor reflexiei, suprafața de separare comportîndu-se deci ca o oglindă. Absența practic completă a luminii în mediul al doilea pentru unghiuri de incidență mai mari decît unghiul limită, întoarcerea ei integrală în mediul întîi, a făcut ca acest fenomen să fie numit *reflexie totală*.

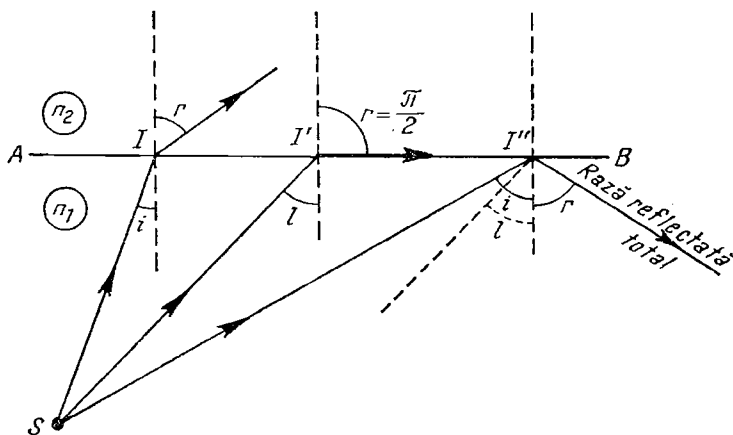


Fig. IV.2.6

Unghiul limită are o valoare bine determinată pentru o pereche dată de substanțe transparente adiacente. Într-adevăr, legea refracției ne dă:

$$n_1 \sin l = n_2 \sin \frac{\pi}{2},$$

de unde

$$\sin l = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.4)$$

ceea ce arată că unghiul limită,  $l$ , depinde numai de indicii de refracție ai celor două substanțe în contact. Dacă de exemplu mediul al doilea este aerul ( $n_2 \approx 1$ ), unghiul limită,  $l$ , pentru apă-aer este  $48^\circ$ , pentru sulfură de carbon-aer este  $38^\circ$ , pentru diamant-aer este  $24^\circ$ .

Din cele arătate mai sus și din legea reversibilității drumului parcurs de lumină, deducem imediat că dacă o rază de lumină trece dintr-un mediu mai puțin refringent în altul mai refringent, (de exemplu, din aer în sticlă), atunci valorile unghiului de refracție  $r$  sînt cuprinse între zero și  $l$  pentru toate valorile unghiului de incidență  $i$  cuprinse între zero și  $\pi/2$ . Nu există deci, în acest caz, nici un unghi de incidență  $i$  pentru care  $r$  să fie mai mare decît  $l$ .

*Observație (2).* După cum am mai arătat, în cazul în care lumina cade pe un corp, acesta poate să o reflecte, să o absoarbă sau să o transmită. Aceste trei fenomene au loc totdeauna simultan, însă de obicei în proporții foarte diferite. Sticla, de exemplu, cu indicele de refracție  $n = 1,5$  reflectă doar aproximativ 4% din lumina ce cade pe ea. Avînd și o absorbție neglijabilă, sticla transmite deci aproape integral lumina. Astfel de corpuri se numesc *transparente*. În clasa corpurilor care transmit practic în întregime lumina intră și *corpurile translucide*, care spre deosebire de cele transparente, nu transmit dirijat lumina, după legile refracției, ci difuz, împrăștiind-o în toate direcțiile (de exemplu, geamul mat). Cît privește *corpurile absorbante* (care rețin prin absorbție o parte apreciabilă a luminii), acestea absorb în general selectiv lumina și se numesc *corpuri colorate*. Corpul care absoarbe toată lumina ce cade pe el poartă numele de *corp negru*. Negrul de fum, de exemplu, se comportă cu bună aproximație ca un corp negru. Corpurile metalice lustruite sînt puternic *reflectante*; ele reflectă aproximativ 90% din lumina incidentă. Majoritatea oglinzilor sînt confecționate din sticlă pe suprafața căreia s-a depus o peliculă de metal (de exemplu, argint).

### 2.3. STIGMATISM RIGUROS ȘI APROXIMATIV. APROXIMAȚIA LUI GAUSS

Optica geometrică s-a dezvoltat în strînsă legătură cu construirea și perfecționarea aparatelor optice. Prin aceste aparate, optica a pus la dispoziția omului un mijloc de „extindere” a organului său de vedere (ochiul), așa cum mecanica, de exemplu, a extins capacitatea sa manuală prin folosirea uneltelor mecanice și mașinilor. Aparatele optice formează imagini ale obiectelor, imagini în care ochiul poate distinge mai multe amănunte și detalii mai fine decît dacă ar privi direct aceste obiecte. Imaginile trebuie să fie însă cît mai clare și cît mai asemănătoare cu obiectele respective.

Pentru formarea imaginii unui punct este necesar ca orice fascicul incident omocentric (conic) să rămână omocentric și după ieșirea din dispozitivul optic. Este necesar deci ca fiecărui punct de pe obiect să-i corespundă câte un singur punct pe imagine. Aceste două puncte se numesc *puncte conjugate*. Deoarece orice obiect real este alcătuit dintr-o infinitate de puncte, vom avea totdeauna o infinitate de puncte conjugate. Această corespondență biunivocă între punctele spațiului-obiect și punctele spațiului-imagine, numită *omografie optică*, conduce la formarea unei imagini perfecte, ideale, numită *imagine stigmatică* (stigma = punct). De fapt, în practică acest stigmatism nu poate fi realizat în mod riguros, ci, așa cum vom vedea în capitolele următoare, fiecărui punct luminos al obiectului îi corespunde în general ca imagine o „pată” luminoasă mai mult sau mai puțin întinsă. Reducerea dimensiunilor acestei pete pînă la un punct înseamnă realizarea *stigmatismului riguros* al imaginii. Datorită însă structurii discontinue a retinei ochiului, precum și a plăcii fotografice, nu este nevoie să se realizeze o imagine perfect punctiformă a unui obiect punctiform (imposibil de altfel de realizat din cauza difracției). Într-adevăr, două imagini circulare formate pe retină sau pe placa fotografică, vor apărea separate una de alta atunci cînd între ele va exista cel puțin un element fotosensibil neluminat sau mai slab luminat. În cazul retinei, elementele fotosensibile sînt conurile și bastonașele. Intervalul dintre două conuri fiind de 5 microni ( $5 \cdot 10^{-3}$  mm), două puncte vecine privite de un observator, nu vor putea fi „rezolvate”, adică văzute ca fiind separate, dacă distanța dintre imaginile lor pe retină este mai mică decît acest interval. Așadar o imagine nepunctiformă va fi recepționată de ochi ca fiind totuși punctiformă dacă dimensiunile sale sînt mai mici decît o anumită limită. În observațiile curente este deci suficientă realizarea unui *stigmatism aproximativ*, determinat de posibilitățile limitate ale ochiului, care nu poate distinge amănunte oricît de mici.

Pentru a vedea în ce condiții instrumentele optice realizează stigmatismul aproximativ, să considerăm exemplul din fig. IV.2.7 în care este reprezentat un ansamblu de două medii transparente separate printr-o suprafață plană  $AB$  (acesta se mai numește și *dioptru plan*). Considerăm  $n_1 > n_2$ , ceea ce ar corespunde de exemplu apei ( $n_1$ ) și aerului ( $n_2$ ). Considerînd două raze ce pleacă din punctul-obiect  $A_1$  și anume raza  $A_1I_1$ , normală pe suprafața de separare, care va trece deci nedeviată și raza  $A_2I_2$  ce cade sub unghiul de incidență  $i$  și care se va depărta de normală după refracție ( $r > i$ ). Punctul de intersecție a acestor două raze după ce ele au străbătut suprafața de separare  $AB$  constituie imaginea lui  $A_1$ . În cazul nostru, acest punct de intersecție nu se formează cu razele reale de lumină, acestea formînd un fascicul divergent, ci cu prelungirile lor. De aceea  $A_2$  este imaginea *virtuală* a obiectului punctiform  $A_1$ . Vom căuta să aflăm în ce condiții imaginea  $A_2$  a unui punct  $A_1$  este suficient de stigmatică (suficient de punctiformă). Observăm că segmentul  $I_1I_2$  poate fi exprimat astfel:

$$I_1I_2 = p_1 \operatorname{tg} i = p_2 \operatorname{tg} r,$$

în care  $p_1$  și  $p_2$  sînt distanțele de la suprafața dioptrului pînă la obiect și, respectiv, imagine. Deci:

$$p_2 = p_1 \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r}. \quad (2.5)$$

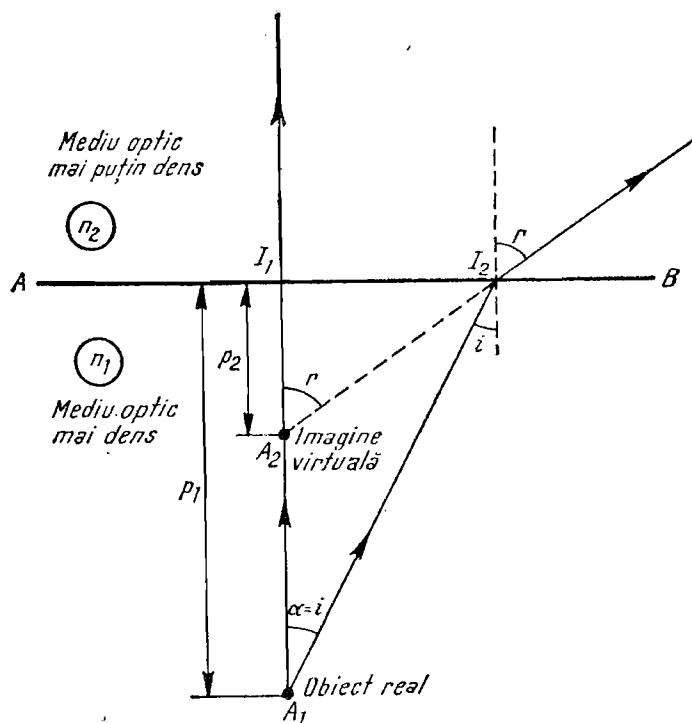


Fig. IV.2.7

Această relație ne arată că pentru o poziție dată a obiectului punctiform  $A_1$  (o distanță  $p_1$  dată) imaginea  $A_2$  se formează la diverse distanțe  $p_2$ , ce depind de unghiul de incidență,  $i$ . Deci orice fascicul conic emis de punctul  $A_1$ , conținând o multitudine de raze ce cad sub diverse înclinații pe suprafața  $AB$ , va da naștere la o multitudine de intersecții,  $A_2$ , ale razelor emergente, obținându-se astfel o imagine astigmatică, nepunctiformă. Dacă fasciculul este suficient de îngust, adică are o deschidere  $\alpha$  destul de mică  $\text{tg } i \simeq \sin i$  și  $\text{tg } r \simeq \sin r$ , atunci:

$$p_2 \simeq p_1 \frac{\sin i}{\sin r}.$$

și folosind legea refracției (2.3) se obține:

$$p_2 = p_1 \frac{n_2}{n_1} \quad (2.3')$$

care arată că în această aproximație poziția imaginii este bine determinată printr-o valoare a distanței  $p_2$  ce nu depinde de unghiul de incidență. Imaginile date de instrumentele optice sînt deci suficient de precise dacă sînt formate cu fasciculele înguste, vecine cu axa optică și înclinate foarte puțin față de axă. Astfel de fascicule se numesc fasciculele paraxiale, iar această aproximație se

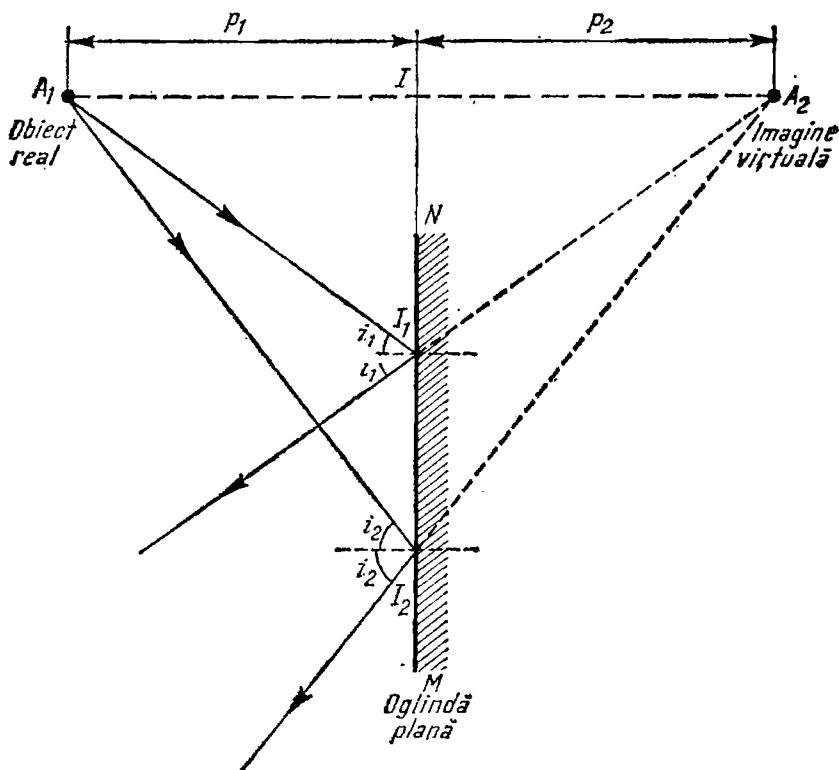


Fig. IV.2.8

numește *aproximația lui Gauss*. Fasciculul paraxial se obține prin *diafragmare*, adică așezînd în calea luminii un paravan opac în care este practicat un mic orificiu (diafragmă).

## 2.4. OGLINDA PLANĂ

O suprafață plană foarte netedă (de obicei metalică sau metalizată) care reflectă aproape integral lumina ce cade pe ea, constituie o oglindă plană. Folosind legile reflexiei, putem cunoaște modul în care oglinda plană formează imaginile obiectelor luminoase (sau luminate). Să studiem mai întîi formarea imaginii unui punct (fig. IV.2.8). Din punctul  $A_1$  cade pe oglindă un fascicul conic al cărui punct de concurență după reflexie va constitui imaginea lui  $A_1$ . Pentru aflarea acestui punct de concurență este suficient să luăm numai două raze oarecare  $A_1I_1$  și  $A_1I_2$ . După reflexie aceste două raze sînt divergente, punctul lor de intersecție  $A_2$  fiind pe prelungirile lor. Acest punct va fi deci imaginea *virtuală* a punctului  $A_1$ , deoarece se formează cu ajutorul prelungirilor razelor reale reflectate de oglindă.

Cititorul poate stabili ușor pe cale geometrică faptul că perpendicularele coborîte din  $A_1$  și  $A_2$  pe planul oglinzii sînt egale și în prelungire ( $p_1 = p_2$ ).

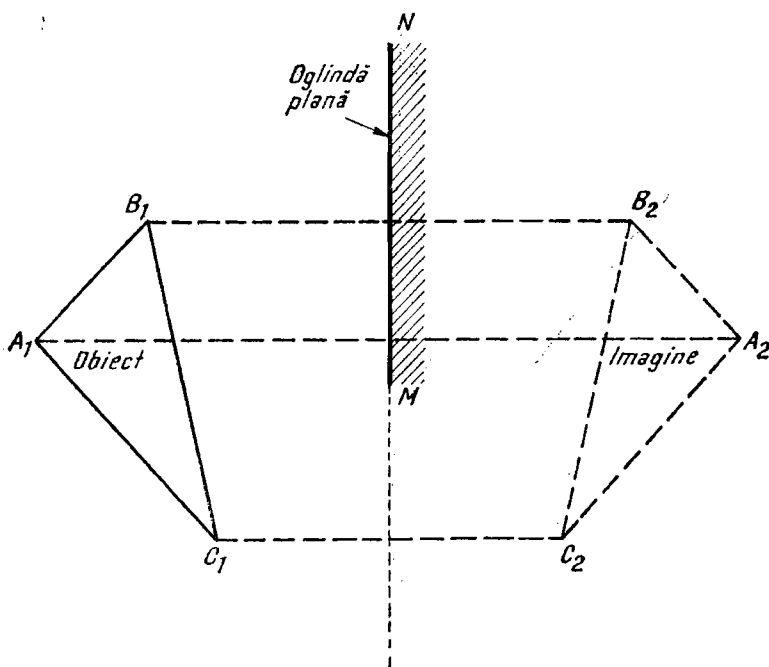


Fig. IV.2.9

Cu alte cuvinte, *punctul imagine este simetricul punctului obiect față de planul oglinzii.*

Observăm că dacă obiectul  $A_1$  ar fi avut o astfel de poziție față de oglindă încît punctul  $I$  să fie cuprins în aria oglinzii, atunci una din cele două raze folosite pentru construcția imaginii putea fi luată chiar de-a lungul perpendicularei  $A_1I$ , adică sub unghiul de incidență egal cu zero. O astfel de rază se va reflecta după aceeași direcție, prelungirea ei întîlnind deci în același punct  $A_2$  oricare altă rază incidentă oblic pe oglindă.

Plecînd de la aceste rezultate, putem afla mai ușor imaginea unui obiect oarecare dată de o oglindă plană; ca exemplu este dată în fig. IV.2.9. imaginea unui triunghi plan  $A_1B_1C_1$  obținută prin construirea simetricului său, folosind planul oglinzii ca plan de simetrie.

În concluzie, putem spune că oglinzile plane formează imagini virtuale ale obiectelor reale, drepte (nerăsturnate), egale cu obiectele și așezate simetric față de planul oglinzii.

*Dacă o oglindă plană se rotește cu un unghi  $\alpha$ , raza reflectată se rotește cu  $2\alpha$ .* Această proprietate, ușor de demonstrat, este folosită la toate galvanometrele și electrometrele ca oglindă și la orice alt dispozitiv cu oglindă rotitoare.

În fig. IV.2.10 este dată o oglindă  $MN$ . Fără a modifica direcția razei incidente  $SI_1$ , rotim oglinda cu un unghi  $\alpha$  pînă în poziția  $MN'$ . Punctul de incidență a luminii pe oglindă va fi acum  $I_2$ . Problema care se pune este aflarea unghiului  $\beta$  dintre razele  $I$  și  $II$  reflectate de oglindă în cele două poziții ale sale. Pe figură se vede că unghiul  $I_2I_1N = 90^\circ + i_1$  este un unghi exterior al triunghiului  $MI_2I_1$ , iar  $2i_1$  este un unghi exterior pentru triunghiul  $PI_2I_1$ .

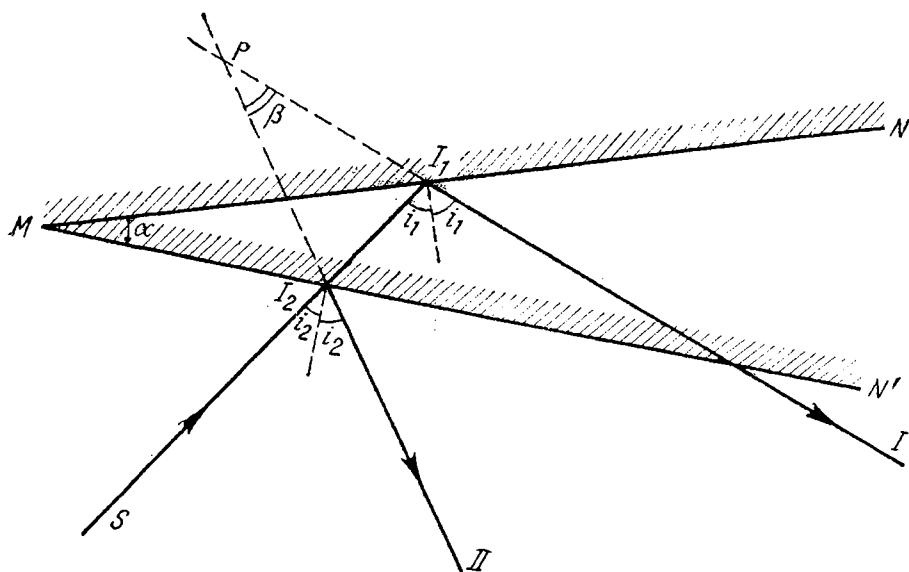


Fig. IV.2.10

Putem deci scrie:  $\alpha + 90^\circ + i_2 = 90^\circ + i_1$  și  $\beta + 2i_2 = 2i_1$ . Din aceste relații rezultă imediat,  $\alpha = i_1 - i_2$ ,  $\beta = 2(i_1 - i_2)$  și deci,

$$\beta = 2\alpha \quad \text{Q.E.D.} \quad (2.6)$$

## 2.5. OGLINZI SFERICE

Oglinzile sferice sînt calote sferice foarte lustruite și de obicei metalizate, care reflectă practic toată lumina ce cade pe ele. Dacă suprafața reflectătoare este partea interioară a sferei din care face parte oglinda, avem de-a face cu o *oglină concavă*, iar dacă este partea exterioară, ea se numește *oglină convexă*. Centrul sferei din care face parte oglinda se numește *centrul de curbură* sau *centrul de sfericitate*, iar mijlocul suprafeței oglinzii (polul calotei sferice) se numește *vîrfurile oglinzii*. Dreapta ce trece prin centru și prin vîrf se numește *ax optic principal*, spre deosebire de celelalte drepte ce trec prin centru fără să treacă prin vîrf, care se numesc *axe optice secundare*.

a) **Focar principal, focar secundar, plan focal.** Focarul principal este punctul de pe axul optic principal în care converg, după reflexie, toate razele care au venit spre oglindă paralel cu axul optic principal. Focar secundar este un punct situat pe un ax optic secundar, în care converg razele care au căzut pe oglindă paralel cu axul optic secundar respectiv. Distanța de la vîrfurile oglinzii pînă la focar se numește *distanță focală*. În fig. IV.2.11 este reprezentat spre exemplificare modul de construire a focarului la o oglindă sferică concavă. Normala în punctul de incidență  $I$  coincide cu direcția razei sferei,  $R$ . Se vede că  $FI = FC$  din triunghiul isoscel  $IFC$ . Deoarece se utilizează de obicei fascicule paraxiale, unghiurile  $\alpha$  vor fi în general mici, încît  $FV \simeq FI$

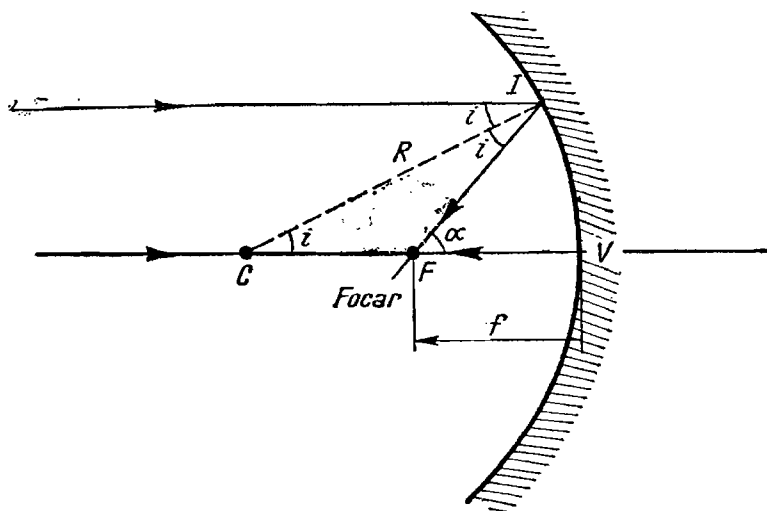


Fig. IV.2.11

și deci, în aproximația lui Gauss,  $FV = FC$ , ceea ce arată că focarul  $F$  se găsește la jumătatea segmentului  $CV = R$ , adică:

$$f = \frac{R}{2}. \quad (2.7)$$

Formula (2.7) poate fi stabilită și pe calea folosirii consecvente a condițiilor de aproximație Gauss. Astfel, scriind  $f = R - FC$  (fig. IV.2.11) și  $\cos i = R / 2FC$ , găsim imediat,

$$f = R \left( 1 - \frac{1}{2 \cos i} \right), \quad (2.8)$$

expresie exactă, care arată că distanța focală depinde în general de unghiul de incidență al razelor pe oglindă. Folosind însă dezvoltarea în serie a funcției cosinus,

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2!} + \dots,$$

termenii ce conțin puterile lui  $i$  pot fi neglijăți pentru unghiuri  $i$  suficient de mici (aproximația Gauss) și atunci  $\cos i \simeq 1$ , iar expresia (2.8) devine o expresie aproximativă,  $f \simeq R/2$ , adică tocmai formula (2.7), independentă de unghiul de incidență, în această aproximație.

În fig. IV.2.12. *a* este reprezentat axul optic principal și un ax optic secundar pentru o oglindă concavă, iar în fig. IV.2.12. *b* pentru o oglindă convexă. Remarcăm în primul rând că *focarul oglinzilor concave este real*, iar *focarul oglinzilor convexe este virtual*, acesta din urmă formându-se cu ajutorul prelungirilor razelor reale reflectate de oglinda convexă. În al doilea rând, observăm că pentru axele optice secundare nu prea mult înclinate față de axul



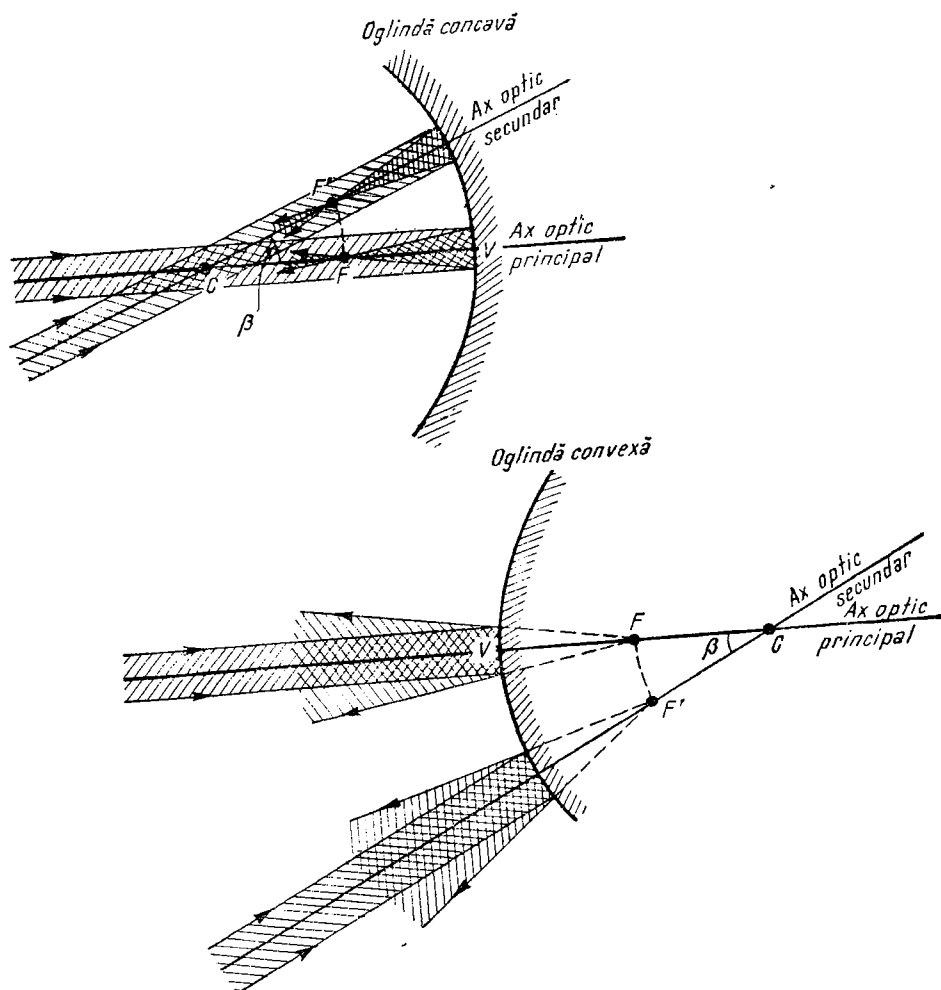


Fig. IV.2.12

principal (unghiuri  $\beta$  mici, aproximația lui Gauss), locul geometric al focarelor secundare, ce intersectează planul desenului după arcul  $FF'$ , poate fi aproximat cu un plan perpendicular pe axul optic principal. Acest plan ce trece prin focarul principal  $F$  și este normal pe axul optic principal, se numește *plan focal*.

b) **Construcția razei reflectate când se dă raza incidentă.** Dându-se o rază incidentă  $SI$  (fig. IV.2.11), se duce o rază a sferei,  $R$ , ce trece prin  $I$  și se construiește raza reflectată luând  $r = i$ .

c) **Construcția imaginii unui punct exterior axului optic.** Pentru aceasta este suficient să folosim o pereche oarecare din următoarele patru raze cu drum cunoscut, duse din punctul dat  $A_1$  (fig. IV.2.13 a): o rază (I) paralelă cu axul optic, care după reflexie va trece prin focar, o rază (II) incidentă în vârful oglinzii, care se va reflecta după o direcție simetrică față de axul

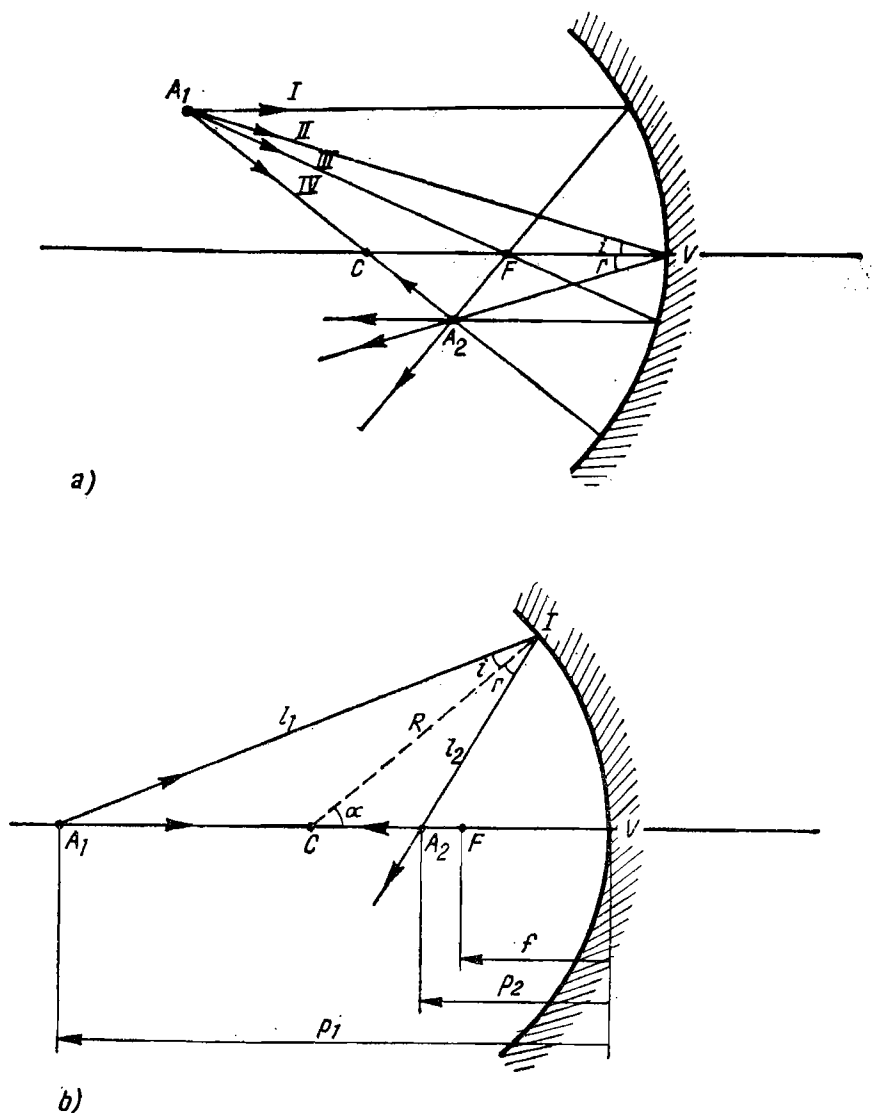


Fig. IV.2.13

optic, conform legilor reflexiei, o rază (III) ce trece prin focar și care se va reflecta paralel cu axul optic și o rază (IV) trecând prin centru, care se va reflecta pe același drum. Toate se vor întâlni într-un singur punct,  $A_2$ , dacă lucrăm cu fascicule paraxiale, acest punct fiind imaginea obiectului punctiform  $A_1$ .

d) **Construcția imaginii unui punct situat pe axul optic.** Și în acest caz este suficient să folosim două raze. Una poate fi luată chiar după direcția axului optic; a doua se ia după o direcție oarecare  $A_1I$  (fig. IV. 2.13. b). Se construiește reflectata acesteia, ținând seama că raza  $R$  este normala în punctul de

incidență,  $I$ . La intersecția razei reflectate cu axul optic se află imaginea  $A_2$  a punctului dat  $A_1$ .

e) **Determinarea poziției imaginii, ecuația punctelor conjugate.** Să considerăm fig. IV.2.13.b. Cu notațiile de pe figură, aplicând teorema sinusului în triunghiurile oarecare  $A_1CI$  și  $A_2CI$ , avem:

$$\frac{\sin i}{CA_1} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{l_1}, \quad \frac{\sin r}{CA_2} = \frac{\sin \alpha}{l_2},$$

dar,  $\sin i = \sin r$ , iar  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  și împărțind cele două relații, obținem

$$\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{l_2}{l_1}, \text{ sau } \frac{R - p_2}{p_1 - R} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Lucrînd cu fascicule foarte înguste, punctele de incidență  $I$  fiind foarte aproape de vîrfurile  $V$ , se poate scrie cu aproximație:  $l_2 \simeq p_2$  și  $l_1 \simeq p_1$  și atunci se obține:

$$\frac{R - p_2}{p_1 - R} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Prin eliminarea numitorilor obținem  $p_1R + p_2R = 2p_1p_2$ , iar din împărțirea ambilor membri cu  $p_1p_2R$ , rezultă relația

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{R},$$

care se mai poate scrie, folosind (2.7):

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f}. \quad (2.9)$$

Această relație se numește *ecuația punctelor conjugate* pentru oglinzi sferice. Observăm că dacă  $p_1 = \infty$ , avem  $p_2 = f$ , ceea ce exprimă faptul că focarul este punctul de pe axul optic în care converg razele provenite de la un punct de pe axul optic situat la infinit. Razele de lumină de la un astfel de punct îndepărtat sînt practic paralele între ele și paralele cu axul optic (fig. IV.2.11).

f) **Construcția imaginii unui obiect nepunctiform prin oglinda concavă.** Vom considera exemplul din fig. IV.2.14 în care se dă un obiect rectiliniu, real, de înălțime  $y_1$ , situat între infinit și centru, la distanța  $p_1$  de vîrfurile oglinzii. Poziția  $p_2$  a imaginii reale,  $y_2$ , se poate afla prin construcție, ca în figură, sau cu ajutorul ecuației (2.9). În plus, obiectul fiind acum nepunctiform, se pune problema dacă imaginea sa va fi mai mare sau mai mică decît obiectul. Pentru a afla răspunsul ne putem folosi, de exemplu, de razele  $B_1V$  și  $VB_2$  (punctate în figură) și de triunghiurile dreptunghice asemenea  $VA_1B_1$  și  $VA_2B_2$  (deoarece  $i = r$ ), de unde rezultă imediat:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (2.10)$$

Raportul  $y_2 / y_1$  se numește *mărime liniară*. Desigur că pentru deducerea formulei (2.10) pot fi luate în considerație și alte relații geometrice, cum

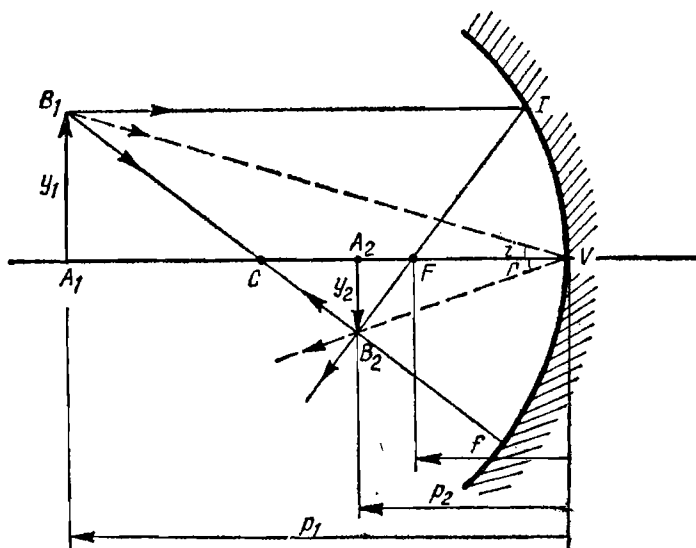


Fig. IV.2.14

ar fi de exemplu, acelea dintre triunghiurile asemenea  $A_1B_1C$  și  $A_2B_2C$ . Atît din construcții, cît și din relațiile (2.9) și (2.10) se poate ușor constata că pentru orice poziție a obiectului real, situat între focar și infinit, imaginea sa în oglinda concavă este *reală* și *răsturnată*; ea este mai mică decît obiectul dacă acesta este între infinit și centru, este egală cu obiectul dacă el este în centru și este mai mare decît obiectul dacă el este între centru și focar. Dacă obiectul este situat între focar și vîrf, imaginea sa este *virtuală*, *dreaptă* și mai mare decît obiectul (fig. IV.2.15).

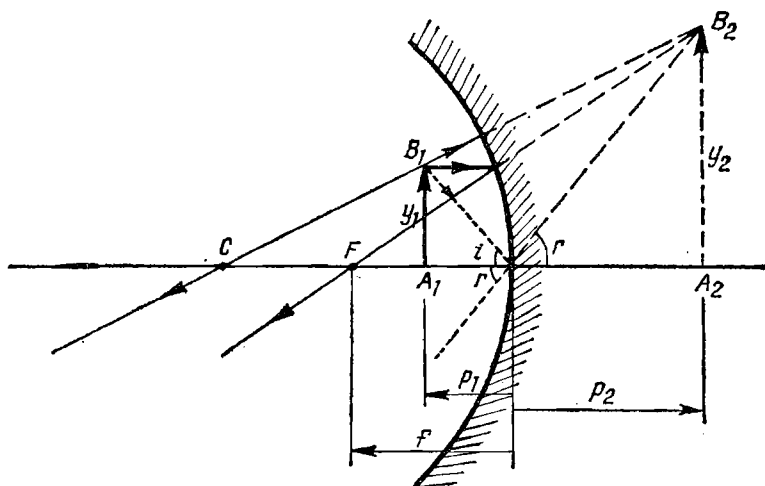


Fig. IV.2.15

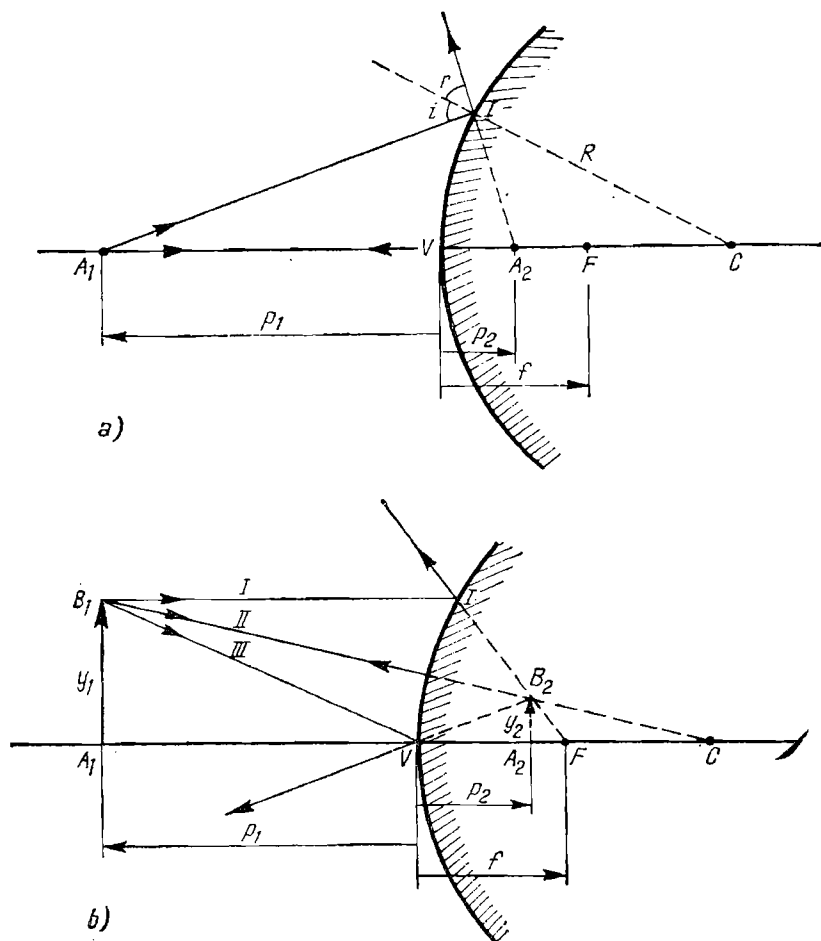


Fig. IV.2.16

g) **Formarea imaginilor în oglinda convexă.** Imaginile în oglinzile convexe se pot construi cu aceleași metode folosite la oglinda concavă. În fig. IV.2.16.a este dată construcția imaginii în oglinda convexă a unui punct  $A_1$ , situat pe axul optic, iar în fig. IV.2.16. b este arătată construcția imaginii în oglinda convexă a unui obiect liniar de mărime  $y_1$ , perpendicular pe axul optic principal. Se vede ușor că în oglinzile convexe imaginile obiectelor reale sînt totdeauna virtuale, drepte (nerăsturnate), micșorate și situate între focar și vîrf pentru orice poziție a obiectului între infinit și vîrf. În plus, așa cum s-a spus mai înainte, însuși focarul oglinzilor convexe este virtual.

Aplicînd teorema sinusului în triunghiurile  $A_1IC$  și  $A_2IC$  din fig. IV.2.16.a, sau folosind relațiile de asemănare între triunghiurile dreptunghice  $A_1B_1V$  și  $A_2B_2V$  precum și între triunghiurile  $A_1B_1C$  și  $A_2B_2C$  din fig. IV.2.16.b, se găsește relația  $-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = -\frac{1}{f}$ .

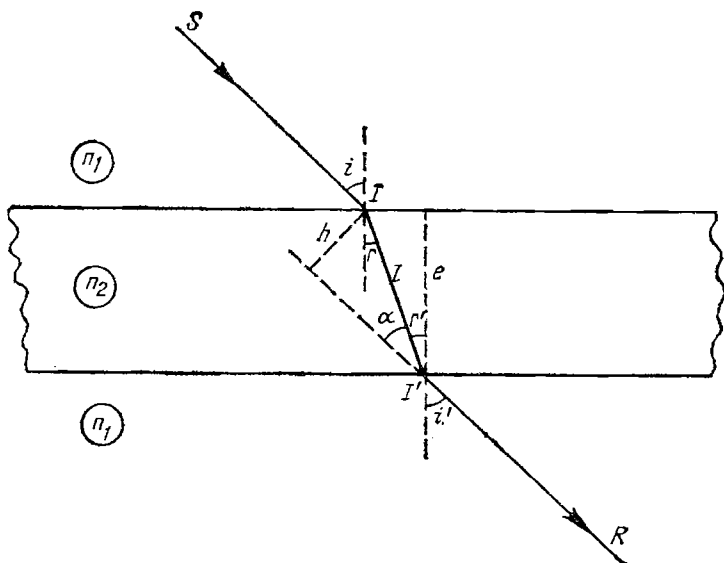


Fig. IV.2.17

Observăm că această relație poate fi dedusă din ecuația (2.9) dacă luăm mărimile  $p_2$  și  $f$  cu semn negativ. Așadar, relația (2.9) este o relație generală a oglinzilor sferice, în care distanțele de la oglindă la obiecte sau imagini reale se introduc cu semnul plus, iar distanțele de la oglindă la obiecte sau imagini virtuale se introduc cu semnul minus.

## 2.6. LAMA CU FEȚE PLAN PARALELE. REFRAȚII SUCCESIVE

a) **Trecerea luminii prin lama cu fețe plan paralele.** O rază de lumină ce cade oblic pe o lamă transparentă cu fețe plan paralele (fig. IV.2.17) suferă două refracții succesive după legile:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r, \quad n_2 \sin r' = n_1 \sin i'.$$

Însă  $r' = r$  ca alterne interne și deci:

$$i' = i, \quad (2.11)$$

adică raza emergentă  $I'R$  este paralelă cu raza incidentă  $SI$ . Raza de lumină străbate deci lama plan paralelă *fără să fie deviată*, însă după cum se vede pe fig. IV. 2.17, emergenta este *deplasată* față de raza incidentă. Deplasarea  $h$  este ușor de stabilit:

$$h = l \sin \alpha,$$

unde  $\alpha = i - r$  (deoarece  $i' = i$ ,  $r' = r$ ) și  $l = e / \cos r$ . Înlocuind, obținem imediat:

$$h = e \frac{\sin (i - r)}{\cos r}. \quad (2.12)$$

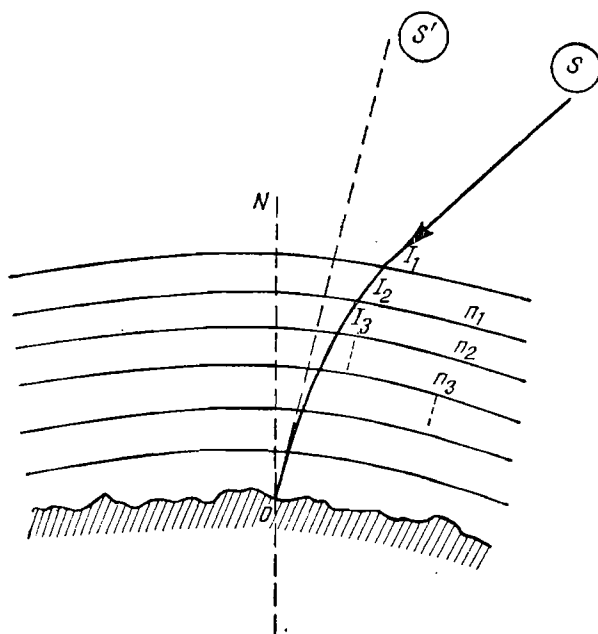


Fig. IV.2.18

Această deplasare,  $h$ , a razei de lumină paralel cu ea însăși la trecerea prin lama cu fețe plan-paralele, crește deci cu creșterea grosimii lamei și cu creșterea unghiului de incidență.

b) **Refracția atmosferică.** Aerul atmosferic nu este un mediu omogen din punct de vedere optic, indicele său de refracție variind în funcție de densitatea sa, care după cum se știe scade pe verticală o dată cu creșterea înălțimii. Din această cauză lumina ce vine de la un astru (Soare, Lună sau o stea etc.) la un observator de pe Pământ va parcurge o traiectorie curbă, dând impresia că astrul s-ar afla în prelungirea ultimei porțiuni a acestei traiectorii. Pentru reprezentarea fenomenului ne putem imagina atmosfera ca fiind alcătuită din foarte multe straturi paralele, fiecare strat având indicele de refracție puțin diferit de al celui alt. În fig. IV.2.18 se vede că observatorul  $O$  de pe Pământ nu primește lumina de la steaua  $S$  după direcția inițială  $SI_1$ , ci după  $OS'$ . În felul acesta astrele vor apărea totdeauna mai sus decât sînt în realitate. Când Soarele, de exemplu, se vede la orizont, el se află de fapt cu aproximativ  $7^\circ$  mai jos, sub linia orizontului. Tot datorită acestei refracții atmosferice Luna și Soarele par turtite pe verticală cînd sînt văzute la orizont.

Această *refracție atmosferică* se numește *refracție astronomică* atunci cînd lumina provine de la corpuri cerești și *refracție terestră* cînd lumina provine de la corpuri de pe Pământ.

c) **Mirajul.** Mirajul este de asemenea un fenomen de refracție atmosferică. El se datorește variației densității straturilor de aer, deci și a indicelui de refracție, cu temperatura. Astfel, dacă suprafața solului este foarte caldă, straturile de aer din imediata vecinătate vor fi mult mai calde decât cele superioare, indicele de refracție crește cu creșterea înălțimii. Are loc o inver-

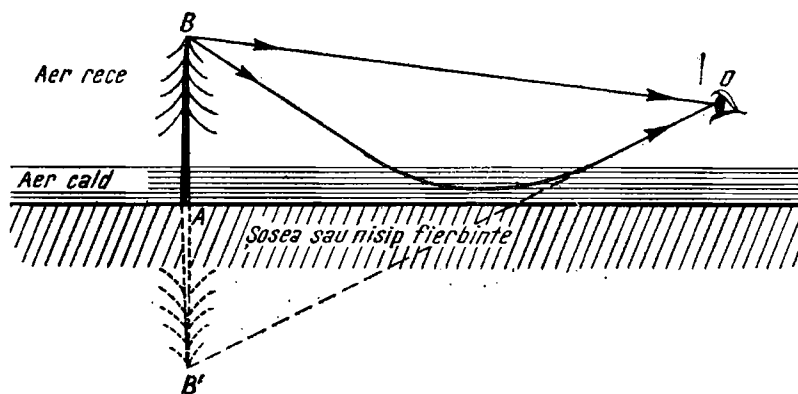


Fig. IV.2.19

sare a densității straturilor. Un observator  $O$  (fig. IV. 2.19) va vedea obiectul  $AB$  însoțit de o imagine a sa răsturnată ( $AB'$ ) în prelungirea ultimei porțiuni a traiectoriei curbe parcursă de lumină prin straturile de aer din vecinătatea solului. Acest fenomen, în care imaginea răsturnată  $AB'$  se află sub obiect, se numește *miraj inferior*. Dacă imaginile răsturnate apar deasupra obiectului (când stratele inferioare de aer sînt mai reci decît cele superioare, cum se întîmplă uneori deasupra mării, dimineața) fenomenul se numește *miraj superior*. Mirajul mai este cunoscut și sub numele de „fata morgana” (sau, popular, „apa morților”) cu care au fost denumite fenomenele complexe de miraj ce apar în vecinătatea coastelor strîmtorii Messina dintre Italia și Sicilia.

## 2.7. PRISMA OPTICĂ

a) **Mersul razei de lumină prin prismă.** O prismă optică este un mediu transparent limitat de două fețe plane (doi dioptri plani) a căror linie de intersecție se numește *muchia prismei*. Unghiul diedru  $A$  dintre cele două fețe plane se numește *unghi de refringentă*, sau unghiul prismei (fig. IV. 2.20). Orice plan perpendicular pe muchie se numește secțiune principală. Vom considera cazul obișnuit, în care raza de lumină ce străbate prismă este conținută totdeauna într-o secțiune principală a ei, intrînd prin fața  $AB$  și ieșind prin fața  $AC$ . Orice rază de lumină  $SI$  ce intră din vid sau aer în prismă (caz întîlnit aproape exclusiv în practică), intrînd dintr-un mediu mai puțin dens în unul optic mai dens ( $n_2 > n_1$ ), se refractă în punct de incidență  $I$ , apropiindu-se de normală, fiind deci abătută spre baza prismei  $BC$ . După următoarea refracție în *punctul de emergență*  $I'$ , raza se va depărta de normală, înclinîndu-se deci și mai mult spre baza  $BC$ . Unghiul  $\delta$  dintre direcția razei incidente  $SI$  și direcția razei emergente  $I'R$  este numit unghi de emergență; el constituie unghiul total cu care o rază de lumină este deviată din drumul ei atunci cînd este obligată să treacă printr-o prismă de indice de refracție mai mare decît al mediului din jurul ei.

Din fig. IV.2.20 se vede că unghiul dintre normalele în  $I$  și  $I'$  este egal cu unghiul prismei  $A$ , iar ca unghi exterior în triunghiul determinat de aceste



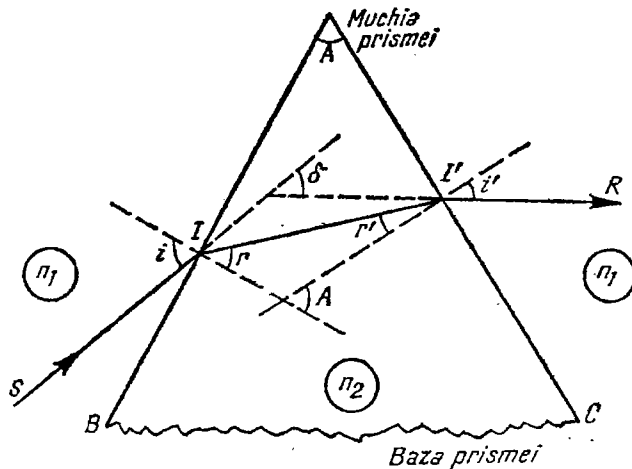


Fig. IV.2.20

normale cu segmentul  $II'$ ,  $r + r' = A$ . Apoi, din triunghiul format de același segment  $II'$  cu prelungirile razelor incidentă și emergentă, unghiul de deviație ca unghi exterior poate fi scris:

$$\delta = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A.$$

Folosind și legea refracției în  $I$  și  $I'$ , obținem un sistem de patru relații:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r, \quad n_1 \sin i' = n_2 \sin r' \quad (2.13)$$

$$r + r' = A, \quad i + i' - A = \delta, \quad (2.14)$$

care permite determinarea a patru mărimi necunoscute de exemplu  $r$ ,  $r'$ ,  $i'$  când se dă unghiul de incidență  $i$  împreună cu constantele  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $A$ .

b) **Deviația minimă.** Relația (2.14) arată că unghiul de deviație  $\delta$  variază cu unghiul de incidență. Experimental se constată că, dând diverse valori unghiului de incidență, unghiul de deviație este totdeauna mai mare decât o anumită valoare minimă  $\delta_{min}$ . Această valoare minimă a unghiului de deviație corespunde cazului  $i = i'$  și  $r = r'$ , adică unui mers simetric al razelor prin prismă, în care punctele  $I$  și  $I'$  sînt egal depărtate de vîrfurile prismei, raza  $II'$  din interiorul prismei fiind perpendiculară pe bisectoarea unghiului  $A$  al prismei. În aceste condiții formulele prismei devin:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (2.15)$$

$$2r = A, \quad 2i - A = \delta_{min}. \quad (2.16)$$

În aceste formule  $i$  este acea valoare particulară a unghiului de incidență pentru care deviația  $\delta$  atinge limita sa inferioară  $\delta_{min}$ . În practică, măsurîndu-se unghiul de deviație minimă  $\delta_{min}$ , poate fi determinat indicele de refracție relativ, al materialului din care este confecționată prismă. Într-adevăr, folosind notația  $n = n_2/n_1$  pentru indicele de refracție relativ, avem:

$$\sin i = n \sin r$$

și utilizând (2.16), calculăm pe  $i$  și  $r$ ;  $i = \frac{A + \delta_{min}}{2}$ ,  $r = \frac{A}{2}$ , de unde

$$n = \frac{\sin \frac{A + \delta_{min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (2.17)$$

c) **Condiția de emergență.** Foarte important este faptul că în punctul de emergență  $I'$ , lumina ieșind dintr-un mediu optic mai dens în unul mai puțin dens ( $n_1 < n_2$ ), va exista posibilitatea apariției fenomenului de reflexie totală în punctul  $I'$ . Cu alte cuvinte s-ar putea ca raza de lumină să nu mai poată ieși din prismă, ci să se reflecte total în interiorul ei. Astfel, dacă în anumite condiții  $r'$  ar fi mai mare decât unghiul limită  $l$ , nu am mai avea rază emergentă. Așadar, pentru ca raza  $II'$  să poată ieși din prismă trebuie ca

$$r' \leq l$$

observăm că și în punctul  $I$  unghiul de refracție  $r$  variază între 0 și  $l$  când unghiul  $i$  variază între 0 și  $\pi/2$ . Deci după prima refracție a razei  $SI$ , unghiul de refracție  $r$  este totdeauna mai mic decât  $l$  (vezi reflexia totală):

$$r \leq l$$

Adunând aceste două inegalități obținem:  $r + r' \leq 2l$ . Ținând seama că  $A = r + r'$  rezultă:

$$A \leq 2l. \quad (2.18)$$

Aceasta este condiția ca orice rază, odată intrată în prismă, să poată ieși din ea (condiția de emergență). O prismă cu indicele de refracție relativ  $n$ , cu unghiul refringent mai mare decât  $2 \arcsin 1/n$ , nu va lăsa nici o rază de lumină să o părăsească; orice rază intrată în prismă se va reflecta total pe fața  $AC$ .

d) **Prisma cu reflexie totală.** Dintre numeroasele tipuri de prisme utilizate în practică vom menționa prisma a cărei secțiune principală este un triunghi dreptunghi isoscel (fig. IV. 2.21.a). O astfel de prismă este de obicei folosită în condițiile în care lumina cade perpendicular pe una din fețele —

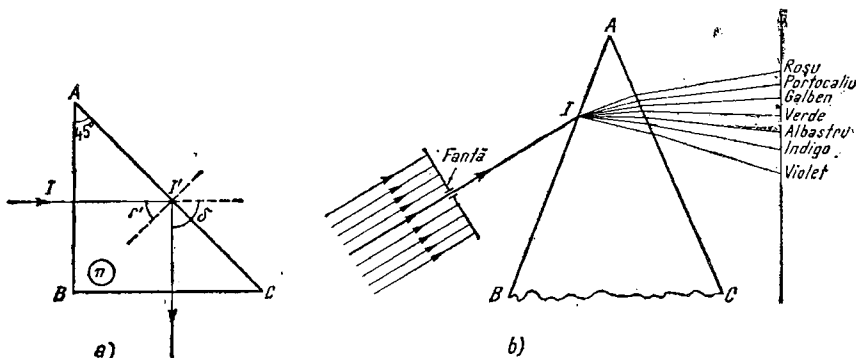


Fig. IV.2.21

catetă (în punctul  $I$ ), deci sub unghiul de incidență  $i = 0$ . Ea va trece mai departe nedeviată și va cădea în  $I'$  sub un unghi  $r' = 45^\circ$ . Dacă prisma este din sticlă cu  $n = 1,5$ , atunci unghiul limită al ei este  $l = 42^\circ$ . Rezultă că în  $I'$  lumina cade sub un unghi  $r' > l$  și se va reflecta total sub un unghi de reflexie de  $45^\circ$ . Așadar raza va cădea pe fața  $BC$  de asemenea perpendicular (unghiul de incidență nul) și va trece mai departe, în aer, nedeviată. O astfel de prismă utilizată în aceste condiții deviază deci o rază din drumul ei cu unghiul de  $90^\circ$ .

e) **Dispersia luminii prin prismă.** Trimițând pe prismă un fascicul cilindric îngust de lumină albă (necolorată), provenită de la Soare, de la un arc electric sau de la filamentul incandescent al unui bec electric (fig. IV.2.21.b), acesta se va descompune în punctul de incidență  $I$ , după intrarea în prismă, într-un fascicul mai larg și colorat. După ieșirea din prismă fasciculul colorat se va lărgi și mai mult, încît pe ecranul alb  $E$ , așezat în calea sa, va apărea o bandă viu colorată. Lumina incidentă a fost deci *descompusă*, dispersată în mai multe culori, în culorile sale componente. Pe ecran s-a obținut spectrul luminii incidente, alcătuit din toate culorile curcubeului (roșu, portocaliu, galben, verde, albastru, indigo și violet), trecerea de la o culoare la alta făcîndu-se continuu, nuanțat din care cauză el se numește *spectru continuu*. Acest fenomen poartă numele de *dispersie* sau descompunere a luminii. Dispersia luminii se datorește faptului că radiațiile de diferite culori (de diferite lungimi de undă) se refractă diferit printr-un mediu transparent dat. Așa cum se vede pe fig. IV.2.21 radiațiile violete ale spectrului vizibil sînt refractate mai puternic decît cele roșii. Cu alte cuvinte mediul transparent al prisme nu prezintă același indice de refracție pentru diferite culori. Indicele său de refracție crește cu scăderea lungimii de undă; este cazul obișnuit, frecvent în practică și se mai numește *dispersie normală*. Dacă indicele de refracție scade cu scăderea lungimii de undă, avem de-a face cu *dispersia anormală* (de exemplu prin prisme umplute cu iod sau cu o soluție de fuxină).

Fenomenul de dispersie a luminii albe (de la Soare) prin prismă a fost obținut și cercetat pentru prima dată de Newton în 1672.

În considerațiile anterioare privitoare la prisma optică s-a avut în vedere cazul ideal, al unei raze de *lumină monocromatică*, alcătuită dintr-o singură culoare (o singură lungime de undă) pe care prisma nu o mai poate descompune în alte culori.

## 2.8. LENTILE

O porțiune dintr-un mediu transparent cuprinsă între două suprafețe sferice (doi dioptri sferici) formează o lentilă. *Lentilele convergente* au focarul real. Ele sînt lentile cu marginea subțire (mai subțiri la margini decît la mijloc) și se împart în lentile *biconvexe*, lentile *plan-convexe* și *meniscuri convergente* (fig. IV.2.22.a). Lentilele divergente au focarul virtual. Ele sînt lentile cu marginea groasă și se împart în lentile *biconcave*, lentile *plan-concave* și *meniscuri divergente* (fig. IV.2.22.b). Meniscurile sînt lentile concave — convexe.

a) **Elementele lentilei.** Principalele elemente ale unei lentile sînt *centrele de curbura*  $O_1$  și  $O_2$ , *axul optic principal*, *centrul optic*,  $C$ , al lentilei (fig. 2.23). O rază de lumină care trece prin centrul optic al lentilei înclinată față

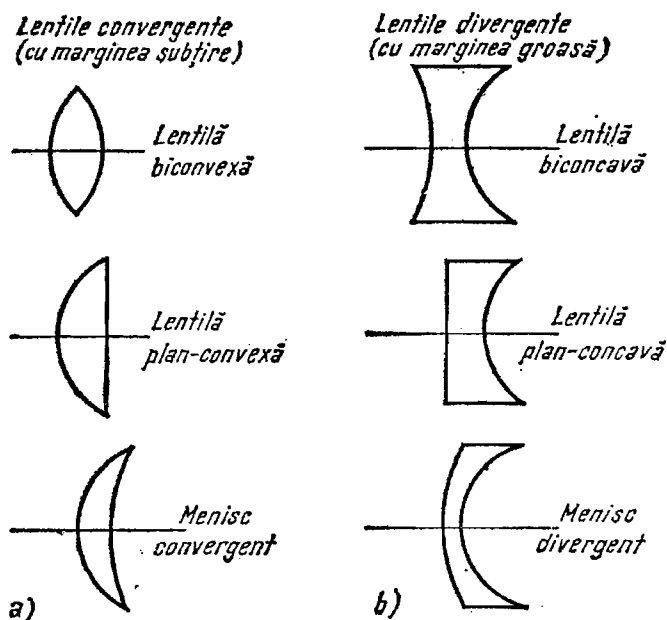


Fig. IV.2.22

de axul optic principal nu va fi deviată, ci numai deplasată, ca într-o lamă cu fețe plan-paralele. Dacă lentila este suficient de subțire în regiunea centrului optic, ea va trece practic nedeviată și nedeplasată, constituind un *ax optic secundar* al lentilei.

b) **Distanța focală a lentilei subțiri. Ecuația punctelor conjugate.** Să considerăm pentru discuție o lentilă biconvexă, deci convergentă, din sticlă de indice de refracție  $n_L$  (fig. IV.2.24). O rază de lumină incidentă pe lentilă va suferi două refracții succesive, și anume o dată la trecerea din aer în sticlă,

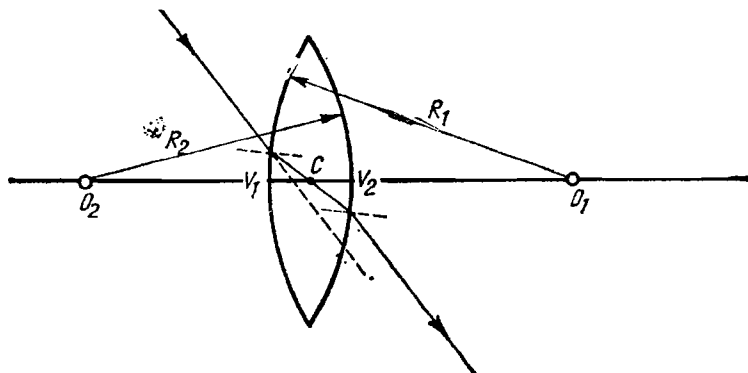


Fig. IV.2.23

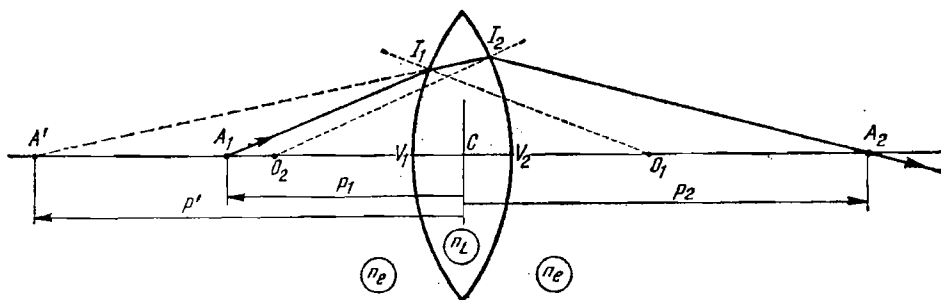


Fig. IV.2.24

apropiindu-se de normala  $O_1I_1$  și o dată din sticlă în aer, depărtându-se de normala  $O_2I_2$ . În exemplul luat în fig. IV.2.24 după prima refracție, imaginea  $A'$  a unui punct real  $A_1$  de pe axul optic va fi virtuală. După a doua refracție se formează imaginea reală  $A_2$ . Discutăm deci cazul în care o lentilă convergentă formează o imagine reală a unui obiect real. Vom analiza cele două refracții separat.

*Refracția la trecerea din aer în sticlă* (fig. IV. 2.25a). Pentru formarea imaginii unui punct  $A_1$ , situat pe axul optic considerăm două raze: una de-a lungul axului optic principal al dioptrului sferic, care trece nedeformată și una oarecare, incidentă în punctul  $I$ , care se va refracta apropiindu-se de normală, conform legii refracției  $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ . După refracție cele două raze se întâlnesc în prelungirea lor, dând naștere imaginii virtuale  $A_2$  la distanța  $x_2$  de vârful dioptrului. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $A_1IO$  avem:

$$\frac{x_1 + R}{\sin(\pi - i)} = \frac{l_1}{\sin \alpha}.$$

Făcînd același lucru și în triunghiul  $A_2IO$  vom avea:

$$\frac{x_2 + R}{\sin(\pi - r)} = \frac{l_2}{\sin \alpha}.$$

Segmentele  $l_1$  și  $l_2$  sînt distanțele de la obiect, respectiv imagine, pînă în punctul de incidență  $I$ . În aproximația lui Gauss există relațiile  $l_1 \simeq x_1$ , și  $l_2 \simeq x_2$ . Ținînd seama că sinusul unui unghi este egal cu sinusul suplimentului său și eliminînd pe  $\sin \alpha$  între cele două relații, obținem

$$\frac{x_2}{x_2 + R} \sin r = \frac{x_1}{x_1 + R} \sin i.$$

Dar, conform legii refracției  $\sin r / \sin i = n_1/n_2$  și atunci expresia de mai sus devine:

$$\frac{x_2}{x_2 + R} \frac{n_1}{n_2} = \frac{x_1}{x_1 + R}.$$

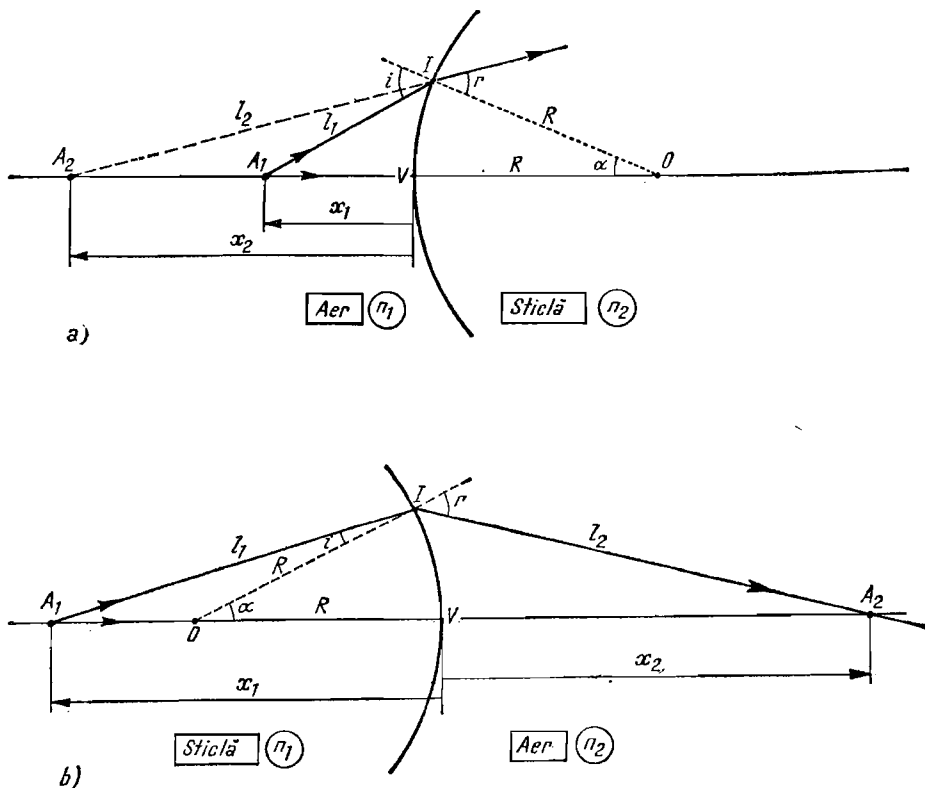


Fig. IV.2.25

Următoarele transformări au scopul de a aduce această relație la o formă mai simplă. Împărțind expresia  $n_1 x_2 (x_1 + R) = n_2 x_1 (x_2 + R)$  cu  $x_1 x_2 R$ , rezultă

$$n_1 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x_1} \right) = n_2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x_2} \right).$$

Ultima egalitate arată invarianța expresiei  $n \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{x} \right)$  la trecerea luminii dintr-un mediu în altul printr-o suprafață sferică. Această expresie se numește *invariantul lui Abbe* sau *invariantul refringent al dioptrului sferic*. Trecând variabilele în primul membru obținem:

$$-\frac{n_2}{x_2} + \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2.19)$$

*Refracția la trecerea din sticlă în aer* (fig. IV.2.25b). Considerăm un obiect real punctiform  $A_1$  pe axul optic în mediul mai dens, de indice de refracție  $n_1$  și conjugatul său real  $A_2$  dat de dioptrul sferic în mediul al doilea mai

puțin dens, de indice de refracție  $n_2 < n_1$ . Vom folosi și în acest caz relațiile trigonometrice simple din triunghiurile  $A_1IO$  și  $A_2IO$ :

$$\frac{x_1 - R}{\sin i} = \frac{l_1}{\sin(\pi - \alpha)}, \quad \frac{x_2 + R}{\sin(\pi - r)} = \frac{l_2}{\sin \alpha},$$

de unde deducem, ca și mai sus, în aproximația lui Gauss:

$$\frac{x_2}{x_2 + R} \sin r = \frac{x_1}{x_1 - R} \sin i,$$

sau:

$$\frac{x_2}{x_2 + R} \frac{n_1}{n_2} = \frac{x_1}{x_1 - R}$$

Eliminând numitorii și împărțind prin  $x_1 x_2 R$ , obținem:

$$\frac{n_2}{x_2} + \frac{n_1}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2.20)$$

Revenind la lentila din fig. IV.2.24. și considerînd-o *lentilă subțire*, adică de grosime  $V_1V_2$  neglijabilă față de razele de curbă, observăm că în acest caz distanțele  $x$ , măsurate de la vîrfurile  $V_1$  și  $V_2$  ale dioptrilor, pot fi înlocuite cu distanțele  $p$  de la centrul optic  $C$  al lentilei, fără a introduce o eroare apreciabilă. Cu notațiile de pe figură, poziția imaginii virtuale intermediare  $A'$  va fi dată de relația (2.19) în care  $x_1 \simeq p_1$  și  $x_2 \simeq p'$ :

$$-\frac{n_L}{p'} + \frac{n_e}{p_1} = \frac{n_L - n_e}{R_1},$$

unde  $n_2 = n_L$  și  $n_1 = n_e$  sînt indicii de refracție pentru lentilă și respectiv pentru mediul exterior (de obicei, aerul).

Următoarea refracție, în  $I_2$ , are loc ca și cum în acest punct ar cădea o rază provenită de la un obiect real așezat la distanța  $p'$  de vîrfurile dioptrului  $V_2$ . Poziția imaginii reale  $A_2$  (imaginea finală dată de lentilă) se află cu relația (2.20) în care  $x_1 \simeq p'$  și  $x_2 \simeq p_2$ , primul mediu avînd indicii de refracție  $n_1 = n_L$  (sticlă), iar al doilea  $n_2 = n_e$  (aer):

$$\frac{n_e}{p_2} + \frac{n_L}{p'} = -\frac{n_e - n_L}{R_2}.$$

Eliminînd pe  $n_L/p'$  obținem:

$$\frac{n_e}{p_2} + \frac{n_e}{p_1} = \frac{n_L - n_e}{R_1} - \frac{n_e - n_L}{R_2},$$

sau:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = \left( \frac{n_L}{n_e} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right). \quad (2.21)$$

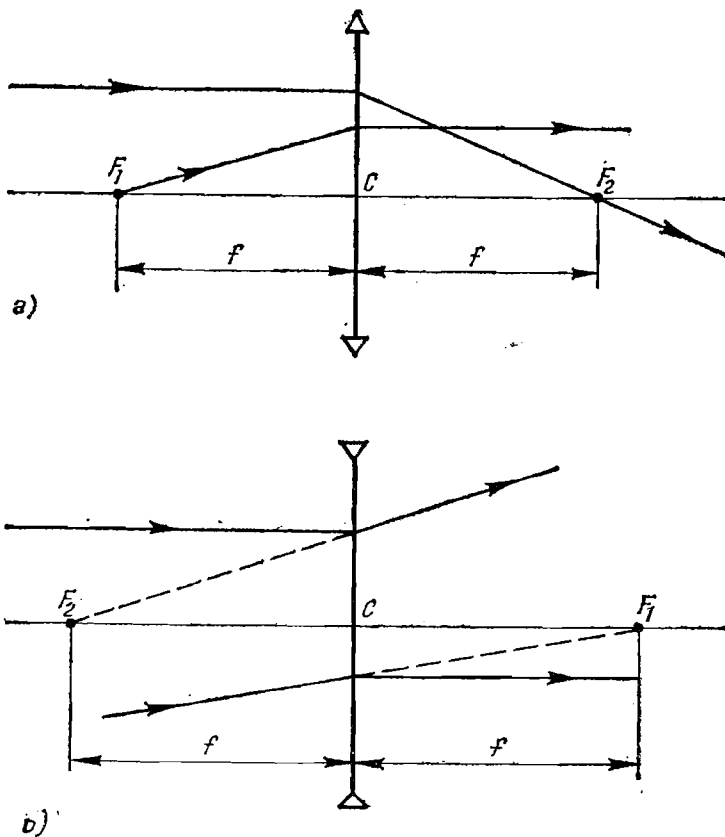


Fig. IV.2.26

Observînd că raportul  $n_L/n_e$  este indicele de refracție relativ al lentilei față de mediul ambiant,  $n$ , mai putem scrie:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \quad (2.22)$$

Pentru  $p_1 = \infty$  obținem *distanța focală — imagine* a lentilei subțiri,  $p_2 = f_2$  adică distanța de la centrul optic al lentilei pînă la punctul de pe axul optic în care converg razele ce vin de la  $\infty$  paralel cu axul optic. Făcînd  $p_2 = \infty$  obținem *distanța focală — obiect* a lentilei subțiri, adică punctul de pe axul optic din care izvorăsc razele ce vor părăsi lentila paralel cu axul optic. Se vede din (2.22) că aceste distanțe sînt egale între ele  $f_1 = f_2 = f$ , valoarea lor comună fiind:

$$f = \frac{1}{\left( \frac{n_L}{n_e} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (2.23)$$

Așadar, orice lentilă subțire are două focare  $F_1$  și  $F_2$  (fig. IV.2.26) așezate simetric față de lentilă la distanța  $f$  numită *distanță focală*. Focarele lentilei



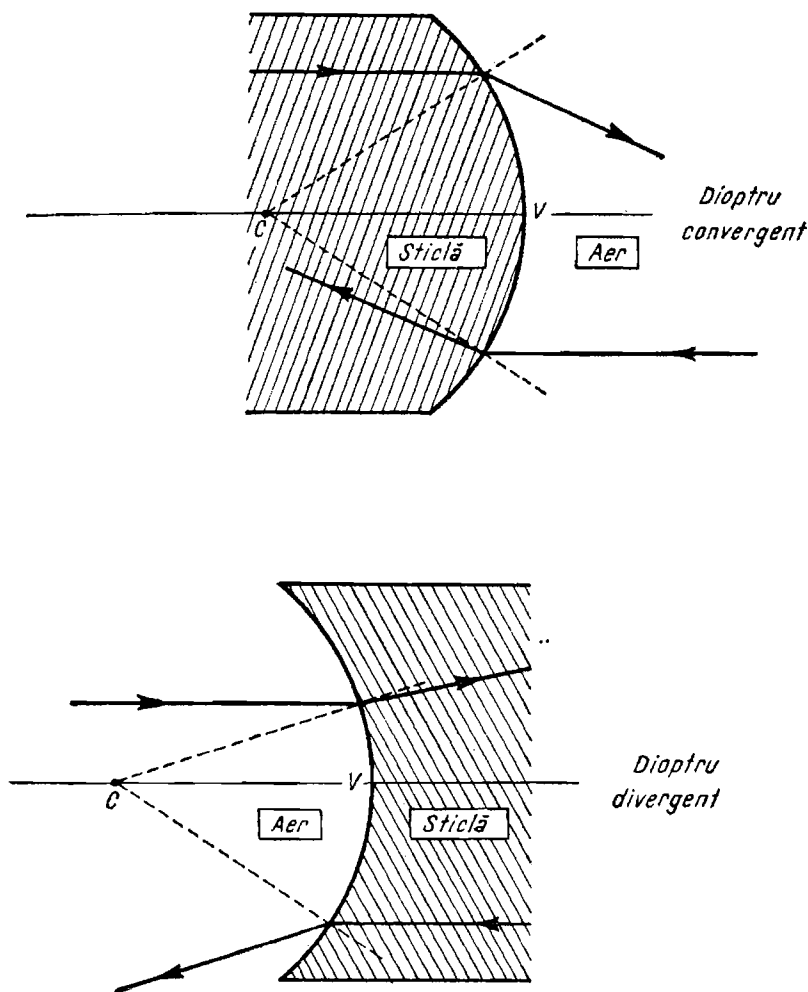


Fig. IV.2.27

convergente sînt reale (fig. IV.2.26.a) și distanțele focale  $f$  au valori numerice pozitive. Focarele lentilei divergente sînt virtuale, așezate în ordine inversă pe axul optic (fig. IV.2.26.b) și de aceea sînt atribuite valori numerice negative pentru  $f$ .

În formula (2.23) valorile numerice ale razelor de curbură vor fi *pozitive pentru dioptrii convergenți* care mărginesc lentila, și vor fi *negative pentru dioptrii divergenți*. Un dioptru este convergent atunci cînd centrul său de curbură este spre mediul mai refringent și este divergent atunci cînd centrul său de curbură este spre mediul mai puțin refringent (vezi fig. IV.2.27). Lentila biconvexă discutată mai sus este deci alcătuită din doi dioptri convergenți, în timp ce lentila biconcavă este alcătuită din doi dioptri divergenți.

Relația (2.22) constituie ecuația punctelor conjugate pentru lentila subțire. Folosind expresia distanței focale din (2.23) această ecuație devine:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f}. \quad (2.24)$$

Așa cum am văzut, când  $f$  este negativ, lentila este divergentă, iar când  $f$  este pozitiv, lentila este convergentă. În plus, menționăm și aici, ca și la oglinzi, că pentru obiectele și imaginile reale  $p_1$  și  $p_2$  au valori pozitive, iar pentru obiecte și imagini virtuale valorile numerice ale distanțelor  $p_1$  și  $p_2$  sunt negative.

c) **Convergența lentilelor. Dioptria.** Inversul distanței focale se numește *convergență*:

$$C = \frac{1}{f}. \quad (2.25)$$

Unitatea ei de măsură este *dioptria*, care măsoară convergența unei lentile cu distanța locală de 1 m.

d) **Construcția direcției unei raze de lumină ce trece prin lentila subțire.** Să presupunem că se dă o rază oarecare  $SI$  incidentă pe o lentilă convergentă (fig. IV.2.28.a). Pentru aflarea direcției emergente, ducem o rază paralelă cu incidenta, dar prin centrul optic; ea va trece nedeviată, constituind după cum se știe, un ax optic secundar. Ducem apoi prin focarul imagine  $F_2$  o dreaptă perpendiculară pe axul optic principal, care va reprezenta urma planului focal pe foaia de hîrtie. Punctul  $F'_2$ , în care axul secundar înțeapă planul focal constituie un focar secundar, adică punctul de convergență al tuturor razelor ce au căzut pe lentilă paralel cu axul optic secundar respectiv. Dreapta  $SI$  este una din ele; construind deci direcția  $IF'_2$  am aflat mersul razei emergente.

În cazul unei lentile divergente, construcția este aceeași, ținîndu-se însă seama de faptul că focarele lentilei divergente sînt în ordine inversă pe axul optic. Intersecția razei, ce trece prin centrul optic, cu planul focal din  $F_2$  (care se află în stînga lentilei pe fig. IV.2.28.b) va constitui și punctul prin care va trece prelungirea razei emergente.

e) **Construcția imaginii unui obiect nepunctiform. Grosimet, putere, mărire.** Să considerăm un obiect rectiliniar real  $A_1B_1$ , perpendicular pe axul optic (fig. IV.2.29.a). Pentru construirea imaginii punctului  $B_1$ , prin lentila subțire, este suficient să luăm două din următoarele trei raze cu drum cunoscut: una paralelă cu axul optic (se va refracta în direcția focarului  $F_2$ ) una prin centrul optic (va trece nedeviată) și una în direcția focarului obiect  $F_1$  (se va refracta paralel cu axul optic). Punctul de intersecție al acestor trei raze va fi imaginea  $B_2$  a punctului  $B_1$ . Coborînd perpendiculara din  $B_2$  pe axul optic, aflăm punctul  $A_2$ , imaginea lui  $A_1$ .

Lentila convergentă formează imagini reale ale obiectelor reale situate între infinit și focarul obiect  $F_1$  (cazul luat în fig. IV.2.29.a) și imagini virtuale când obiectul se află între focarul obiect  $F_1$  și lentilă. Lentila divergentă (fig. IV.2.29.b) formează numai imagini virtuale ale obiectelor reale, indiferent unde sînt acestea așezate între lentilă și infinit.

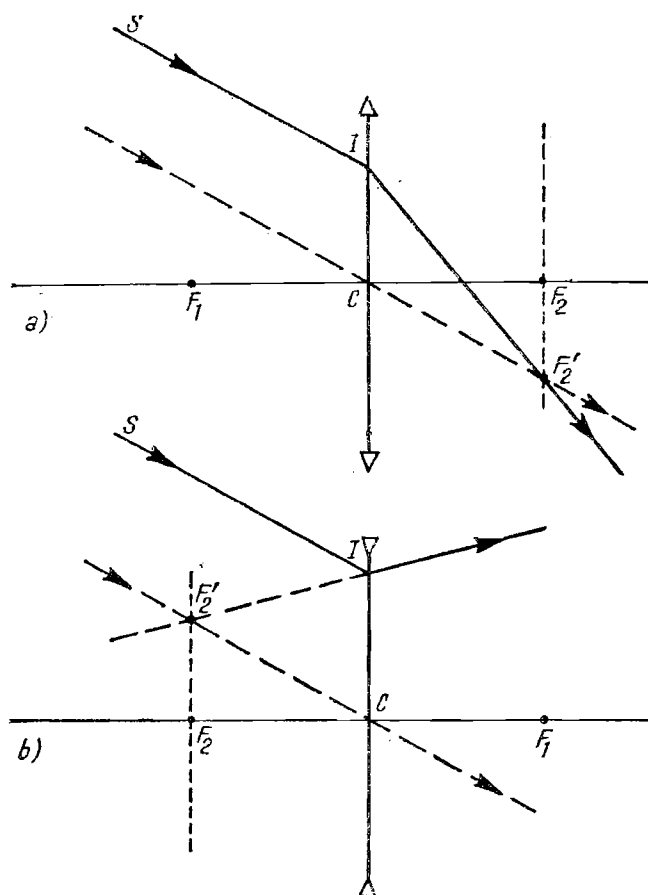


Fig. IV.2.28

Poziția imaginii se poate afla cu relația (2.24) atât pentru lentila convergentă ( $f > 0$ ), cât și pentru cea divergentă ( $f < 0$ ). În plus, în cazul obiectelor nepunctiforme este important să se cunoască nu numai poziția, ci și mărimea imaginii. Notînd cu  $y_1$  lungimea obiectului și cu  $y_2$  lungimea imaginii, aceasta din urmă poate fi ușor determinată din relația:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{p_2}{p_1}, \quad (2.26)$$

care rezultă din asemănarea triunghiurilor  $A_1B_1C$  și  $A_2B_2C$  din fig. IV. 2.29. Raportul

$$\gamma = \frac{y_2}{y_1}, \quad (2.27)$$

se numește *mărire liniară* și este utilizat de obicei pentru caracterizarea instrumentelor care dau imagini reale, adică imagini care se pot forma pe

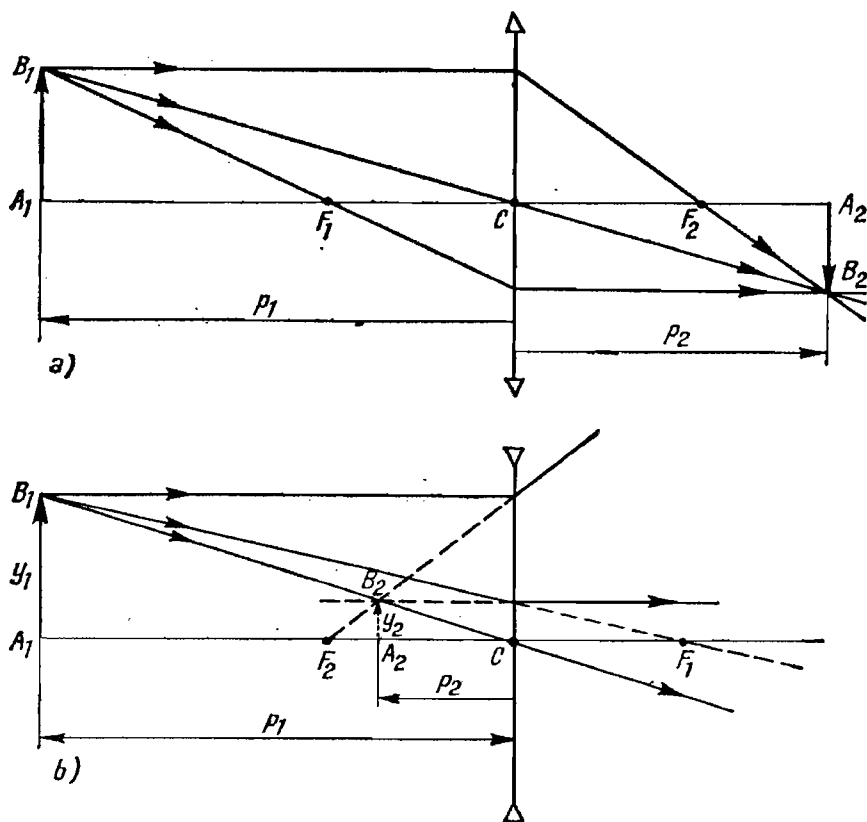


Fig. IV.2.29

un ecran și pot fi deci măsurate (aparatură de proiecție, aparatul fotografic, ochiul etc.).

Instrumentele care dau imagini virtuale ale unor obiecte apropiate, ce pot fi măsurate (lupa, microscopul) se caracterizează de obicei prin *putere optică*, definită ca raportul dintre tangenta unghiului sub care este văzut obiectul prin instrument,  $\text{tg } \alpha_2$  (*diametrul aparent* al imaginii) și lungimea obiectului,  $y_1$ :

$$P = \frac{\text{tg } \alpha_2}{y_1}. \quad (2.28)$$

În multe cazuri se poate scrie  $\text{tg } \alpha_2 \simeq \alpha_2$ , unghiurile fiind mici. Puterea se măsoară în *dioptrii* dacă  $y_1$  se măsoară în *metri*.

Instrumentele care dau imagini virtuale ale unor obiecte îndepărtate (luneta, telescopul) se caracterizează prin *grosiment*, care este raportul dintre tangenta unghiului sub care este văzut obiectul prin instrument adică imaginea,  $\text{tg } \alpha_2$  și tangenta unghiului sub care este văzut obiectul direct, cu ochiul liber, fără instrument,  $\text{tg } \alpha_1$ :

$$G = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} \quad (2.29)$$

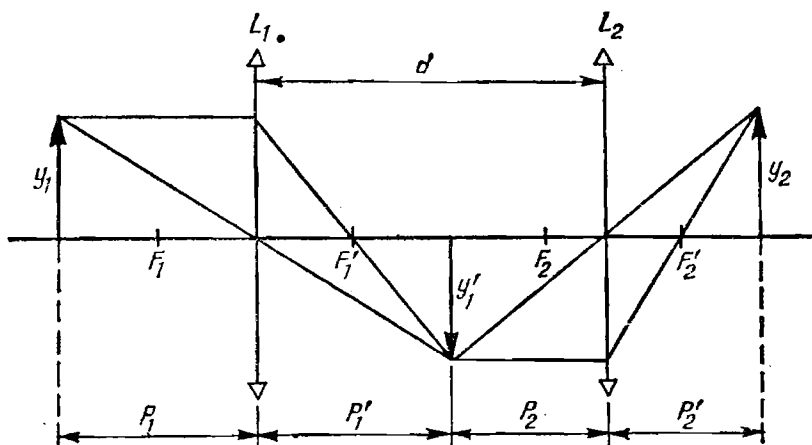


Fig. IV.2.30

Cu alte cuvinte grosimentul este raportul dintre diametrul aparent al imaginii și diametrul aparent al obiectului. Și în acest caz, pentru unghiuri mici se utilizează aproximația gaussiană  $G \simeq \alpha_2/\alpha_1$ .

f) **Asociații de lentile subțiri.** Să luăm cazul cel mai simplu a două lentile subțiri cu axul optic principal comun, alcătuind în acest fel cel mai simplu sistem optic centrat (fig. IV.2.30). Imaginea finală a unui obiect poate fi construită folosind imaginea dată de prima lentilă drept obiect pentru a doua. Notînd cu  $p_1$  și  $p'_1$  distanțele de la lentila  $L_1$  pînă la obiectul de mărime  $y_1$  și respectiv imaginea intermediară  $y'_1$  iar cu  $p_2$  și  $p'_2$  distanțele de la lentila  $L_2$  pînă la „obiectul”  $y'_1$  și respectiv imaginea finală  $y_2$  dată de sistem, putem scrie:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{d - p_2}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2},$$

în care  $f_1$  și  $f_2$  sînt distanțele focale ale celor două lentile subțiri, iar  $d = p'_1 + p_2$  este distanța dintre ele. Suma acestor două convergențe va fi:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{d - p_2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2}. \quad (2.30)$$

Dacă lentilele sînt alipite ( $d = 0$ ) relația (2.30) devine:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}. \quad (2.31)$$

Deoarece  $p_1$  este distanța de la sistemul optic, pînă la obiectul dat iar  $p'_2$  distanța de la același sistem optic pînă la imaginea finală, membrul doi al relației (2.31) exprimă tocmai convergența întregului sistem, considerat ca o lentilă subțire echivalentă, de distanță focală  $f$ , dată de relația  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}$ .

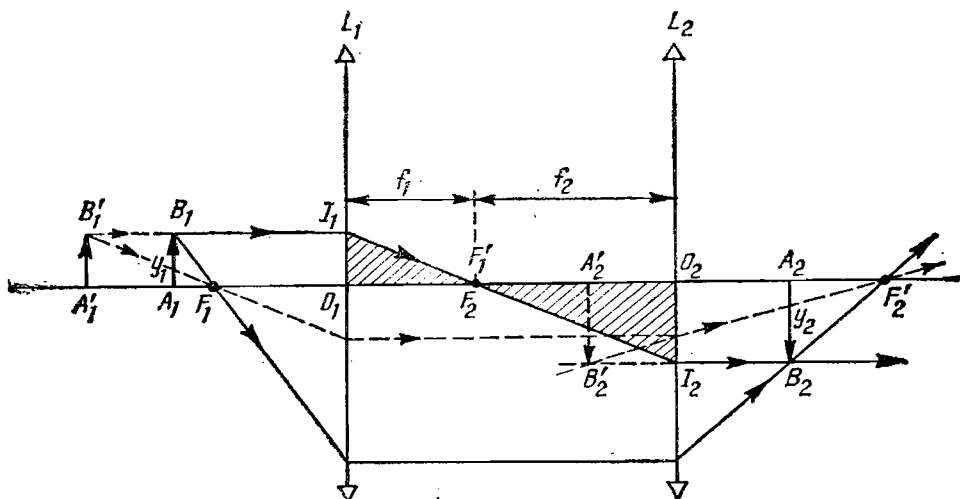


Fig. IV.2.31

Așadar convergența a două lentile subțiri alipite (acolate) este egală cu suma convergențelor lentilelor componente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (2.32)$$

Distanța focală  $f$  se măsoară de la punctul de contact al lentilelor. Atragem atenția asupra faptului că în cazul lentilelor nelipite distanțele focale nu se mai măsoară de la un punct comun, ci de la așa-numitele „plane principale”, ale căror definiții depășesc cadrul acestei cărți. Prin urmare, sistemul de mai sus comportându-se ca o lentilă subțire cu distanța focală dată de (2.32), se poate face uz de relațiile (2.24) și (2.26) pentru aflarea poziției și mărimii imaginii.

Pentru un sistem de mai multe lentile subțiri alăturate convergența lui dată de teoria sistemelor optice centrate este:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots \quad (2.33)$$

Atît în (2.32) cît și în (2.33) sumele sînt algebrice, valorile numerice ale termenilor purtînd semnul plus sau minus, după cum lentilele sînt convergente sau divergente.

În cazul în care distanța dintre lentile este  $d = f_1 + f_2$ , adică focarul imaginii  $F'_1$  al primei lentile coincide cu focarul obiect  $F_2$  al celei de a doua lentile, sistemul se numește *sistem afocal*, deoarece distanța focală a sa este infinită. Pentru a ne convinge, să urmărim mersul unei raze care provine din vîrfurile  $B_1$  al unui obiect de mărime  $y_1$  și care cade pe prima lentilă (deci și pe sistem) paralel cu axul optic. Ea va trece prin focarul posterior  $F'_1$  al primei lentile (fig. IV.2.31). Deoarece focarul anterior  $F_2$  a lentilei  $L_2$  coincide cu  $F'_1$ , această rază va părăsi lentila a doua (și deci, sistemul) de asemenea paralel cu axul

optic. Cu alte cuvinte, punctul de convergență a unei raze ce a căzut pe un astfel de sistem paralel cu axul optic, este la infinit ceea ce înseamnă că sistemul are distanță focală infinită.

Luând din  $B_1$  și o rază ce trece prin focarul  $F_1$  al primei lentile, se poate construi unor imaginea  $y_2$  dată de sistemul afocal. Din triunghiurile dreptunghice hașurate pe figură, observînd că  $O_1I_1=y_1$  și  $O_2I_2=y_2$  se găsește imediat expresia măririi liniare

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (2.34)$$

Prin urmare mărirea lineară a unui sistem afocal este constantă, ea nu depinde de poziția obiectului, fiind determinată numai de raportul distanțelor focale ale celor două lentile. Pentru ilustrare, este luată în fig. IV.2.31 o altă poziție  $A_1B_1$ , a cărei imagine  $A_2B_2$  este construită cu linii punctate și este virtuală. Se vede ușor că mărirea ei este egală cu  $y_2$ .

## 2.9. NOȚIUNI DESPRE ABERAȚII

Orice imagine dată de un instrument optic trebuie să aibă următoarele calități:

— Imaginea să fie cît mai precisă, adică stigmatică ceea ce înseamnă că fiecărui punct al obiectului trebuie să-i corespundă un singur punct în imagine.

— Imaginea să fie *plană*, adică fiecărui obiect plan perpendicular pe axul optic trebuie să-i corespundă o imagine de asemenea plană, perpendiculară pe axul optic.

— Imaginea să fie asemenea cu obiectul, nedeformată („ortoscopică”).

O astfel de imagine se poate obține cu bună aproximație dacă se utilizează fascicule *paraxiale*. Fasciculul trebuie să fie, în plus, și *monocromatic*. În practică însă nu putem evita fasciculele înclinate la formarea imaginilor, deoarece obiectele sînt în general întinse, alcătuite din puncte depărtate de axul optic. De asemenea fasciculul nu poate fi diaframat (îngustat) prea mult, din motive de luminozitate. În sfîrșit, lumina folosită de obicei în instrumentele optice nu este monocromatică, ci alcătuită din mai multe culori, adică din radiații de diferite lungimi de undă. Toate acestea duc la abateri în formarea imaginii de către o lentilă sau un sistem optic, abateri care se numesc *aberații*. Aberațiile sistemelor optice fac ca imaginile să fie însoțite de defecte, să fie deformate, neclare și cu marginile irizate în diverse culori. Aberațiile ce apar în cazul fasciculelor care se abat de la condițiile de stigmatism se numesc *aberații geometrice*. Ele apar deci la fascicule largi izvorîte din puncte de pe axul optic sau vecine cu axul optic și la fascicule înguste dar înclinate față de ax. Aberațiile ce se datoresc lipsei de monocromaticism a luminii folosite se numesc *aberații cromatice*.

a) **Aberația de sfericitate.** Din multitudinea aberațiilor geometrice vom studia numai aberația provocată de fascicule centrate (fascicule ce izvorăsc din puncte situate pe axul optic sau în vecinătatea sa) cu deschiderea unghiulară largă. Această aberație se numește *aberație de sfericitate*. Așa cum s-a arătat mai înainte (vezi, de exemplu, relațiile (2.5) și (2.8)), poziția imaginii este în general afectată de mărirea unghiului de incidență al razelor provenite de

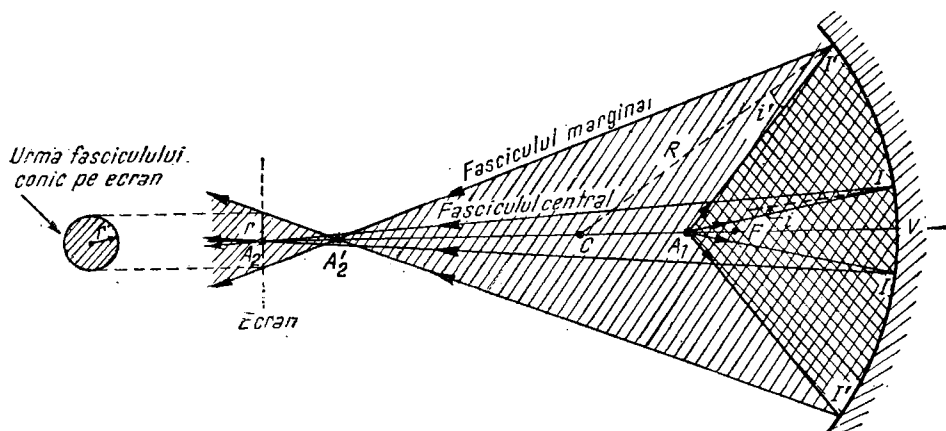


Fig. IV.2.32

la obiect. În cazul exemplului din figura IV.2.32, al unei oglinzi sferice, aceasta înseamnă că poziția imaginii punctului  $A_1$  situat între centru și focar este influențată de lărgimea fasciculului luminos care formează această imagine. În figură, imaginea  $A_2$  este construită cu un fascicul îngust, paraxial  $A_1II$ , iar imaginea  $A_2'$  cu un fascicul larg  $A_1I'T'$ . Se vede că unghiul de incidență  $i'$  al razei  $A_1I'$  ce face parte din fasciculul larg, este mai mare decât unghiul de incidență,  $i$  al razei  $A_1I$  ce aparține fasciculului paraxial. Ca urmare, imaginea  $A_2'$  dată de razele marginale  $A_1I'$  se formează la o anumită distanță de imaginea dată de razele centrale în aproximația lui Gauss (și mai aproape de vârful oglinzii,  $V$ ). Așadar, cît timp lucrăm cu un fascicul paraxial, se obține o imagine punctiformă; pe un ecran așezat în  $A_2$  perpendicular pe ax, apare drept imagine un punct luminos.

Lărgind însă mult fasciculul incident, punctele de intersecție ale razelor sale cu axul, după reflexie, se vor depărta tot mai vizibil de  $A_2$ , astfel că pe ecranul respectiv va apărea în loc de o imagine punctiformă, o aureolă circulară slab luminată, a cărei rază  $r$  este dată de urma fasciculului conic reflectat și avînd în centru un punct de intensitate luminoasă mai mare. Atît distanța  $A_2A_2'$ , numită *aberație longitudinală*, cît și raza  $r$ , numită *aberație transversală* cresc cu creșterea lărgimii fasciculului, dînd astfel o măsură a aberației de sfericitate: cu cît fasciculul este mai larg cu atît aberația de sfericitate este mai pronunțată. Datorită ei imaginile punctelor apar pe ecran ca niște pete circulare de lumină.

Dacă fasciculul de lumină incident este paralel cu axul optic principal (punctul  $A_1$  la infinit), atunci raza  $r = \tau$  a petei luminoase pe un ecran așezat în focarul  $F$  al oglinzii (focarul razelor paraxiale) se numește *aberație principală transversală*, iar distanța  $FF' = \lambda$  se numește *aberație principală longitudinală* (fig. IV. 2.33), unde  $F'$  este focarul razelor marginale.

Aplicînd teorema sinusului în triunghiul  $CF'I'$  din fig. IV. 2.33, avem:

$$\frac{R}{\sin(\pi - 2i)} = \frac{CF'}{\sin i}, \quad CF' = R \frac{\sin i}{\sin 2i}.$$





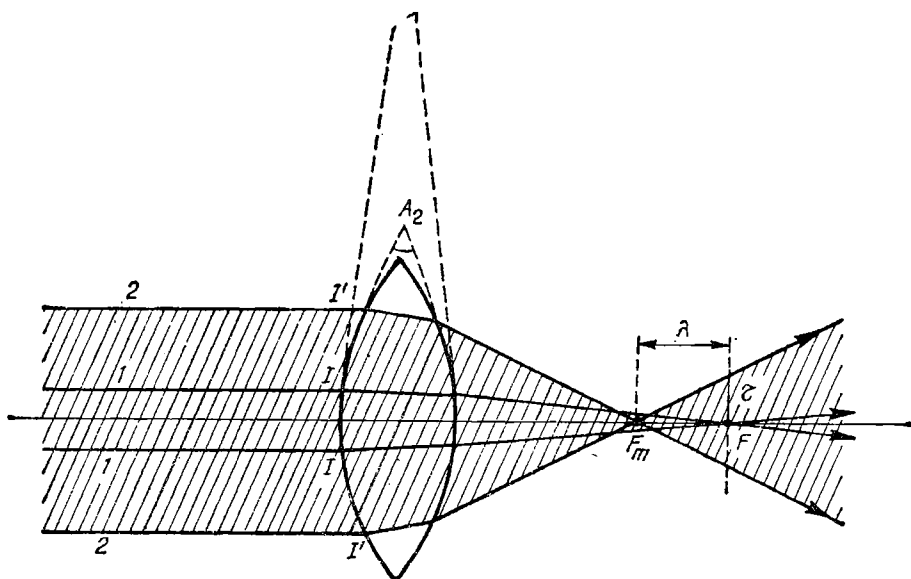


Fig. IV.2.34

În cazul exemplului din fig. IV.2.34 al unei lentile subțiri, poziția focalului (sau a imaginii unui punct oarecare) este de asemenea influențată de lărgimea fasciculului. Focarul  $F$  al razelor paraxiale (centrale) se formează în urma refracției razelor 1, incidente în  $I$ , asemănător refracției printr-o prismă cu unghiul refringent  $A_1$ . Focarul  $F'$  al razelor marginale se formează în urma refracției razelor 2 incidente în  $I'$ , asemănător refracției printr-o prismă de unghi refringent  $A_2$  mai mare decât  $A_1$ ; refracția în  $I'$  va fi deci mai puternică și focarul  $F_m$  al razelor marginale va fi mai aproape de lentilă decât  $F$ . Și în acest caz, deci, pe un ecran așezat în  $F$ , perpendicular pe ax, va apărea un punct luminos dacă se utilizează un fascicul îngust, paraxial și o pată circulară cu un punct central mai luminos, dacă se utilizează fascicule largi. Cele două aberații principale sînt notate pe figură: *aberația principală longitudinală*,  $\lambda$ , și *aberația principală transversală*,  $\tau$ . Calculul aberațiilor principale ale unei lentile subțiri este mai complicat, însă duce la aceeași dependență de  $i$  ( $\lambda$  crește cu  $i^2$ , iar  $\tau$  cu  $i^3$  pentru unghiuri mici). Se ajunge deci și în acest caz la rezultatul că nici lentilele subțiri nu sînt lipsite de aberații de sfericitate chiar la fascicule înguste, însă pot fi reduse de asemenea pînă la limita stigmatismului aproximativ, prin diafragmarea fasciculului. În plus, se arată că lentila subțire care dă aberațiile cele mai mici este lentila biconvexă sau biconcavă, avînd razele de curbură în raportul  $1/6$ , dacă indicele de refracție al ei este  $1,5$ . În acest caz lentila trebuie așezată cu fața mai curbă înspre razele mai puțin înclinate. Dacă obiectul este mai îndepărtat decât imaginea, lentila se așază cu fața mai bombată spre obiect, iar dacă imaginea este mai îndepărtată atunci se așază cu fața mai bombată spre imagine.

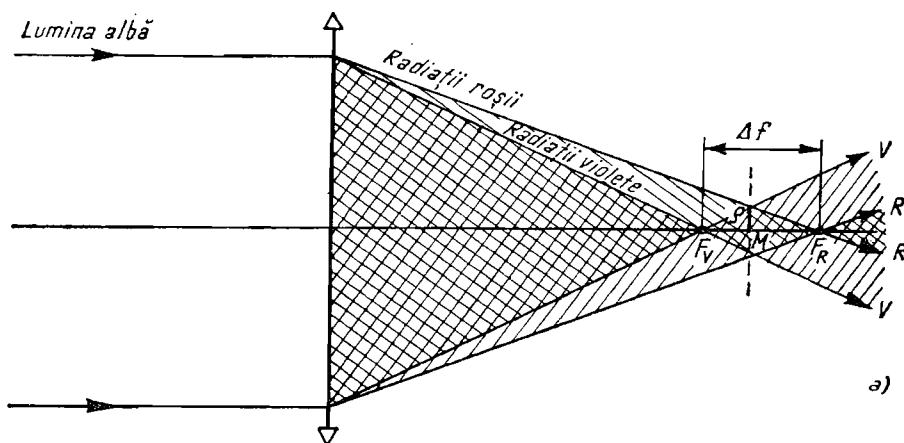


Fig. IV.2.35

b) **Aberațiile cromatice.** Așa cum s-a văzut la dispersia luminii prin prismă, refracția luminii ce străbate un mediu transparent este diferită pentru diferite lungimi de undă, fiind în general, mai puternică pentru lungimi de undă mai mici.

Această refracție selectivă numită *dispersie*, va apărea deci și în cazul trecerii luminii printr-o lentilă. Razele violete vor fi deviate mai mult decât cele roșii și ca urmare, imaginile formate în lumină albă vor apărea cu marginile colorate.

Ca și în cazul aberației de sfericitate, aberațiile cromatice vor fi caracterizate de fasciculele paralele cu axul optic. În fig. IV.2.35 sînt reprezentate aberațiile cromatice în cazul unei lentile subțiri. Fasciculul incident de lumină albă paralel cu axul optic va avea o infinitate de focare în diferite culori cuprinse între  $F_R$ , focarul radiațiilor roșii și  $F_V$ , focarul radiațiilor violete. Se obține deci o *dispersie a focarelor*.

Pe un ecran așezat în  $F_R$  se va obține o pată circulară luminată la margini de radiațiile violete,  $V$ , deci cu marginile irizate în violet. De asemenea se vede că pe un ecran așezat în  $F_V$  marginile vor fi irizate în roșu. Aberația cromatică se caracterizează de obicei prin razap, a celei mai mici pete albicioase ce se obține pe un ecran (în punctul  $M$  pe figură), numită *aberație cromatică transversală*, și prin distanța  $\Delta f = f_R - f_V$ , numită *aberație cromatică longitudinală*, fasciculul incident fiind paralel cu axul optic.

Dispersia focarelor la o lentilă subțire poate fi demonstrată și plecînd de la relația (2.23):

$$f = \frac{1}{(n - 1) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)}.$$

Deoarece, conform legilor dispersiei  $n$  este invers proporțional cu  $\lambda$ ,  $n_V$  (indicele de refracție pentru razele violete) este mai mare decât  $n_R$  (pentru razele roșii). Vom avea deci  $f_V < f_R$ . Cu alte cuvinte focarul violet va fi mai aproape de lentilă decât cel roșu.

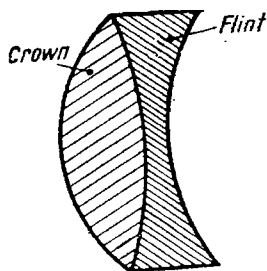


Fig. IV.2.36

Pentru corijarea aberațiilor cromatice se formează sisteme optice alcătuite din lentile convergente și divergente lipite, deoarece la lentilele convergente focarele razelor violete sînt mai aproape de lentilă decît cele ale razelor roșii, iar la lentilele divergente sînt așezate invers. În plus se utilizează sticle diferite pentru lentile (de exemplu sticle crown și sticle flint), care dau dispersii diferite, astfel încît să se obțină, prin compensație, un sistem fără aberații cromatice (sistem acromatic). În fig. IV.2.36 se arată acromatizarea unei lentile subțiri convergente prin atașarea unei alte lentile subțiri divergente confecționată din alt sort de sticlă.

a) **Influența difracției asupra formării imaginilor. Puterea separatoare a instrumentelor optice.** Chiar dacă sînt corijate toate aberațiile unui sistem optic, imaginile vor fi influențate de fenomenul de difracție a luminii. Datorită diaframelor, indispensabile la orice instrument, în locul în care ar trebui să se formeze o imagine punctiformă se formează în realitate o figură de difracție: o mică pată circulară luminoasă înconjurată de cercuri luminoase și întunecoase de intensități din ce în ce mai mici. În fig. IV. 2.37 este indicată formarea imaginilor a două puncte îndepărtate, ce trimit pe lentila diaframată fascicule paralele făcînd unghiul  $\alpha$  între ele. În punctele  $M$  și  $M'$ , unde ar fi trebuit să se formeze imaginile „geometrice” punctiforme, apar două figuri de difracție

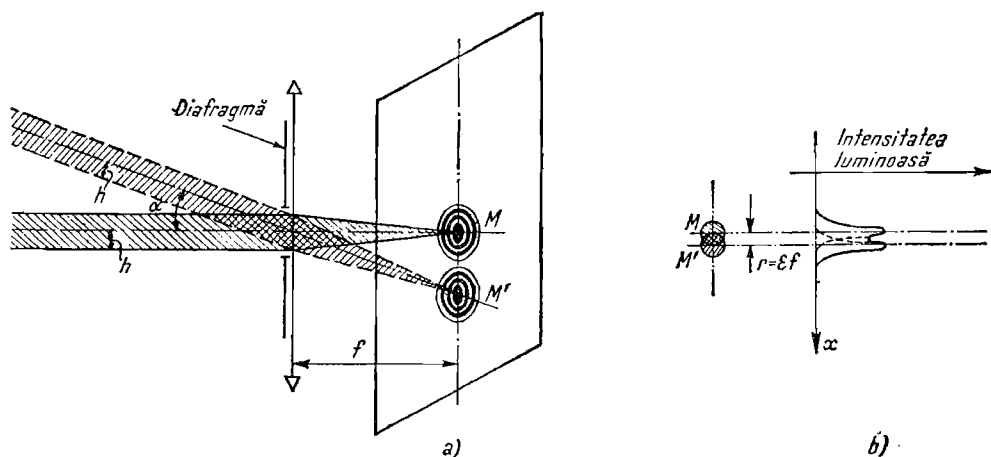


Fig. IV.2.37

separate. Dacă distanța  $MM'$  dintre imaginile „geometrice” este mai mică decât raza uneia din petele luminoase centrale, atunci se observă o singură pată luminoasă lătită. Pentru a ne putea da seama de existența a două imagini va trebui ca între centrele celor două pete centrale să existe un interval întunecat (sau mai puțin luminos). Pentru aceasta trebuie ca distanța  $MM'$  să fie cel puțin egală cu raza  $r$ , a cercului central luminos. Notînd cu  $\varepsilon$  acea valoare a unghiului  $\alpha$  pentru care este satisfăcută condiția de mai sus, ea va reprezenta cel mai mic unghi sub care se văd două puncte ce mai pot fi încă distinse în imagine. De pe figură se vede că  $r = \varepsilon f$ , în care  $f$  este distanța focală a lentilei folosite. Calculul matematic al lui  $\varepsilon$  este destul de complicat și conduce la expresia:

$$\varepsilon = \frac{0,61 \lambda}{h}, \quad (2.37)$$

unde  $\lambda$  este lungimea de undă a radiației folosite, iar  $h$  este raza deschiderii fasciculului incident.

Inversul acestei mărimi, adică  $1/\varepsilon$ , poartă numele de *putere separatoare unghiulară*. Așadar un instrument optic va avea o putere separatoare cu atît mai mare cu cît va putea distinge puncte mai apropiate (ce se văd sub unghiuri  $\varepsilon$  mai mici). După cum reiese din (2.37) puterea separatoare crește dacă se utilizează radiații de lungimi de undă,  $\lambda$ , mai mici și dacă deschiderea lentilei obiectiv este mai mare. Ea se măsoară în  $\text{radian}^{-1}$ .

## 2.10 APARATE OPTICE

a) **Ochiul omenesc, ca aparat optic.** Din punct de vedere anatomic, ochiul este după cum se știe, un organ deosebit de complex, servind la transformarea imaginilor geometrice ale corpurilor în senzații vizuale. Privit însă numai din punctul de vedere al opticii geometrice, el constituie un sistem optic format din trei medii transparente: *Umoarea apoasă, cristalinul și umoarea sticloasă* (fig. IV. 2.38).

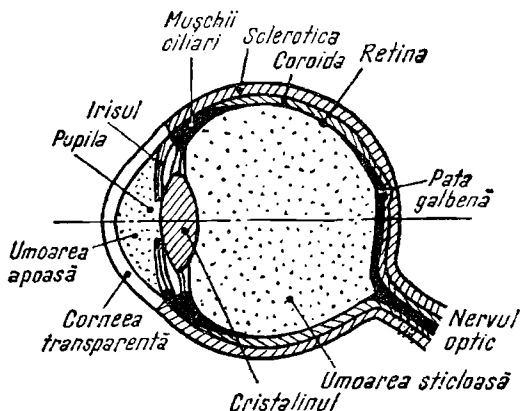


Fig. IV.2.38

Acestea se găsesc în interiorul *globului ocular* mărginit în exterior de o membrană rezistentă numită *sclerotică*. Sclerotica este opacă peste tot, exceptînd o porțiune din față, care este transparentă și de formă sferică, numită *corneea transparentă*. Lumina pătrunde în ochi prin corneea, străbate cele trei medii transparente și cade pe retină, unde se formează o imagine reală și răsturnată a obiectelor privite. Fluxul luminos este reglat automat prin acțiunea involuntară (reflexă) a *irisului*. Acesta este o membrană (ai cărei pigmenți dau „culoarea ochilor”) perforată în centru printr-o deschidere circulară de diametru variabil, numită *pupilă*. La lumină prea intensă, irisul își micșorează pupila pentru a proteja retina, iar la lumină prea slabă, irisul își mărește pupila pentru a mări iluminarea imaginii de pe retină. *Retina* este o membrană subțire alcătuită din prelungirile nervului optic și conținînd un mare număr de celule senzoriale, care percep lumina, numite *conuri și bastonașe*. Conurile sînt celulele specializate în perceperea luminii intense din timpul zilei, fiind capabile să dea senzații diferite pentru diferite culori. Bastonașele sînt specializate în perceperea luminii de intensitate slabă, fiind practic incapabile să distingă culorile. Ochiul omenesc conține aproximativ 7 milioane conuri și 130 milioane bastonașe, foarte neuniform răspîndite. Conurile ocupă mai ales partea centrală a retinei, în timp ce densitatea bastonașelor crește spre periferie. În partea centrală, puțin mai sus de axul optic, există o regiune numită *pata galbenă* (macula lutea) în mijlocul căreia se află o mică adîncitură — *foveea centralis* — populată exclusiv de conuri, în număr de 13000 — 15000. Sub acțiunea involuntară a mușchilor speciali ai globului ocular, acesta suferă mișcări de rotație în orbita sa, astfel încît imaginea să se formeze totdeauna în regiunea petei galbene, cea mai importantă regiune fotosensibilă a ochiului.

Cristalinul are forma unei lentile nesimetric biconvexe, ce poate fi mai bombat sau mai puțin bombat sub acțiunea reflexă a mușchilor ciliari, modificîndu-și astfel convergența încît imaginea să cadă pe retină. El are o structură stratificată, prezentînd spre margine indicele de refracție de aproximativ 1,38 iar în interior aproximativ 1,41.

*Acomodarea*. Un ochi normal aflat în stare de repaus, are focarul situat pe retină. Din această cauză pentru obiectele situate la infinit, (practic, la distanțe mai mari decît cca 15 m) ochiul formează imaginile pe retină fără nici un efort de modificare a convergenței cristalinului.

Apropiînd obiectul cristalinul se bombează sub acțiunea mușchilor ciliari, așa fel ca imaginea să rămînă tot pe retină. Fenomenul se numește *acomodare*. Cristalinul însă nu se poate bomba oricît și de aceea obiectul poate fi adus doar pînă la o anumită distanță minimă — *distanța minimă de vedere* — sub care ochiul nu mai poate forma imaginea pe retină. Acomodarea ochiului este deci posibilă între un punct aflat o la distanță maximă (*punctul remotum*) care, pentru ochiul normal este la infinit (practic, peste 15 m) și un punct aflat la o distanță minimă (*punctul proximum*), care pentru ochiul normal este de 10—15 cm la tineri și aproximativ 25 cm la adulți. În mod normal ochiul vede cel mai bine, putînd distinge cele mai multe detalii, la o distanță mai mare decît distanța minimă de vedere și anume la aproximativ 25 cm, numită *distanța vederii optime*.

*Defecte de convergență ale ochiului*. *Ochiul miop* este mai alungit decît cel normal, astfel că focarul său se află în fața retinei (fig. IV. 2.39 b). Cu alte cuvinte imaginile obiectelor îndepărtate (situate la infinit) nu se formează pe retină ci în fața ei. Prin bombarea cristalinului situația nu se îmbunătățe-

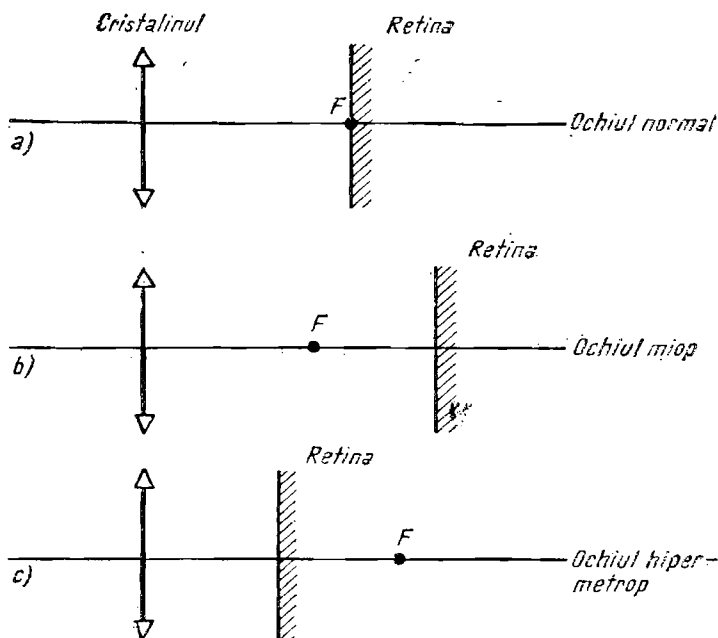


Fig. IV.2.39

tește deoarece aceste imagini nu se duc pe retină ci se îndepărtează de ea. Obiectul trebuie apropiat pînă la o anumită distanță (cîțiva metri în funcție de gradul de miopie) pentru ca imaginea să se formeze pe retină cu ochiul neacomodat. Apropiind mai mult obiectul, ochiul poate păstra, prin acomodare, imaginea pe retină pînă la o distanță minimă de cca. 5 cm. Ochiul miop are așadar atît punctul remotum cît și cel proximum mai apropiate decît ochiul normal. El nu poate vedea obiecte mai depărtate decît punctul său remotum. Defectul se corectează cu ochelari alcătuiți din lentile divergente, construite astfel ca focarul lor (virtual) să se afle în punctul remotum al ochiului miop.

*Ochiul hipermetrop* este mai „turtit” decît ochiul normal, astfel că focarul său se află în spatele retinei (fig. IV. 2.39c). Cu alte cuvinte în starea relaxată a ochiului hipermetrop, imaginile obiectelor de la infinit nu se formează pe retină, și în spatele ei. Nici acest ochi nu vede deci obiectele de la infinit, în stare relaxată. Spre deosebire de cel miop însă, el poate prin acomodare (bombarea cristalinului) să aducă imaginea pe retină. Distanța minimă pînă la care poate vedea (acomodat) este însă mai mare decît la ochiul normal. Așadar hipermetropul poate vedea obiectele îndepărtate numai cu efort de acomodare, iar obiectele mai apropiate, care intră în limitele de acomodare ale unui ochi normal, nu le poate distinge deloc. Folosind ochelari cu lentile convergente, corect calculate (în funcție de gradul de hipermetropie), aceste lentile îl pot ajuta să aducă imaginea pe retină, atît pentru obiecte îndepărtate, privind neacomodat, cît și pentru obiecte apropiate, privind acomodat.

*Ochiul prezbit* este ochiul oamenilor în vîrstă și se datorește slăbirii cu timpul a capacității de bombare a cristalinului. Avînd posibilități mai reduse de

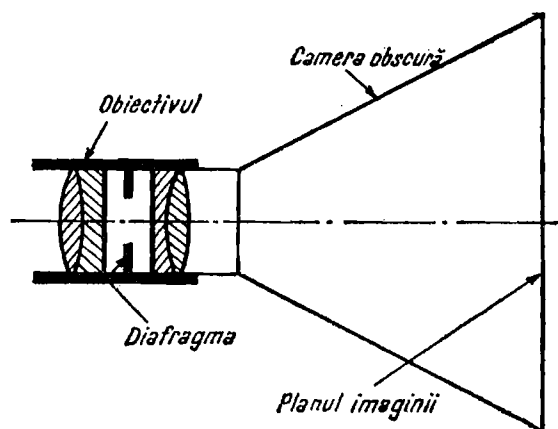


Fig. IV.2.40

bombare a cristalinului, un astfel de ochi va avea punctul proximum mai îndepărtat decât la un ochi normal. Obiectele mai apropiate vor avea deci imaginile în spatele retinei și pentru aducerea lor pe retină se folosesc lentile convergente, care măresc convergența ochiului, ca și în cazul ochiului hipermetrop.

b) **Obiectivul aparatului fotografic.** Obiectivul fotografic este un sistem optic convergent, care formează imagini reale pe filmul sau pe placa aparatului fotografic (fig. IV.2.40). El este alcătuit din mai multe lentile alăturate sau nealăturate din sorturi de sticlă diferite. Există o mare varietate de tipuri de obiective, avînd cele mai diverse destinații. În fig. IV.2.40 este arătat un obiectiv aplanat; obiectivul aplanat este un sistem simetric format din patru lentile, corectat pentru aberația de sfericitate și aberația cromatică.

**Deschiderea relativă.** Dacă  $d$  este diametrul deschiderii utile a obiectivului (deschiderea diafragmei aparatului) și  $f$  distanța focală a lui, atunci raportul  $d/f$  se numește *deschiderea relativă a obiectivului*. De obicei pe montura obiectivului este notată deschiderea relativă maximă. De exemplu, un obiectiv cu deschiderea maximă a diafragmei sale de 25 mm și cu distanța focală de 50 mm, va avea deschiderea relativă maximă  $d_{max}/f = 25/50$ ; pe montura sa va fi scris 1:2. Deschiderea relativă poate fi variată cu ajutorul diafragmei aparatului. Luminozitatea aparatului este direct proporțională cu pătratul deschiderii relative. Dacă, de exemplu, vrem să mărim luminozitatea de două ori, atunci vom lua deschiderea de 2 ori mai mare.

**Profundimea câmpului.** Dacă este bine corectat, un obiectiv fotografic formează cu mare precizie pe placa fotografică imaginea unui punct situat pe axul optic sau a unor mulțimi de puncte din vecinătatea axului, situate pe un plan perpendicular pe ax (plan de punere la punct). În fig. IV.2.41 pe placa fotografică  $E$  se formează imaginile clare ale punctelor din planul ce trece prin  $A_1$  situat la distanța  $p_1$  de obiectivul  $L$ . Orice punct dinafara acestui plan nu va mai da o imagine punctiformă în  $E$ , ci o pată circulară. În fig. IV.2.41 punctele  $A'_1$  și  $A''_1$  vor forma în planul emulsiei fotografice cîte



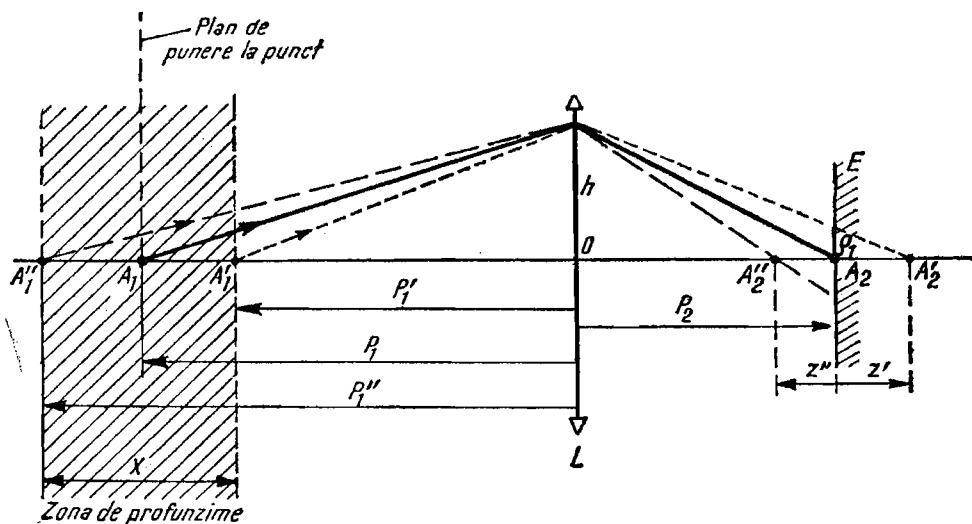


Fig. IV.2.41

un cerc de difuzie de raze  $\rho_1$  și  $\rho_2$ . Dacă aceste raze sînt destul de mici, mai mici decît puterea separatoare a ochiului, cele două pete circulare vor apărea ca fiind punctiforme pentru observatorul care privește direct placa fotografică dezvoltată și fixată, sau copia directă a acestora pe hîrtie pozitivă. Raza maximă admisibilă în acest caz este  $\rho = 0,1$  mm. Dacă imaginea de pe film urmează să fie mărită, claritatea ei trebuie să fie și mai riguroasă, admițîndu-se de obicei  $\rho = 1/30$  mm. Așadar, dacă petele circulare de pe placă formate de intersecția conurilor de lumină provenite din  $A_1$  și  $A_1'$  cu placa fotografică, au razele mai mici decît  $\rho = 1/30$  mm, aceste pete vor apărea ca fiind punctiforme, constituind deci imaginile punctelor necoplanare  $A_1$  și  $A_1'$  în planul plăcii fotografice, deși riguros vorbind, imaginile geometrice ale acestora se formează în  $A_2$  și  $A_2'$ , așa cum se vede pe figură. Datorită deci puterii separatoare limitate a ochiului omenesc, se pot obține imagini clare în planul filmului nu numai pentru punctele din planul punerii la punct, ci și pentru altele situate pe o anumită „adîncime” de-a lungul axului optic. Se pune acum problema: cît de mare este această adîncime, care este intervalul de o parte și de alta a planului punerii la punct în care sînt situate obiectele ce formează imagini clare pe placă? În fig. IV.2.41 obiectivul  $L$  este pus la punct pentru obiectul  $A_1$ ; imaginea acestuia este  $A_2$ . Notînd cu  $\rho$  valoarea maximă admisă pentru cercul de difuzie de pe placa situată în  $A_2$ , va trebui să calculăm lungimea  $X$  a zonei în care se pot afla obiectele ce dau imagini clare pe placă. Mărima  $X$  poartă numele de *profundimea cîmpului* pentru un obiectiv dat. Pentru calculul acestei profundimi în funcție de parametrii obiectivului, va trebui să ținem seama de faptul că razele  $\rho_1$  și  $\rho_2$  sînt foarte mici, aflîndu-se sub o anumită valoare admisibilă  $\rho$ .

Așa cum se vede din fig. IV.2.41, profundimea este:

$$X = P_1' - P_1. \quad (2.38)$$

Expresia lui  $P'_1$  se poate scoate din formulele pentru punctele conjugate  $A_1, A_2$  și  $A'_1, A'_2$  și anume:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}, \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p_2 + z'} = \frac{1}{f}, \quad (2.40)$$

în care, pentru  $z'$  folosim relațiile de asemănare în triunghiurile dreptunghice ușor de observat pe fig. IV.2.41:

$$\frac{z'}{\rho} = \frac{p_2 + z'}{h} \quad (2.41)$$

unde  $h$  este raza deschiderii utile a obiectivului.  
Se găsește:

$$z' = \frac{p_2 \rho}{h - \rho}, \quad (2.42)$$

iar din (2.39) obținem:

$$p_2 = \frac{fp_1}{p_1 - f}. \quad (2.43)$$

Înlocuind (2.43) în (2.42) și în (2.40) precum și pe (2.42) în 2.40) găsim:

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{\frac{fp_1}{p_1 - f} + \frac{fp_1}{p_1 - f} \frac{\rho}{h - \rho}} \quad (2.44)$$

În urma unor transformări elementare obținem:

$$p'_1 = \frac{fp_1 h}{fh + \rho(p_1 - f)}. \quad (2.45)$$

Expresia lui  $p'_1$  se scoate din formula (2.39) pentru punctele conjugate  $A''_1, A'_2$ :

$$\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p_2 - z''} = \frac{1}{f}, \quad (2.46)$$

și folosind de asemenea relația de asemănare evidentă pe fig. IV. 2.41:

$$\frac{z''}{\rho} = \frac{p_2 - z''}{h}. \quad (2.47)$$

Expresia (2.47) ne dă:

$$z'' = \frac{p_2 \rho}{h + \rho}. \quad (2.48)$$

Înlocuind (2.43) în (2.46) și în (2.48), precum și pe (2.48) în (2.46) găsim:

$$\frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{\frac{fp_1}{p_1 - f} - \frac{fp_1}{p_1 - f} \frac{\rho}{h} - \rho}, \quad (2.49)$$

care conduce, în urma unor transformări elementare, la:

$$p_1'' = \frac{fp_1 h}{fh - \rho(p_1 - f)}. \quad (2.50)$$

Înlocuind în (2.38) expresiile (2.45) și (2.50) obținem:

$$X = \frac{fp_1 2h \rho(p_1 - f)}{(fh)^2 - \rho^2(p_1 - f)^2} \quad (2.51)$$

Pentru cazul obișnuit, în care sînt fotografiate obiecte situate la distanțe mult mai mari decît distanța focală, adică  $p_1 \gg f$ , expresia (2.51) devine:

$$X \simeq \frac{fp_1^2 2 \rho h}{(fh)^2 - (\rho p_1)^2}. \quad (2.52)$$

Scoțînd  $p_1$  în factor la numitorul expresiei (2.52) se obține:

$$X = \frac{f 2 \rho h}{\left(\frac{fh}{p_1}\right)^2 - \rho^2}. \quad (2.53)$$

Dar în cazul obiectivului fotografic imaginile obiectelor se formează foarte aproape de focar, încît practic  $p_2 \simeq f$ . Din această cauză mărirea liniară dată de expresia (2.27) și folosind (2.26) devine cu bună aproximație  $\gamma = p_2/p_1 \simeq f/p_1$ . Expresia (2.53) devine în acest caz:

$$X = \frac{f 2 \rho h}{(\gamma h)^2 - \rho^2}. \quad (2.54)$$

Cum raza  $\rho$  este foarte mică, această ultimă expresie se poate scrie:

$$X = \frac{f 2 \rho}{\gamma^2 h}. \quad (2.55)$$

Notînd  $D = 2\rho$  diametrul petei circulare admisibile de pe placa fotografică și făcînd să apară în (2.55) diametrul  $2h$  al diafragmei obiectivului, această expresie capătă forma des întîlnită în practica fotografică:

$$X = \frac{2D}{\gamma^2} \frac{f}{2h} \quad (2.56)$$

Relația (2.56) arată că, fiind dat un punct  $A_1$  prin distanța de punere la punct  $p_1$  (adică o mărirea liniară  $\gamma = f/p_1$  dată), profunzimea cîmpului poate fi mărită prin micșorarea deschiderii  $2h$  a diafragmei obiectivului sau a deschiderii relative a lui,  $2h/f$ . De aceea, dacă dorim să fotografiem, de exemplu, un grup numeros de persoane, vom alege o diafragmă suficient de mică, astfel

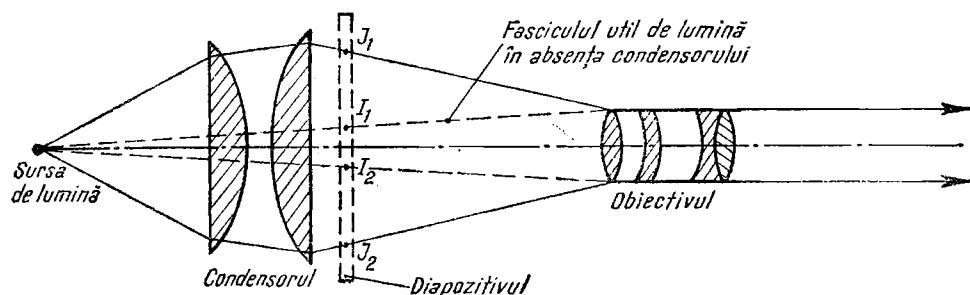


Fig. IV.2.42

ca imaginea fiecărei persoane să apară clar pe film. Din expresia (2.56) se constată de asemenea și faptul că profunzimea crește cu descreșterea pătratului măririi liniare, sau cu creșterea pătratului distanței de fotografiere. Așadar, precauții mai mari privitoare la zona de claritate se vor lua mai ales la distanțe mai mici deoarece la aceste distanțe această zonă este mai puțin întinsă.

c) **Aparatul de proiecție.** Aparatul de proiecție formează imagini reale răsturnate și mărite ale unor obiecte transparente sau opace. Aceste imagini sînt proiectate de obicei pe un ecran, obiectul fiind astfel așezat încît imaginea răsturnată dată de aparat să apară în poziție verticală. Dacă aparatul este destinat *proiecției obiectelor transparente* (diapozitive), el se numește *diascop* (dia = prin; skopein = a observa, a vedea), dacă el servește pentru *proiecția obiectelor opace* (de exemplu, desenele de pe o pagină de carte), atunci se numește *épiscop* (epi = pe). De multe ori aceste două funcțiuni sînt unite în același aparat, care poartă în acest caz, numele de *epidiascop*. Există foarte multe tipuri constructive de aparate de proiecție. Piesele lor principale sînt însă aceleași: sursa de lumină intensă, condensorul de lumină și obiectivul. În fig. IV.2.42 este dată spre exemplificare schema unui diascop.

**Rolul condensatorului.** Așa cum se vede pe fig. IV.2.42, dacă nu ar exista condensorul, atunci numai fasciculul limitat de razele  $SI_1$  și  $SI_2$  ar intra în obiectiv, în timp ce în prezența lui, fasciculul luminos este mai larg (limitat de razele  $SJ_1$  și  $SJ_2$ ), ceea ce face ca imaginea de pe ecran să fie mai luminoasă. Pe de altă parte, dacă în absența condensatorului poate fi proiectată pe ecran doar imaginea porțiunii  $I_1I_2$  a obiectului, în prezența sa, porțiunea explorată este considerabil mai mare (regiunea cuprinsă între  $J_1$  și  $J_2$ ).

Deoarece sursa  $S$  este foarte apropiată de condensor se vede că el lucrează cu fascicule largi, ceea ce duce la aberații de sfericitate foarte mari. Pentru reducerea acestor aberații, condensorul este alcătuit de obicei din două lentile planconvexe așezate cu fețele curbe spre interior, adică spre fasciculele aproximativ paralele.

d) **Lupa.** După cum s-a văzut, ochiul nu poate distinge amănunte oricît de mici, din cauza puterii separatoare limitate de care dispune. Putem mări puterea separatoare a ochiului folosind o lupă, care este o lentilă convergentă (sau un sistem convergent) cu distanța focală mică și care se așază între obiect și ochi astfel încît să formeze o imagine virtuală a obiectului, dreaptă și mărită. Pentru aceasta lupa trebuie să ocupe o astfel de poziție, încît obi-

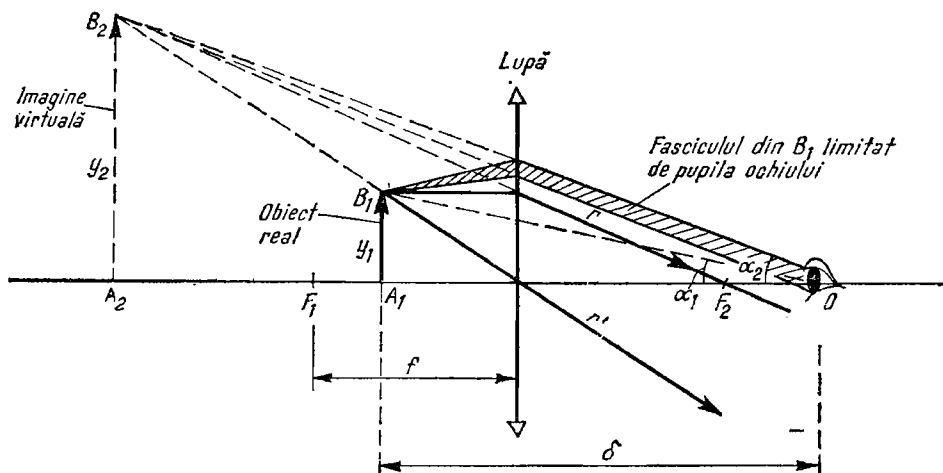


Fig. IV.2.43

ectul  $y_1$  să se afle între focar și vârful lentilei (fig. IV.2.43). În fig. IV.2.43, pe lângă razele  $r$  și  $r'$ , cu ajutorul cărora s-a construit imaginea virtuală  $y_2$ , s-a figurat și fasciculul de lumină (hașurat) care intră în ochi, provenind din punctul extrem al obiectului  $y_1$  și limitat de pupila ochiului. În absența lupei, ochiul vedea obiectul  $y_1$  sub unghiul  $\alpha_1$ . Folosind lupa, ochiul privește imaginea virtuală  $y_2$  pe care o vede sub unghiul  $\alpha_2$ , mai mare decât  $\alpha_1$ . Observatorul așază astfel lupa, încât imaginea să se formeze la o distanță de ochi mai mare decât distanța minimă de vedere clară ( $\delta = 25$  cm) și de preferință la infinit, pentru a evita acomodarea. Pentru aceasta, obiectul  $y_1$  se va afla în imediata vecinătate a focarului.

**Puterea lupei.** Prin definiție, puterea este raportul dintre diametrul aparent al imaginii ( $\text{tg } \alpha_2$ ) și înălțimea  $y_1$  a obiectului:

$$P = \frac{\text{tg } \alpha_2}{y_1}. \quad (2.57)$$

Imaginea  $y_2$  fiind, cum am spus, destul de departe, razele provenite de la ea sînt aproape paralele și de aceea raza  $r'$  face cu axul optic aproximativ unghiul  $\alpha_2$ . În consecință, se poate scrie cu bună aproximație:  $\text{tg } \alpha_2 \simeq y_1/f$  și deci:

$$P = \frac{y_1/f}{y_1} = \frac{1}{f}. \quad (2.58)$$

Puterea lupei este deci numeric egală cu convergența ei.

Uneori lupa este caracterizată, convențional și prin grosiment, adică prin raportul dintre diametrul aparent al imaginii (al obiectului privit prin lupa), și diametrul aparent al obiectului privit liber:

$$G = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}. \quad (2.59)$$

În mod normal, obiectul  $y_1$  privit cu ochiul liber, se află la distanța minimă de vedere clară,  $\delta$ , așa încît  $\text{tg } \alpha_1 = y_1/\delta$  și deci:

$$G = \delta \frac{\text{tg } \alpha_1}{y_1}.$$

Folosind relația (2.57) vom obține:

$$G = \delta P = 0,25P = \frac{1}{4f}. \quad (2.60)$$

O lentilă simplă, cu distanță focală mică, folosită ca lupă, este afectată puternic de aberații (de sfericitate, cromatice etc.), care limitează puterea ei și reduc mult din calitățile imaginii. De aceea lupele cu convergență mare sînt de fapt sisteme de lentile fixate într-o montură metalică, corectate pentru majoritatea aberațiilor. Puterea optică a lupelor nu poate însă atinge valori prea mari. În general,  $P$  nu depășește 100 dioptrii (deci un grosiment de 25 ori), iar cea mai mică distanță separabilă cu lupa (puterea separatoare liniară maximă a lupei) este de aproximativ  $0,003 \text{ mm} = 3\mu\text{m}$ .

e) **Microscopul.** Pentru a se putea distinge obiecte ale căror dimensiuni liniare cad sub puterea separatoare a lupei, se utilizează un aparat optic mai complex, microscopul (mikros-mic, skopia = observare). El este alcătuit din două sisteme de lentile, montate în corpuri metalice separate, unul în vecinătatea obiectului, numit *obiectiv* și altul în vecinătatea ochiului, numit *ocular*. Sistemul acesta mai este numit și *microscop compus*, în timp ce lupa mai poartă și numele de *microscop simplu*.

În fig. IV.2.44 se poate vedea mersul razelor și construcția imaginilor printr-un microscop, în care obiectul și ocularul sînt reduse, pentru simplificare, la două lentile subțiri. Obiectul de cercetat (preparatul microscopic) avînd o dimensiune liniară  $y_1$  se așază în vecinătatea focarului  $F_1$  al obiectivului în stînga lui, pentru a se forma o imagine  $y'$  reală, mărită și răsturnată. Imaginea  $y'$  este „obiect” (real) pentru ocularul microscopului așezat astfel încît  $y'$  să cadă între focarul obiect  $F_2$  al ocularului și ocular, în scopul obținerii unei imagini virtuale și mărite,  $y_2$  dată de ocular, ea constituind totodată și imaginea finală dată de microscop. În fig. IV.2.44 pe lîngă cele două raze  $r$  și  $r'$  care au servit la construcția imaginilor, s-a figurat ca și la lupă fasciculul (cel hașurat) care pătrunde în ochi prin pupila sa, provenind de la un punct marginal al obiectului  $y_1$ . Unghiul  $\beta_2$  de înclinare a acestui fascicul față de axul optic constituie unghiul sub care se vede imaginea  $y_2$ . El este mult mai mare decît  $\beta_1$  — unghiul sub care s-ar vedea obiectul  $y_1$  privit liber, fără microscop.

*Puterea optică a microscopului.* Fiind destinat, ca și lupa, obținerii unor imagini virtuale ale obiectelor apropiate, microscopul este caracterizat corect prin puterea optică adică:

$$P = \frac{\text{tg } \beta_2}{y_1} \quad (2.61)$$

Deoarece ochiul preferă să privească neacomodat imaginea  $y_2$ , aceasta se va afla la o distanță destul de mare între punctul proximum și cel remotum, încît razele emergente sînt aproape paralele. În consecință raza  $r'$ , de exemplu,

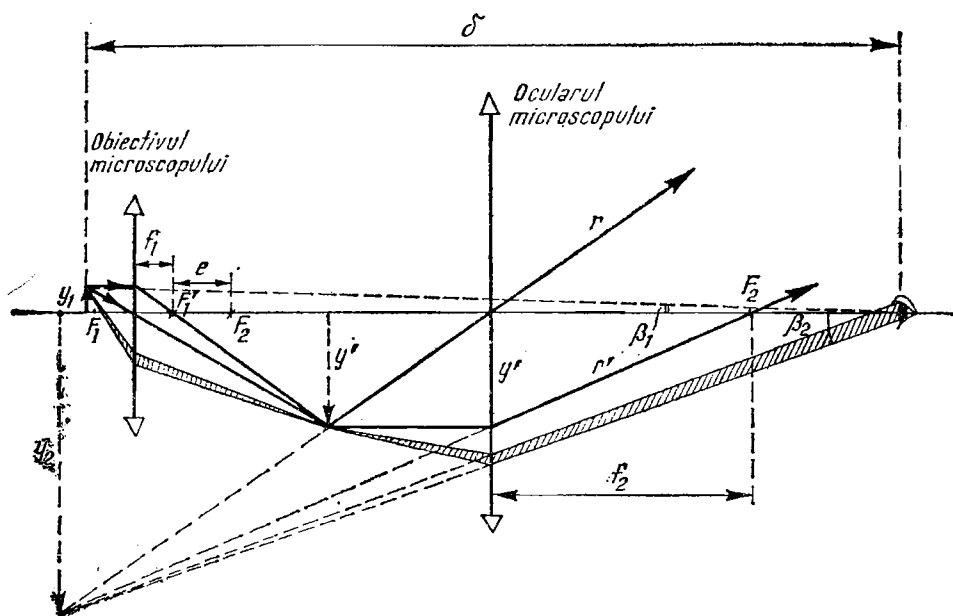


Fig. IV.2.44

va face cu axul optic aproximativ unghiul  $\beta_2$  și atunci  $\text{tg } \beta_2 \approx y'/f_2$  după cum se vede ușor pe fig. IV.2.44. Așadar puterea optică este dată de:

$$P = \frac{y'}{y_1 f_2}. \quad (2.62)$$

Imaginea intermediară  $y'$ , aflându-se foarte aproape de focarul  $F_2$  (practic, confundându-se cu  $F_2$ ), ea va constitui o catetă a unui triunghi dreptunghic în care cealaltă catetă este aproximativ egală cu  $e$  — distanța dintre focarul posterior  $F'_1$  al obiectivului și focarul anterior  $F_2$  al ocularului. În figură  $y'$  nu este prea aproape de  $F_2$ , deoarece s-a urmărit ca  $y_2$  să nu iasă din spațiul paginii. Din asemănarea acestui triunghi cu cel care are catetele  $f_1$  și  $y_1$  rezultă imediat:

$$\frac{y'}{y_1} = \frac{e}{f_1}$$

și deci:

$$P = \frac{e}{f_1 f_2}. \quad (2.63)$$

Puterea microscopului este deci cu atât mai mare cu cât intervalul  $e$  este mai mare și cu cât convergențele obiectivului ( $1/f_1$ ) și ocularului ( $1/f_2$ ) sînt mai mari. De exemplu, un microscop cu distanța focală a obiectivului  $f_1 = 4 \text{ mm}$  și a ocularului  $f_2 = 2 \text{ cm}$ , avînd distanța între focare,  $e = 20 \text{ cm}$ , va avea  $P = 2500$  dioptrii. Expresia puterii optice dată de (2.63) mai poate fi scrisă și sub forma:

$$P = \gamma_{ob} P_{oc}. \quad (2.64)$$

adică produsul dintre mărirea liniară  $\gamma_{ob}$  a obiectivului și puterea  $P_{oc}$  a ocularului. Aceasta se poate stabili ușor plecând de la relația (2.62) și observând că, prin definiție  $y'/y_1 = \gamma_{ob}$  și  $1/f_2 = P_{oc}$  (ocularul funcționând ca o lupă).

În mod convențional, microscopul este deseori caracterizat prin grosisment:

$$G = \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{tg} \beta_1}, \quad (2.65)$$

în care  $\beta_1$  este unghiul sub care se vede obiectul, direct, așezat la distanța minimă de citire,  $\delta = 0,25$  m. Deoarece  $\operatorname{tg} \beta_2 \simeq y'/f_2$  și  $\operatorname{tg} \beta_1 = y_1/\delta$  (vezi fig. IV.2.44), iar  $y'/y_1 = e/f_1$ , obținem:

$$G = \frac{\delta e}{f_1 f_2}, \quad (2.66)$$

sau ținând seama de (2.63) obținem ca și în cazul lupei, relația:

$$G = P\delta = \frac{P}{4}. \quad (2.67)$$

Grosismentul este o mărime fără dimensiuni, deoarece  $P$  este inversul unei distanțe, iar  $\delta$  are dimensiunea unei lungimi. Microscopul din exemplul numeric de mai sus, cu puterea de 2500 dioptrii, va avea un grosisment de 625 ori.

De obicei, un microscop dispune de mai multe obiective și oculare, ce pot fi așezate pe rând în diverse combinații la capetele tubului microscopic, realizându-se astfel diverse puteri, conform relației (2.66), în care  $f_1$ ,  $f_2$  și  $e$  capătă prin aceste combinații diverse valori. Există la unele microscopice (mai rar) și posibilitatea de a varia intervalul  $e$  într-un anumit domeniu, prin deplasarea ocularului, pentru a obține variații ale puterii optice. Majoritatea microscopelor au însă distanța  $e$  fixă și deci o putere constantă pentru o pereche obiectiv-ocular. Observatorul poate deplasa doar tubul-suport al obiectivului și ocularului în scopul realizării „punerii la punct” a preparatului microscopic. Operația de punere la punct se încheie în momentul în care observatorul a găsit o poziție a tubului suport pentru care el vede foarte clar prin microscop obiectul de cercetat, ceea ce înseamnă că imaginea virtuală finală a acestuia ( $y_2$ ) se află la o distanță suficient de mare, încât să poată fi observată fără efort de acomodare.

Pentru a se putea obține imagini suficient de luminoase, microscopul este prevăzut, de regulă, cu un condensor care concentrează lumina de la sursă pe preparatul microscopic.

**Rolul imersiei.** În urma refracției datorită trecerii din sticlă în aer, o parte din razele provenite de la obiectul microscopic se pierde, nu pătrunde în obiectiv (raze de tip 1 din fig. IV.2.45). Punând pe lama de sticlă un lichid cu indice de refracție apropiat de cel al sticlei, de exemplu *ulei de cedru* ( $n = 1,515$ ) și coborînd tubul microscopului pînă ce vârful obiectivului se cufundă în ulei, aceste raze trec aproape nedeviate, intrînd în obiectiv (vezi raza 2), contribuind astfel la îmbunătățirea calității imaginii. Cu ajutorul obiectivului cu imersie au fost studiate aproape toate genurile de bacterii cunoscute pînă în prezent.

Performanțele microscopelor cu lumină vizibilă merg pînă la măriri de ordinul 2000–3000 de ori, corespunzînd la o putere separatoare limită de



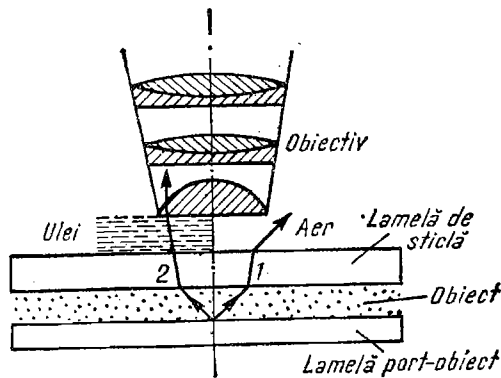


Fig. IV.2.45

aproximativ  $0,25 \mu\text{m}$ . Prin înregistrare pe cale fotografică și folosind lumină ultravioletă („ultramicroscopul”) se pot distinge obiecte pînă la o finețe dimensională de  $0,15 \mu\text{m}$ , la mărimi de 6000—7000 de ori. Cu toate acestea, virusurile, de exemplu (inframicrobii) nu pot fi observați cu aceste microscopae; observarea lor cere o mărire cel puțin de ordinul 10.000—15.000 de ori, ceea ce nu se poate obține cu microscopul optic, deoarece astfel de mărimi înseamnă puteri separatoare mai mici decît cea mai mică lungime de undă din spectrul vizibil (puterea separatoare de  $0,2 \mu\text{m}$ , de exemplu, reprezintă jumătate din lungimea de undă a radiației de  $4000 \text{ \AA}$ ). Un pas înainte l-a făcut microscopul electronic care realizează în prezent puteri separatoare de ordinul cîtorva  $\text{\AA}$ .

f) **Luneta.** Luneta este destinată observării obiectelor foarte îndepărtate. De la oricare punct al unui astfel de obiect ajung la noi fascicule practic paralele. Să considerăm un obiect astronomic  $AB$  și să îndreptăm luneta cu axul optic spre extremitatea  $A$  (fig. IV.2.46). Toate razele provenite din  $A$  vor fi paralele cu axul optic și vor converge în focarul principal imagine  $F'_1$  al obiectivului lunetei. În fig. IV.2.46 am luat o singură rază din acest fascicul și anume,

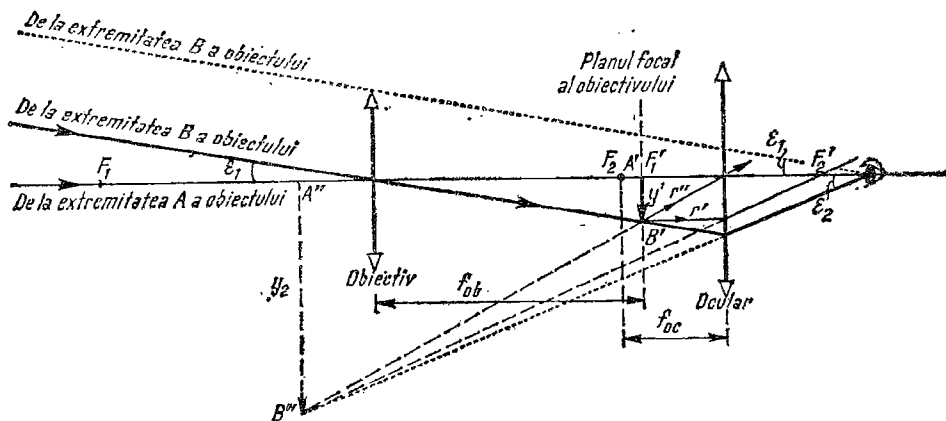


Fig. 2.46

de-a lungul axului optic. De la punctul extrem  $B$  va sosi de asemenea un fascicul de raze paralele între ele, dar înclinate cu unghiul  $\varepsilon_1$  față de primul fascicul.  $\varepsilon_1$  va fi deci unghiul sub care se vede obiectul ceresc cu ochiul liber. Punctul de convergență al fasciculului paralel din  $B$  va fi în focarul secundar  $B'$ , care va defini astfel în planul focal al obiectivului imaginea *reală*  $y'$ . Trebuie remarcat că obiectul  $AB$  fiind foarte departe de focarul  $F_1$  al obiectivului, imaginea intermediară  $y'$  este *micșorată*, spre deosebire de imaginea intermediară a microscopului care era mult mărită, datorită faptului că obiectul de cercetat era foarte aproape de focarul  $F_1$  al obiectivului. Din această cauză, imaginea  $y'$  se afla destul de departe de focarul imagine  $F'_1$ , în timp ce la lunetă aceasta se formează, practic chiar în planul focal al obiectivului. Așadar ocularul lunetei preia o imagine intermediară micșorată a obiectului și formează o imagine definitivă  $y_2$  virtuală și mărită față de  $y'$ . În fig. IV.2.46 imaginea intermediară  $y'$  a fost construită ducând planul focal perpendicular pe ax în  $F'_1$  și aflând punctul ( $B'$ ) în care o rază din  $B$  trecând prin vârful lentilei obiectiv înțeapă acest plan (este figurată urma acestui plan printr-un segment punctat.) Imaginea finală  $y_2$  este obținută trasând din  $B'$  două raze cu drum cunoscut: una ( $r'$ ) paralelă cu axul optic, va părăsi ocularul trecând prin focarul imagine  $F'_2$  al său și una ( $r''$ ) trecând prin centrul optic al ocularului, va trece mai departe nedeiată (ocularul este luat — ca și obiectivul — sub forma unei lentile subțiri convergente). După aflarea punctului  $B''$  s-a putut construi mersul complet al razei din  $B$  pînă la pupila ochiului,  $\varepsilon_2$  fiind unghiul sub care se vede imaginea finală  $y_2$ .

*Grosismetul lunetei.* Fiind vorba de un aparat ce furnizează imagini *virtuale* ale unor obiecte *îndepărtate*, luneta se caracterizează prin grosismet:

$$G = \frac{\text{tg } \varepsilon_2}{\text{tg } \varepsilon_1}. \quad (2.68)$$

Căutînd să privească neacomodat, adică să aibă pe  $y_2$  cît mai departe (practic la infinit), observatorul mînuiește ocularul pînă ce face ca focarul acestuia,  $F_2$ , să coincidă cu planul lui  $y'$ , deci cu focarul posterior  $F'_1$  al obiectivului (sistem afocal). În acest caz, razele în direcția lui  $B''$  sînt practic paralele.  $r''$  este deci înclinat față de axul optic cu  $\varepsilon_2$ , iar  $\text{tg } \varepsilon_2 = y'/f_{oc}$ . Ținînd seama că  $\text{tg } \varepsilon_1 = y'/f_{ob}$ , rezultă:

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}. \quad (2.69)$$

Deoarece ocularul funcționează ca o lupă, cu puterea  $P_{oc}$ , expresia (2.69) devine:

$$G = f_{ob} P_{oc}. \quad (2.70)$$

Grosismetul lunetei este deci egal cu raportul dintre distanța focală a obiectivului și cea a ocularului, sau cu produsul dintre distanța focală a obiectivului și puterea ocularului. Se poate mări deci grosismetul mărind distanța focală a obiectivului și utilizînd oculare cît mai convergente.

Luneta studiată mai sus se mai numește și *lunetă astronomică*. Ea dă imagini virtuale *răsturnate*, ceea ce nu constituie un inconvenient prea mare în

observarea corpurilor cerești. Pentru observarea obiectelor terestre, lunetele au un dispozitiv de inversare a imaginii, astfel ca imaginea finală să fie dreaptă. Se introduce, de exemplu, între obiectiv și ocular o lentilă convergentă, numită vehiculul lui Kepler. O altă cale constă în folosirea unei lentile divergente ca ocular (ocular negativ), așezată între obiectiv și imaginea intermediară reală  $A'B'$ . Imaginea finală va fi virtuală și dreaptă în raport cu obiectul terestru vizat cu luneta. Aceasta se numește *luneta olandeză* sau a lui *Galilei* și este primul tip cunoscut de lunetă. Ea are avantajul că este mai scurtă decât cea astronomică și de aceea este folosită ca lunetă portabilă, întâlnită mai ales sub forma de binoclu (două lunete Galilei asociate pe un același suport, dând posibilitatea observatorului să privească cu ambii ochi).

Lunetele cu obiective formate din lentile de sticlă se mai numesc și *telescoape dioptrice*, iar cele cu obiectivul constând dintr-o oglindă concavă — *telescoape catoptrice*, sau simplu, *telescoape*.

Calitățile lunetei cresc dacă se mărește diametrul obiectivului. Dar, obiective din lentile cu diametru prea mare nu se pot construi. Datorită dificultăților de obținere a omogenității unor mase transparente atât de mari, precum și din cauza deformării lentilelor sub propria lor greutate, obiectivele cu lentile depășesc cu greu diametrul de 1 metru. De aceea se utilizează în acest scop obiective cu oglinzi concave, care alcătuiesc telescoape. Astfel de oglinzi pot atinge diametre pînă la 5 m (observatorul de la Palomar). În plus, aceste obiective sînt complet lipsite de aberații cromatice, deoarece lipsește dispersia luminii, imaginile formîndu-se numai prin reflexii. În fig. IV.2.47 este dată schema unui telescop cu vizare laterală, perpendicular pe axul optic, fără să

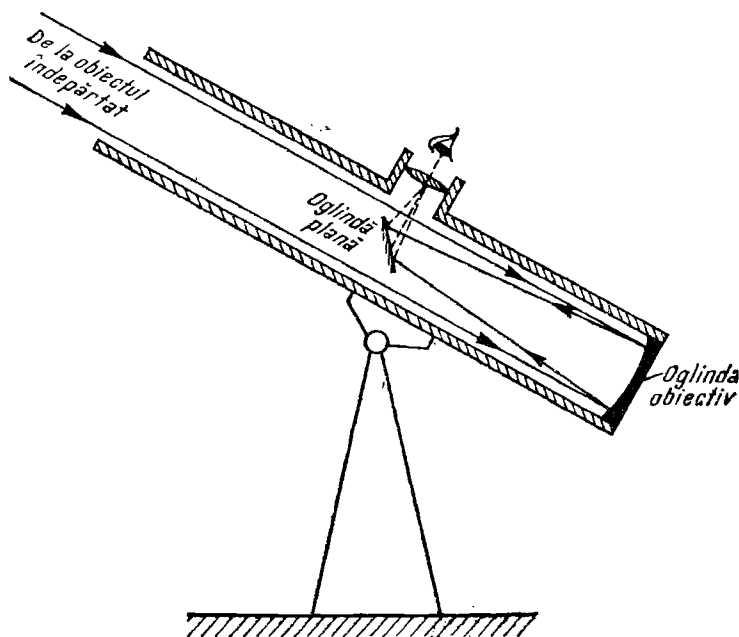


Fig. IV.2.47

fie indicată în amănunt formarea imaginii. Acest tip de telescop a fost inventat de *Newton* (1672). Telescoapele cu viziune directă (de-a lungul axei optice) se numesc telescoape de tip *Cassegrain*. Ele au fost construite de Gregory în 1663 și perfecționate ulterior de Cassegrain.

*Scurt istoric asupra descoperirii lunetei.* Nu se știe exact cine a descoperit luneta și nici data acestei descoperiri. Este însă foarte probabil că prima lunetă a fost descoperită în Olanda în jurul anului 1608 în atelierul meșterului Zaharias Jensen, constructor de lentile și ochelari din orașul Middelbourg situat pe insula olandeză Walcheren. Descoperirea a fost făcută întâmplător, de către copiii meșterului, care jucându-se cu lentilele de ochelari au observat că așezând o lentilă divergentă la o oarecare distanță de una convergentă pe același ax, obiectele privite prin aceste lentile par a fi mai mari și mai apropiate decât sînt în realitate. Pornind de la această observație, Jensen a construit prima lunetă, care deși a fost ținută în secret, cu scopuri militare, a devenit totuși cunoscută și pe alte meleaguri. Se pare că un străin venind în Olanda pentru a se interesa de această construcție la meșterul Jensen, a nimerit din greșeală la un alt atelier de ochelari, aflat pe aceeași stradă, al meșterului Jean Lippersey. Acesta, aflînd pentru prima dată de un astfel de dispozitiv, încearcă și el să confecționeze ceva asemănător și reușește să redescopere luneta. El nu mai ține în secret această descoperire și capătă un brevet de inventator în 1606 pentru ea. Dar tot în această perioadă, profesorul de fizică și inginerie militară de la Universitatea din Padua, Galileo Galilei (1564—1642) află de interesanta descoperire în urma unei călătorii făcută la Veneția (1609). Dîndu-și seama de importanța lunetei pentru cercetările sale de astronomie, el reușește în 1610 să-și construiască una a cărei putere nu era prea mare (mărea de aproximativ 60 ori) dar care i-a permis să descopere sateliții lui Jupiter, doi sateliți ai lui Saturn, fazele planetei Venus, petele solare, relieful accidentat al Lunii, rotația Pămîntului etc. Datorită acestor importante descoperiri științifice și în general datorită rolului de instrument științific atribuit de către marele savant lunetei, ea a rămas cunoscută sub numele de *luneta Galilei*, deși pentru stabilirea paternității descoperirii ei, tribunalul din Middelbourg a deschis în 1654 un proces, în care principalii pretendenți erau cei doi meșteri pome- niți mai sus.

Este bine să amintim că pînă la Galilei sistemul lumii conceput de astronomul grec Ptolemeu se bucura de autoritate absolută. Conform acestui sistem, Pămîntul era considerat centrul universului, în jurul căruia se roteau pe șapte cercuri concentrice Soarele, Luna și alte cinci planete. Deși Nicolaus Copernic (1473—1543) stabilise, în urma studiilor sale de matematică și fizică, falsitatea cercurilor lui Ptolemeu, arătînd că Pămîntul se învîrtește în jurul Soarelui și nu invers, această nouă concepție nu a putut fi verificată decît după ce Galilei a îndreptat luneta sa către cer. Prin luneta lui oricine putea vedea că, de exemplu, Jupiter cu sateliții săi nu erau altceva decît un sistem Copernic în miniatură. Într-o scrisoare adresată cumnatului său Landucci, vorbind despre luneta construită de el, Galilei spune printre altele... „Erau mai mulți gentilomi și senatori care, deși vîrstnici, au urcat de mai multe ori scările celor mai înalte clopotnițe din Veneția spre a descoperi pe mare pînzele corăbiilor atît de îndepărtate încît venind spre port cu toate pînzele întinse, treceau mai bine de două ore pînă puteau fi văzute cu ochiul liber, fără ocheanul meu“... După cum consemnează istoria cîțiva adversari înverșunați ai concepției lui Copernic au refuzat să privească prin luneta lui Galilei, susținînd că ei știau

mai bine ce se petrece în ceruri din cărțile lui Ptolemeu și Aristotel și nu aveau nevoie de alte dovezi.

În 1613 Cristophe Sheiner construiește luneta cu ocular convergent (ocular pozitiv) calculată în 1611 de Kepler.

În prezent, deși construcția și performanțele lunetelor și telescoapelor au atins culmi greu de imaginat la început, ele sînt în general variante ale celor discutate mai sus: cele dioptrice de tip Galilei sau Kepler și cele catoptrice de tip Newton sau Cassegrain. Bazele teoretice și constructive ale acestora au fost puse, cum am văzut, la începutul secolului al XVII-lea prin strădania și geniul savanților și făurarilor din acea vreme.

## 2.11. NOȚIUNI DE FOTOMETRIE

Fotometria se ocupă cu problema măsurării intensității luminii prin intermediul senzației de lumină pe care o provoacă. Ea stă, ca disciplină științifică, la baza tehnicii iluminatului.

În optica geometrică am văzut că lumina, pătrunzînd în ochi, provoacă la incidența sa pe retină senzația de lumină. Această senzație va fi mai mare sau mai mică, după cum energia transportată de raza de lumină va fi mai mare sau mai mică.

a) **Flux de energie radiantă.** Orice rază de lumină transportă energie. Energia transportată de rază în unitatea de timp printr-o secțiune oarecare se numește *flux de energie radiantă*. Acest flux are deci dimensiunile unei puteri (energie/timp) și se măsoară în watt (în sistemul SI).

b) **Flux luminos.** Ochiul nu este la fel de sensibil pentru diferite lungimi de undă ale fluxului radiant incident. Astfel dacă avem două radiații ce transportă aceeași putere (aceiași flux radiant), dar au lungimi de undă diferite, de exemplu  $\lambda_1 = 5300\text{\AA}$  (verde) și  $\lambda_2 = 6500\text{\AA}$  (roșu), măsurătorile arată că verdele produce o senzație de lumină de 7,8 ori mai intensă decît roșu. Spunem cu alte cuvinte că ochiul este mai sensibil la verde decît la roșu, astfel că dacă dorim să avem aceeași senzație luminoasă pentru ambele radiații, sursa roșie trebuie să fie de 7,8 ori mai intensă.

Pentru a vedea cum variază sensibilitatea ochiului în funcție de lungimea de undă, adică de culoare, se iluminează simultan cele două jumătăți ale unei suprafețe albe (fig. IV.2.48) cu două radiații monocromatice de lungimi de undă diferite și se privesc aceste suprafețe. Să iluminăm de exemplu suprafața din stînga cu puterea radiantă  $P_0$  de lungime de undă  $\lambda_0 = 5550\text{\AA}$ , iar cea din dreapta cu o altă radiație,  $\lambda$ , avînd diverse puteri,  $P_\lambda$ . Alegem fluxul radiant  $P_\lambda$  în așa fel încît ochiul să vadă cele două suprafețe adiacente la fel de luminoase (deși în culori diferite). Cu cît ochiul va fi mai puțin sensibil la o anumită radiație,  $\lambda$  cu atît va trebui să mărim puterea radiației  $P_\lambda$  pentru a da aceeași senzație luminoasă ca și  $P_0$ . Raportul:

$$V_\lambda = \frac{P_0}{P_\lambda}. \quad (2.71)$$

se numește *sensibilitate spectrală relativă a ochiului* și variația ei cu  $\lambda$  este dată în fig. IV.2.49 — obținută experimental prin măsurători asupra unui mare număr de observatori. Ea reprezintă o medie a acestor măsurători și definește

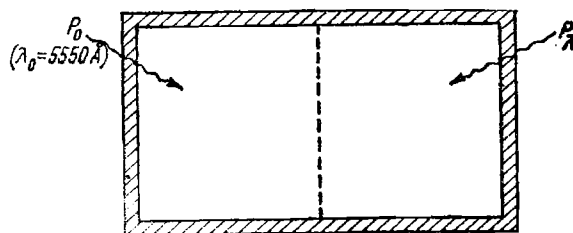


Fig. IV.2.48

aşa-numitul *observator normal*. Se constată că sensibilitatea ochiului este maximă pentru culoarea verde-gălbui cu  $\lambda = 5550 \text{ \AA}$ , devenind aproape nulă în regiunea violetă pentru  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$  şi în regiunea roşie pentru  $\lambda = 7600 \text{ \AA}$ . Aceste limite variază de la observator la observator cu valori nu prea mari. Senzaţia de lumină va fi deci proporţională nu numai cu aportul de energie a fluxului radiant incident  $P_\lambda$ , ci şi cu aptitudinea ochiului de a transforma această energie în senzaţie luminoasă, adică cu sensibilitatea ochiului  $V_\lambda$ , diferită pentru diferite culori. Se defineşte astfel o mărime biofizică numită *flux-luminos*, care caracterizează capacitatea fluxului radiant de a produce o senzaţie luminoasă:

$$\Phi_\lambda = KV_\lambda P_\lambda. \quad (2.72)$$

Fluxul luminos  $\Phi_\lambda$  este o mărime subiectivă, legată de mărimea energetică,  $P_\lambda$  prin intermediul curbei de sensibilitate spectrală a ochiului,  $V_\lambda$ . Comisia Internaţională pentru Iluminat a definit *fluxul luminos* ca un flux de energie radiantă evaluată în funcţie de senzaţia vizuală.

Unitatea de flux luminos este *lumenul* (lm). Ea va fi definită după ce vom defini unitatea de intensitate luminoasă. Deoarece membrul stîng al egalităţii (2.72) introduce o nouă mărime cu o nouă unitate de măsură, ce nu face parte din sistemul mecanic MKS, constanta  $K$  va fi o constantă fizică, avînd dimensiuni şi care se măsoară în lumeni/watt. Ea se mai numeşte şi *echivalent fotometric al radiaţiei*, reprezentînd cîţi lumeni se produc pentru fiecare watt de energie radiantă. Măsurătorile au dus la valoarea aproximativă  $K = 675$

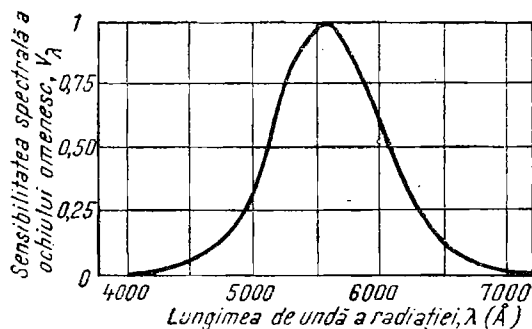


Fig. IV.2.49

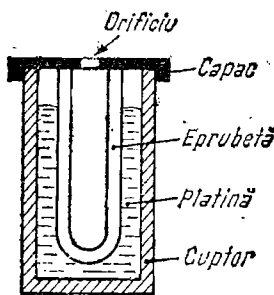


Fig. IV.2.50

lumeni/watt. Dacă, de exemplu, un izvor de lumină monocromatică cu  $\lambda = 5550 \text{ \AA}$  admite un flux radiant de  $2 \text{ W}$ , el va emite un flux luminos  $\Phi_{5550} = 685 \cdot 1 \cdot 2 = 1370 \text{ lumeni}$  (deoarece pentru  $\lambda = 5550 \text{ \AA}$ ,  $V_\lambda = 1$ ).

c) **Intensitate luminoasă.** Intensitatea luminoasă a unui izvor punctiform este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid. Astfel, dacă un izvor punctiform emite uniform într-un unghi solid  $\Omega^*$  fluxul luminos  $\Phi$ , atunci intensitatea luminoasă a acelui izvor este

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \quad (2.73)$$

Unitatea de intensitate este candela (cd.) Ea este unitatea fundamentală a fotometriei și se definește ca fiind  $1/60$  din intensitatea luminoasă emisă în direcție normală de  $1 \text{ cm}^2$  din suprafața corpului absolut negru\*\*, adus la temperatura de solidificare a platinei. S-a luat raportul  $1/60$  pentru ca această unitate să fie cât mai apropiată de vechea unitate de intensitate, foarte greu reproductibilă, „lumânarea internațională“ (b. int.).

Intensitatea luminoasă este mărimea fotometrică *fundamentală* în SI, deși fluxul luminos  $\Phi$  este cel care stabilește legătura cu mărimile fizice din mecanică prin intermediul relației (2.72). Explicația constă în dificultatea de realizare a unui etalon de flux luminos reproductibil cu mare precizie. Etaloanele de flux cele mai perfecționate nu au putut fi reproduse cu precizie mai mare de  $3-4\%$ , ceea ce reprezintă o eroare destul de mare pentru un etalon fotometric. Etalonul de intensitate poate fi reprodus însă cu destulă precizie și ușurință în laborator. În fig. IV.2.50 este dat schematic un etalon de intensitate. Platina topită din cuptoraș menține la incandescență pereții eprubetei, confecționați dintr-un material refractar. Suprafața orificiului din capac, constituie suprafața unui corp absolut negru.

\* Unghiul solid  $d\Omega$  sub care se vede o suprafață  $dS$  dintr-un punct  $O$  este figura geometrică spațială obținută ca înfășurătoare a dreptelor ce izvorăsc din  $O$  și se sprijină pe conturul suprafeței  $dS$ . Expresia sa este  $d\Omega = dA/R^2$ , unde  $dA$  este proiecția segmentului  $dS$  pe o sferă cu centrul în  $O$  având raza  $R$  egală cu distanța de la  $O$  la mijlocul suprafeței  $dS$ . Unitatea de măsură este steradianul (sr), definit ca unghiul solid cu vârful în centrul unei sfere care delimitează pe suprafața sferei o arie egală cu aria unui pătrat având latura egală cu raza sferei.

\*\* Corpul absolut negru (sau radiatorul integral) este corpul care absoarbe în întregime toate radiațiile ce cad pe el, fără a reflecta nimic. Fumiginea și negrul de platină se apropie cel mai mult de proprietățile corpului absolut negru.

Putem stabili acum unitatea de flux, lumenul (lm), care este o unitate derivată. Din expresia  $\Phi = I \Omega$ , punând  $I = 1$  cd și  $\Omega = 1$  steradian, se poate deduce că lumenul este fluxul luminos emis de un izvor punctiform de 1 candelă în unitatea de unghi solid (lsr).

d) **Luminanța.** Dacă izvorul luminos nu este punctiform atunci el se caracterizează prin luminanța  $B$ , definită ca intensitatea luminoasă emisă în direcția normală de unitatea de suprafață. Dacă o suprafață  $S$  a izvorului întins dat emite uniform în direcția normală intensitatea  $I$ , atunci conform definiției:

$$B = \frac{I}{S}. \quad (2.74)$$

Unitatea de măsură pentru luminanță (ceu denumirea mai veche de „strălucire”) este *nitul* (nt) definit ca intensitatea emisă uniform în direcția normală de către unitatea de arie:  $1 \text{ nt} = \text{cd}/\text{m}^2$ . Uneori se mai folosește și *stilbul* (sb),  $1 \text{ sb} = \text{cd}/\text{cm}^2$ .

e) **Iluminarea.** Iluminarea caracterizează suprafețele luminate. Se notează de obicei cu  $E$  și se definește ca fiind fluxul luminos ce cade pe unitatea de arie, Dacă  $\Phi_{\text{incident}}$  este fluxul total ce cade pe o suprafață dată  $S$ , atunci, dacă el este distribuit uniform pe această suprafață, vom avea:

$$E = \frac{\Phi_{\text{incident}}}{S}. \quad (2.75)$$

Unitatea de iluminare este *luxul* (lx) egal cu iluminarea produsă de un flux de un lumen, distribuit uniform pe o suprafață de  $1 \text{ m}^2$ ,  $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm}/\text{m}^2$ . Uneori se mai utilizează și *photul* (ph),  $1 \text{ ph} = 1 \text{ lm}/\text{cm}^2$ .

Subliniem încă o dată că toate cele patru mărimi fotometrice definite mai sus, deși sînt mărimi subiective, ele sînt determinate de o mărime fizică obiectivă, puterea emisă de către izvor sub formă de radiație (putere radiantă sau flux radiant). În tabelul sinoptic IV.1 se vede cum, pe lângă faptul că diferitele unități pot fi exprimate în funcție de unitatea fotometrică (subiectivă) fundamentală, candelă (cd), toate cele patru pot fi exprimate în funcție de unitatea energetică (obiectivă), watt (W), folosind ecuațiile de definiție respective.

TABELUL IV.1.

Mărimea fotometrică	Ecuația de definiție	Unitatea de măsură	Simbolul unității	Relația cu unitatea fotometrică fundamentală (cd)	Relația cu unitatea energetică (W)
Flux luminos	$\Phi_{\lambda} = K V_{\lambda} P_{\lambda}$	Lumen	lm	cd · sr	W
Intensitatea luminoasă	$I = \Phi / \Omega$	Candelă	cd	—	W/sr
Luminanță	$B = I / S$	Nit	nt	cd/m <sup>2</sup>	W/sr · m <sup>2</sup>
Iluminare	$E = \Phi / S$	Lux	lx	cd · sr/m <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>



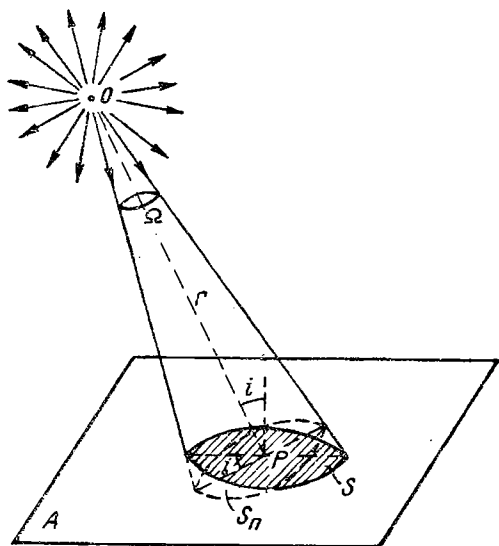


Fig. IV.2.51

f) **Relația dintre intensitate și iluminare.** Să considerăm pe o suprafață  $A$ , iluminată de izvorul punctiform  $O$  de intensitate  $I$ , un punct  $P$  în care cade un fascicul îngust sub unghiul de incidență  $i$  (fig. IV.2.51). Mica arie  $S$ , delimitată de fascicul, este văzută din  $O$  sub unghiul solid  $\Omega = S/r^2$ , unde  $r$  este distanța de la izvor la punctul  $P$ , iar  $S$  proiecția suprafeței  $S$  pe un plan normal pe această rază. Fluxul luminos incident pe suprafața  $S$  este, conform definiției (2.73) dat de:  $\Phi = I \Omega$ .

Cum

$$\Omega = \frac{S_n}{r^2} = \frac{S \cos i}{r^2}, \quad (2.76)$$

rezultă

$$\Omega = \frac{IS \cos i}{r^2}.$$

Iluminarea va fi, în acest caz:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos i. \quad (2.77)$$

Evident, dacă într-un punct al suprafeței iluminate lumina cade perpendicular pe această suprafață, iluminarea ei va fi  $E = I/r^2$ .

Relația (2.77) stă la baza principiului de construcție a celor mai răspândite fotometre. Acestea posedă două arii vecine iluminate fiecare de câte un izvor punctiform, de intensități  $I_1$  și  $I_2$ , așezate la distanțele  $r_1$  și  $r_2$  de aceste suprafețe (deci, de fotometru). Se variază distanțele  $r_1$  și  $r_2$  pînă ce ochiul, privind

printr-un vizor optic cele două plaje, le vede egal iluminate, ceea ce înseamnă  $E_1 = E_2$ . În acest caz:

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}. \quad (2.78)$$

Dacă intensitatea unuia din izvoare este cunoscută (izvor etalon), atunci prin măsurarea distanțelor  $r_1$  și  $r_2$  la egalitate de iluminare a celor două plaje adiacente, se poate calcula intensitatea izvorului necunoscut.

g) **Eficacitatea luminoasă. Tehnica iluminatului.** Orice izvor de lumină, pentru a emite un flux luminos *total*,  $\Phi$ , consumă o putere  $P$ . Raportul:

$$\eta = \frac{\Phi}{P} \quad (2.79)$$

poartă numele de *eficacitate luminoasă* și se măsoară în lumeni pe watt (lm/W). Această mărime indică deci câți lumeni se produc pentru fiecare watt consumat. Lămpile electrice cu incandescență (becurile) cu puteri cuprinse între 25 W și 1 000 W au eficacitatea luminoasă între 7 și 18 lm/W, în timp ce lămpile luminescente (fluorescente) au aproximativ 50 lm/W.

Raportul dintre puterea totală emisă sub formă de energie radiantă în domeniul lungimilor de undă din vizibil și puterea consumată de izvor, se numește *randament în radiație vizibilă*. Aceasta, spre deosebire de eficacitatea luminoasă, nu are dimensiuni. El este de 3—4% pentru becurile obișnuite cu filament incandescent și de aproximativ 20% pentru lămpile luminescente.

Iluminatul prin luminescență, realizat cu ajutorul lămpilor cu descărcări în gaze, este deci mai avantajos, deși necesită instalații mai complicate decât iluminatul electric cu incandescență. În plus, spectrul luminos al lămpilor luminescente este mai apropiat ca structură de spectrul luminii solare, pentru care ochiul uman are cea mai bună adaptare.

Tehnica iluminatului, care cuprinde toate procedeele de producere și distribuție a luminii în vederea desfășurării în condiții optime a diverselor activități, folosește pe larg calculele fotometrice legate de fiziologia vederii. Pe masa de citit, de exemplu, trebuie realizată o iluminare de aproximativ 100 lx, în timp ce pe masa de operație este necesară o iluminare de aproximativ 10 000 lx. Iluminarea naturală maximă în timpul zilei, în plin soare este de aproximativ 100 000 lx.

Ochiul uman s-a adaptat în cursul evoluției sale la lumina emisă de Soare, cel mai important izvor natural de lumină. În fig. IV.2.52 este dată curba de variație a intensității luminoase a Soarelui în funcție de lungimea de undă. Ochiul este sensibil numai la un domeniu spectral relativ îngust, situat aproximativ între lungimile de undă  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$  și  $\lambda = 7600 \text{ \AA}$  (regiunea hașurată de pe fig. IV.2.52).

Distribuția energiei solare este aproape identică cu cea a energiei radiante emisă de corpul absolut negru la temperatura de aproximativ 6000°K.

Distribuția energiei radiante a corpului absolut negru la temperaturile de 2000°K, 3000°K și 3500°K este dată în fig. IV.2.53. Suprafața cuprinsă între abscisă (axa lungimilor de undă,  $\lambda$ ), și curbă este proporțională cu energia totală emisă la temperatura corespunzătoare curbei. Regiunea hașurată reprezintă spectrul vizibil. Această regiune fiind mică față de suprafața totală, rezultă că numai o mică fracțiune din energia radiată de corpul negru incan-

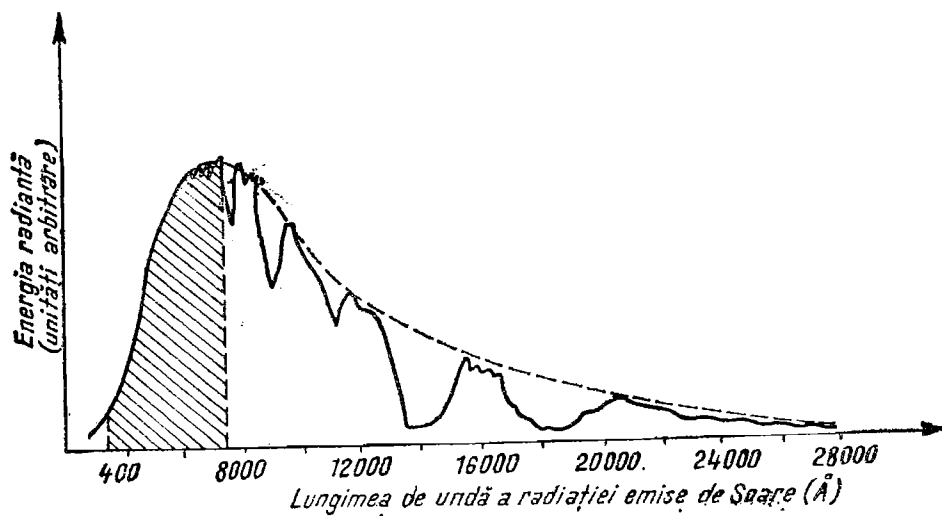


Fig. IV.2.52

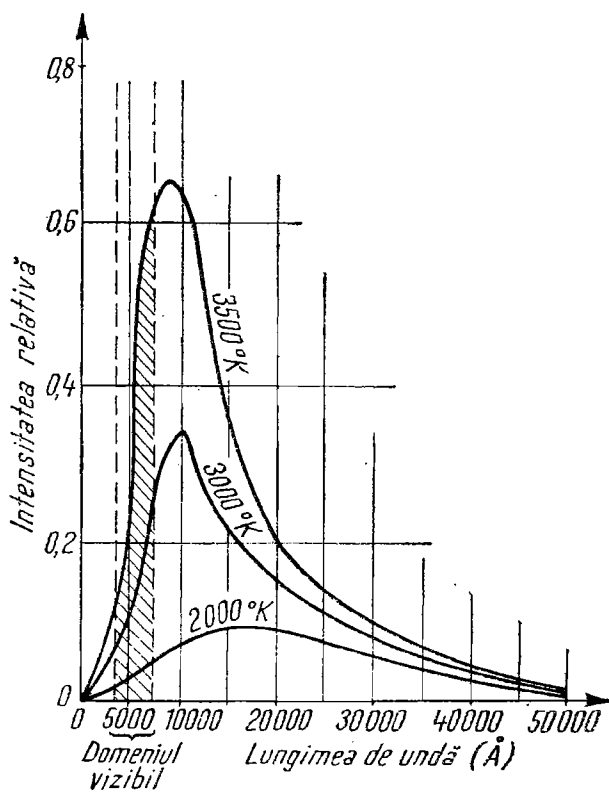


Fig. IV.2.53

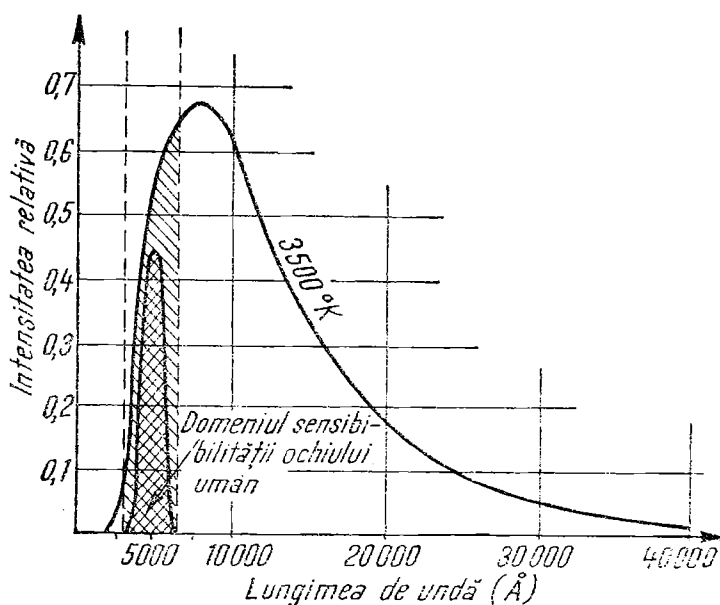


Fig. IV.2.54

descent este în vizibil. Și deoarece cu creșterea temperaturii, maximum curbei se deplasează, cum se vede, spre lungimi de undă mai scurte (spre stînga, în fig. IV.2.53), această fracțiune crește cu creșterea temperaturii (suprafața hașurată se mărește în urma deplasării maximumului spre stînga). Așadar izvoarele luminoase cu incandescență sînt cu atît mai economice cu cît temperatura lor este mai mare. De aceea filamentul becurilor electrice este confecționat din metale greu fuzibile (tungsten) care rezistă pînă la temperaturi de 2000—2900°K. Unele tipuri speciale de lămpi pot suporta și puțin peste 3000°K.

În fig. IV.2.54 porțiunea hașurată reprezintă domeniul vizibil, iar aria dublu hașurată reprezintă fracțiunea de energie care impresionează efectiv ochiul uman (curba care mărginește această fracțiune este proporțională cu sensibilitatea spectrală a ochiului). Raportul dintre energia spectrului vizibil și energia totală (dintre aria hașurată și aria totală) reprezintă *randamentul optic* al radiației corpului incandescent la temperatura dată (3500°K în fig. IV.2.54), iar raportul dintre energia ce impresionează retina și energia totală (dintre aria dublu hașurată și aria totală) este *randamentul vizual* al izvorului dat. Se vede că aceste randamente sînt destul de mici. Randamentul vizual, de exemplu, crește de la valori foarte mici (la temperaturi sub 2000°K) pînă la o valoare maximă de aproximativ 14% calculată pentru temperatura de 6500°K, cînd maximumul curbei intră în regiunea spectrului vizibil, după care scade din nou cu creșterea temperaturii. Randamentul ideal, maxim, de 14% (destul de mic, de altfel) ar putea fi atins dacă am putea încălzi izvorul pînă la 6000—6500°K. Filamentul becului electric cu incandescență, pe lîngă faptul că este departe de proprietățile corpului absolut negru, nu poate fi încălzit peste aproximativ 3000°K. De aceea randamentul vizual al radiației emise de el este foarte mic (aproximativ 4,4%).

Începînd de pe la sfîrşitul secolului trecut apare iluminatul cu lămpi luminescente, lămpi care pot transforma în lumină peste 20% din energia electrică consumată. În plus, dacă la radiatorii termici energia ce li se comunică pentru a-i menţine la anumite temperaturi se distribuie pe diferite lungimi de undă după anumite legi statistice, fără ca noi să putem influenţa această distribuţie şi deci randamentul optic, la izvoarele luminescente cu descărcări în gaze, putem influenţa în largă măsură distribuţia energiei pe diverse lungimi de undă, fie prin modificarea condiţiilor de descărcare, fie prin alegerea potrivită a gazului din tub, sau a luminoforului de pe peretele interior al său.

### 3. Optică ondulatorie

#### 3.1. NATURA LUMINII

În cadrul opticii geometrice am studiat propagarea rezei de lumină fără a lua în discuție natura fizică a ei. Un fapt incontestabil stabilit de experiență este acela că lumina transportă energie. Dar după cum știm energia poate fi transportată în două moduri: prin *particule în mișcare*, sub formă de energie cinetică a acestor particule și prin *unde*, sub formă de energie de deformare a unui mediu elastic, fără a avea un transport de masă. Sub care din aceste forme se propagă lumina?

După Newton, lumina este alcătuită din particule materiale ce se propagă în direcția razei luminoase cu viteze diferite în diferite medii transparente (teoria corpusculară a luminii). După Huygens, lumina constituie o perturbație a unui mediu elastic special (numit „eter”), viteza de propagare a acestei perturbații depinzând de asemenea de natura corpului transparent (*teoria ondulatorie a luminii*).

Considerând mai întâi lumina ca o perturbație a unui mediu elastic, fără a ne preocupa de tipul acestei perturbații (dacă este longitudinală, transversală etc.) putem prelua rezultatele obținute în studiul propagării undelor la mecanică. Astfel, s-a dedus că dacă o undă plană cade la suprafața de separare a două medii sub unghiul de incidență  $i$ , atunci pentru unda *reflectată* unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență, iar pentru unda *refractată* unghiul de refracție  $r$ , este diferit de unghiul de incidență, conform relației:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3.1)$$

Aceasta este legea refracției undelor,  $v_1$  și  $v_2$  fiind, respectiv, viteza undei incidente și refractate. Dacă notăm cu  $c$  viteza luminii în vid, s-a convenit ca raportul între această viteză și viteza  $v$  într-un mediu dat să fie numit *indice de refracție absolut* al aceluși mediu. Astfel, dacă într-un mediu viteza luminii este  $v_1$  iar în altul  $v_2$ , atunci indicii absoluți de refracție ai acestora vor fi:

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (3.2)$$

și legea refracției (3.1) mai poate fi scrisă:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.3)$$

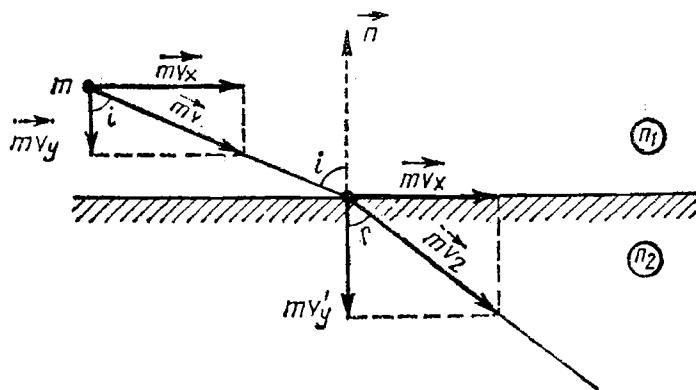


Fig. IV.3.1

Raportul  $\frac{n_2}{n_1} = n$  se mai numește și *indice de refracție relativ* al celui de al doilea mediu față de primul.

Prin urmare, în concepția ondulatorie viteza luminii este *mai mică* în mediul *mai dens*, conform relației (3.1).

Să considerăm acum lumina ca fiind alcătuită din particule materiale de masă  $m$ , supuse legii atracției universale. Dacă raza luminoasă trece dintr-un mediu mai puțin dens într-unul mai dens, fiecare corpuscul al ei va fi supus unei forțe de atracție îndreptată spre mediul mai dens. Această forță va fi normală pe suprafața de separare și va modifica deci componenta  $mv_y$  a impulsului particulei (fig. IV.3.1). Așadar  $mv'_y$  va fi mai mare ca  $mv_y$ , în timp ce componenta  $mv_x$  rămâne neschimbată. Ca urmare, impulsul  $mv_1 = mv_x/\sin i$  se va modifica, devenind  $mv_2 = mv_x/\sin r$ , ceea ce duce la expresia:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (3.4)$$

Deoarece  $r < i$ , rezultă că viteza luminii este *mai mare* în *mediul mai dens*, în ipoteza corpusculară.

Așadar cele două concepții explică în moduri diferite legea refracției; una —prin micșorarea vitezei luminii în mediul mai dens (relația 3.1), cealaltă —prin creșterea vitezei în mediul mai dens (relația 3.4). Pentru a decide între aceste două concepții au fost necesare măsurători directe ale vitezei luminii în diverse medii transparente. Astfel de măsurători au fost începute în a doua jumătate a secolului al XVIII-lea. Sînt numeroase, iar precizia lor a crescut mult cu timpul. Cititorul cunoaște de exemplu, experiența lui Michelson din 1926.

Prin aceste experiențe s-a putut determina, pentru trecerea luminii din aer în apă că  $v_1/v_2 = 1,333$ . Pe de altă parte din măsurarea unghiurilor (prin metoda prisme, de exemplu) se știa că  $\sin i/\sin r = 1,333$ . Aceste date experimentale nu sînt satisfăcute de relația (3.4), ci de relația (3.1), obținîndu-se astfel cîștig de cauză pentru concepția ondulatorie a luminii, care prevede o reducere a vitezei în medii mai dense ( $v_2 < v_1$ ). Această concepție a apărut ca urmare a descoperirii fenomenelor de interferență și difracție încă de la

sfârșitul secolului al XVII-lea. Ea a fost formulată schematic de către Huygens în 1690 și completată de către Fresnel la începutul secolului al XIX-lea, care a elaborat teoria undulatorie, potrivit căreia lumina este o perturbare a unui mediu elastic numit „eter” și se propagă sub forma unor unde *transversale periodice*, de frecvență foarte mare. Existența eterului cosmic nu a putut fi dovedită. De altfel, prin proprietățile ce trebuia să le posede, acesta nici nu putea avea consistență fizică.

După descoperirea undelor electromagnetice în a doua jumătate a secolului al XIX-lea s-a dovedit că undele de lumină sînt unde electromagnetice și că efectele luminoase sînt produse de către cîmpul electric al undei electromagnetice. Teoria electromagnetică nu putea explica însă unele fenomene cum ar fi, de exemplu, distribuția după lungimile de undă a energiei radiante emise prin încălzirea corpurilor. Această distribuție își găsește explicația în cadrul teoriei cuantice a luminii, fundamentată de Planck (1900). S-a stabilit astfel că un flux de unde luminoase, de orice frecvență  $\nu$ , se comportă (mai ales în unele fenomene speciale, cum este efectul fotoelectric) ca un flux discontinuu, alcătuit din particule de lumină, numite *fotoni*, a căror energie de mișcare este  $h\nu$  ( $h$  fiind constanta lui Planck). S-a dovedit de altfel că nu numai domeniul vizibil, ci întreg domeniul existent al undelor electromagnetice posedă proprietăți „corpusculare”. Dar în timp ce în domeniul infraroșu ( $\nu$  mici), aspectul corpuscular se manifestă atît de slab, încît experimental de obicei el nici nu apare vizibil, predominînd aspectul „ondulator”, la frecvențe foarte mari, în ultraviolet, de exemplu, aspectul corpuscular este foarte pronunțat, radiațiile comportîndu-se practic ca un flux de fotoni. În domeniul vizibil ambele aspecte au pondere aproape egală, experiența punînd în evidență cînd proprietățile ondulatorii (interferența, difracția), cînd proprietățile corpusculare ale luminii (efectul fotoelectric, de exemplu). Așadar, radiațiile luminoase sînt unde electromagnetice care au proprietatea de a impresiona retina ochiului. Ele posedă atît proprietăți ondulatorii, cît și proprietăți corpusculare.

În acest capitol, de „optică ondulatorie”, vom studia unele aspecte ondulatorii, iar în cel de „optică fonică”, unele aspecte corpusculare ale luminii, ca fenomen electromagnetic.

*Observație.* Pînă la descoperirea fotonului relațiile  $n = v_2/v_1$  (Newton) și  $n = v_1/v_2$  (Huygens) păreau incompatibile. În teoria electromagnetică a luminii, care admite dualismul corpuscul-undă a fenomenului luminos, această dificultate dispare. Pentru aceasta trebuie doar să înțelegem că una din relații conține *vitezele particulelor* de lumină, considerată ca un flux de particule, în timp ce cealaltă relație conține *vitezele undelor* de lumină, considerată ca o undă electromagnetică. Să presupunem că lumina trece din vid (unde viteza ei este  $c$ ) într-un mediu de indice de refracție  $n$ . În teoria fonică (corpusculară), dacă *viteza fotonilor* în mediul dat este  $v$ , vom avea  $n = v/c$ . În teoria electromagnetică (ondulatorie), dacă notăm cu  $u$  *viteza undelor luminoase* în mediul dat, vom avea  $n = c/u$ . Așadar:

$$uv = c^2. \quad (3.5)$$

Această relație este acum relativ ușor de explicat. Astfel, în teoria fonică lumina constă din particule (fotoni) de masă  $m$  (masă „de mișcare”) ce se mișcă cu viteza  $v$  și posedă o undă asociată, de lungime de undă:

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (3.6)$$



Folosind  $E = h\nu = mc^2$ , obținem:

$$\lambda = \frac{c^2}{\nu v}. \quad (3.7)$$

Pe de altă parte, considerînd lumina ca o undă de viteză  $u$  și frecvență  $\nu$  avem:

$$\lambda = \frac{u}{\nu}. \quad (3.8)$$

Ultimele două relații conduc la  $uv = c^2$ , relație ce rezultă cum am văzut, din faptul că atât teoria corpusculară cît și cea ondulatorie trebuie să furnizeze aceeași valoare pentru indicele de refracție  $n$ , care se poate determina experimental, direct, în afara teoriei. Această relație pune în evidență o strălucită sinteză între proprietățile ondulatorii și corpusculare ce se manifestă deosebit de pregnant în cazul luminii. O astfel de sinteză nu putea fi prevăzută de vechile teorii mecaniciste; cunoașterea ei este un rezultat al fizicii cuantice, apărută la începutul acestui secol.

### 3.2. INTERFERENȚA LUMINII

a) **Coerența.** Interferența luminii (ca și difracția) scoate în evidență natura ondulatorie, periodică a luminii și de aceea, pentru explicarea ei vom considera radiația luminoasă ca o undă periodică. Și, deși este bine cunoscut azi că unda luminoasă este o undă electromagnetică transversală, facem de la început observația importantă că pentru explicarea interferenței nu este neapărat necesar să știm dacă vibrațiile luminoase au loc de-a lungul direcției de propagare, sau perpendicular pe ea. Va fi suficient să cunoaștem legile generale ale mișcării ondulatorii, care se referă în aceeași măsură atât la undele longitudinale, cît și la cele transversale. Aceste legi au fost tratate la mecanică și de aceea le vom considera cunoscute.

Să luăm două izvoare separate, care emit unde de aceeași perioadă,  $T$ , cu amplitudinile  $a_1$  și  $a_2$ , paralele, cu o diferență de fază inițială  $\varphi_0$ . Dacă pînă la un punct dat din spațiu, aceste unde străbat drumurile  $d_1$  și  $d_2$ , elongațiile lor în acel punct vor fi:

$$y_1 = a_1 \cos (\omega t - kd_1); \quad y_2 = a_2 \cos (\omega t - kd_2 + \varphi_0), \quad (3.9)$$

cu  $\omega = 2\pi/T$  și  $k = 2\pi/\lambda$ , lungimea de undă a lor fiind  $\lambda = cT$ , unde  $c$  este viteza luminii.

Prin compunere în punctul de intersecție, cele două unde vor produce o vibrație luminoasă rezultantă, de elongație  $y$ :

$$y = y_1 + y_2. \quad (3.10)$$

Efectuînd calculele, se găsește amplitudinea vibrației rezultante:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \varphi_0 \right), \quad (3.11)$$

unde  $\delta = d_2 - d_1$  se numește diferență de drum.

*Intensitatea cîmpului luminos.* Vom numi intensitate a cîmpului electromagnetic luminos o mărime proporțională cu cantitatea de energie conținută în *unitatea de volum* a spațiului străbătut de undă și cu viteza de propagare a undei. Această intensitate este proporțională cu pătratul amplitudinii vibrației. Dacă de exemplu undele cad pe o placă fotografică, locul în care intensitatea este mai mare va fi mai înnegrit, deoarece primește mai multă energie.

Pentru a evita confuziile, amintim că la fotometrie am definit o intensitate ce caracterizează izvorul: fluxul de energie radiantă emis de izvor în unitatea de unghi solid (intensitate de izvor).

Prin urmare intensitățile de vibrație ale celor două unde luminoase în punctul dat vor fi  $J_1 = a_1^2$  și  $J_2 = a_2^2$ , iar intensitatea rezultantă,  $J = a^2$ . Folosind (3.11) vom avea deci:

$$J = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \varphi_0\right). \quad (3.12)$$

Se pot ivi două cazuri:

1) Faza inițială  $\varphi_0$  nu rămîne aceeași în timpul observației sau înregistrării suprapunerii undelor. Izvoarele care nu păstrează o diferență de fază constantă în timp între vibrațiile lor se numesc *izvoare necoerente*. Acesta este cazul frecvent, în care cele două izvoare sînt formate dintr-un mare număr de atomi excitați, care emit independent unul de altul. Fiecare act de emisie luminoasă de către atom durează foarte puțin și el este reluat de fiecare dată cu o altă fază inițială  $\varphi_0$ . În felul acesta  $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \varphi_0\right)$  ia, în timpul observației, un mare număr de valori distribuite practic egal între  $-1$  și  $+1$ , astfel că valoarea sa medie devine zero. Intensitatea vibrației luminoase va fi:

$$J = a_1^2 + a_2^2, \quad (3.13)$$

sau:

$$J = J_1 + J_2, \quad (3.14)$$

adică o sumă a intensităților undelor componente în orice punct, ceea ce duce la o iluminare uniformă a unui ecran așezat în cîmpul de interferență.

2) Faza inițială  $\varphi_0$  rămîne constantă în timp. Astfel de izvoare se numesc *coerente*. Pentru simplitate vom considera cazul  $\varphi_0 = \text{const.} = 0$ , des întîlnit în dispozitivele experimentale. În acest caz  $J$  are forma:

$$J = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda}. \quad (3.15)$$

Expresia  $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$  se numește *diferență de fază* în punctul de interferență. Evident, dacă  $\Delta\varphi = 2k\pi$  (sau  $\delta = k\lambda$ ), vom avea o intensitate maximă (interferență constructivă),

$$J_{\text{max}} = (a_1 + a_2)^2, \quad (3.16)$$

iar dacă  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$  sau  $\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ , vom avea minime (interferență distructivă):

$$J = (a_1 - a_2)^2. \quad (3.17)$$

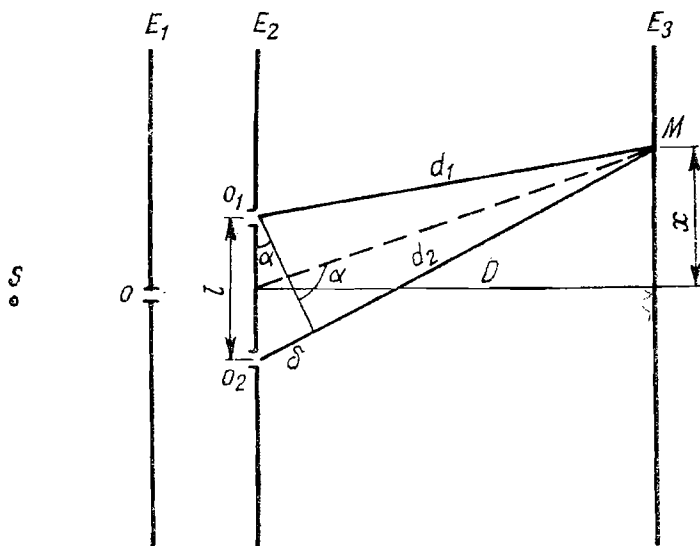


Fig. IV.3.2

În cazul frecvent, în care cele două izvoare emit unde de aceeași amplitudine,  $a_1 = a_2 = a$ , atunci vom avea maxime  $J_{\max} = a^2$  și minime nule  $J_{\min} = 0$ . Pe ecranul de interferență vor apărea în acest caz benzi luminoase staționare (franje de interferență), separate de către benzi întunecate.

Așadar, suprapunerea a două fluxuri de lumină poate duce nu numai la intensificarea lor reciprocă, ci și la extincția lor, în funcție de diferența de fază cu care ajung undele respective în punctul de interferență.

b) **Realizarea undelor coerente în optică.** În fig. IV. 3.2. este dată schema experienței lui Young (1802). În ecranul  $E_1$  este practică o mică fantă dreptunghiulară  $o$  (perpendiculară pe planul figurii) iluminată puternic de un izvor monocromatic  $S$ . Fiecare undă cilindrică emisă de fanta  $o$  atinge simultan cele două fante de asemenea dreptunghiulare,  $o_1$  și  $o_2$  din ecranul  $E_2$ . Acestea devin — conform principiului lui Huygens — noi surse de unde cilindrice, care se suprapun în spațiu. Dat fiind că vibrațiile în  $o_1$  și  $o_2$  sînt produse de aceeași undă incidentă, ele sînt în fază ( $\varphi_0 = \text{const} = 0$ ), deci coerente și au amplitudini egale. De aceea, pe ecranul  $E_3$  va apare o figură de interferență cu minime nule. Să considerăm un punct oarecare  $M$  la distanța  $x$ , de axa de simetrie. Dacă distanța  $x$  și intervalul  $l$  dintre izvoarele coerente  $o_1$  și  $o_2$  sînt foarte mici față de distanța  $D$  dintre planul izvoarelor și ecranul  $E_3$ , atunci, cu bună aproximație, se poate scrie:

$$\frac{x}{D} = \frac{\delta}{l}, \quad (3.18)$$

unde  $\delta$  este diferența de drum cu care ajung undele în  $M$ . Dacă

$$\delta = \frac{x l}{D} = k \lambda, \quad (3.19)$$

vom avea în  $M$  o franjă luminoasă. Dacă

$$\delta = \frac{x_l}{D} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3.20)$$

vom avea în  $M$  o franjă întunecoasă. Interfranja  $i$  (distanța între două franje luminoase sau întunecoase consecutive) va fi:

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{l} (k + 1) \lambda - \frac{D}{l} k \lambda,$$

adică:

$$i = \frac{\lambda D}{l}. \quad (3.21)$$

Tabloul de interferență de pe ecranul  $E_3$  va fi deci format din benzi (franje) luminoase și întunecoase dispuse alternativ, echidistante, perpendiculare pe planul figurii. Relația (3.21) arată că franjele vor fi mai rare pe ecran, dacă acesta e mai departe ( $D$  mai mare) sau dacă distanța dintre izvoare,  $l$ , este mai mică.

Dispozitivul lui Young realizează deci două izvoare coerente prin folosirea a două mici porțiuni de pe aceeași suprafață de undă emisă de fiecare sursă elementară (atom excitat). Există și alte dispozitive pentru acest scop, care au însă la bază principii asemănătoare și de aceea nu ne vom ocupa de ele.

Deschiderile izvoarelor coerente  $o_1$  și  $o_2$  trebuie să fie destul de mici, astfel ca ele să apară ca un șir rectiliniu de izvoare punctiforme, emițătoare de unde sferice, a căror înfășurătoare este o undă cilindrică cu generatoarea paralelă cu direcția fantelor. Regiunea din spațiu în care se produce interferența este, în acest caz, relativ mare, fenomenul putînd fi „prins” pe ecranul  $E_3$  pentru orice poziție a sa în această regiune. Franjele astfel obținute sînt deci *nelocalizate*. În practică însă, caracterul punctiform al izvorului se realizează doar aproximativ, ceea ce duce la reducerea caracterului nelocalizat al figurii de interferență. Deseori avem de-a face cu izvoare întinse, cum ar fi cerul luminos; globul mat al unei lămpi cu incandescență, o lampă cu descărcări în gaze etc.

c) **Franje de interferență localizate.** Să considerăm un izvor întins  $S$ , monocromatic și o lamă subțire transparentă,  $L$  cu fețe plan paralele (fig. IV. 3.3). Toate punctele  $P$  ale izvorului  $S$  emit independent fascicule care nu vor fi coerente și nu vor putea deci produce un fenomen de interferență staționară. Razele  $1'$ ,  $2'$  și  $1''$  sînt însă coerente deoarece provin de la aceeași sursă elementară  $P$  (atom excitat). Se poate obține deci interferență fie într-un punct oarecare  $A$  în care ajung razele  $1$  și  $2$  după reflexia în  $M$  și respectiv în  $I_2$ , fie la infinit (sau în planul focal al unei lentile convergente) unde se întîlnesc razele paralele  $1'$  și  $1''$  provenite din dedublarea unei singure raze ( $1$ ) prin reflexie în  $I_1$  și, respectiv în  $M$ .

d) **Drum optic.** Să presupunem că într-un timp  $t$  lumina străbate o lungime  $l$  într-un mediu de indice de refracție  $n$ , cu viteza  $v$ . Vom nota cu  $(l)$  drumul pe care l-ar străbate lumina în același timp  $t$  în vid, cu viteza  $c$ . Putem scrie:

$$l = vt, \quad (l) = ct. \quad (3.21)$$

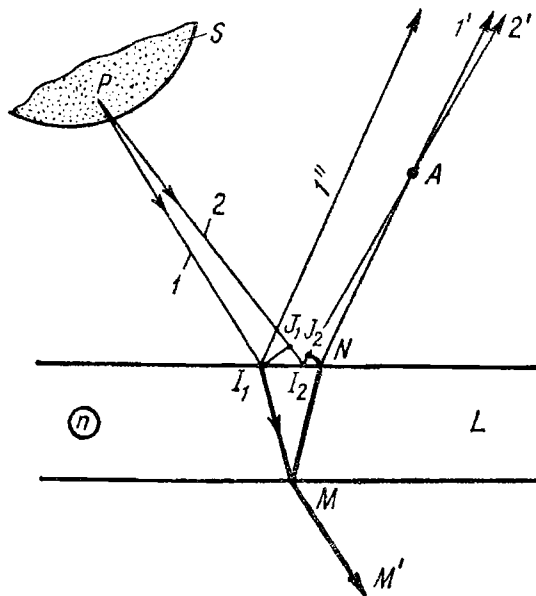


Fig. IV.3.3

Eliminând pe  $t$ , obținem

$$(l) = \frac{c}{v} l. \quad (3.22)$$

Dar  $n = c/v$  și deci:

$$(l) = nl. \quad (3.23)$$

Prin definiție, drumul geometric pe care l-ar străbate lumina în vid în același timp în care ea parcurge o distanță  $l$  într-un mediu dat, se numește *drum optic*,  $(l)$ . El este numeric egal cu produsul dintre drumul geometric prin mediul respectiv și indicele de refracție al acelui mediu.

În dispozitivul lui Young din fig. IV.3.2. fasciculele interferente parcurgeau drumul de la surse la punctul de întâlnire  $M$  în același mediu. În dispozitivul din fig. IV.3.3. raza 2, de exemplu, parcurge tot drumul numai în aer (vid), în timp ce drumul razei 1 ( $PI_1MNA$ ) conține și un parcurs în lama transparentă  $L$ . Dacă  $n$  este indicele de refracție al lamei,  $L$ , atunci *drumul optic*-al razei 1 prin lamă este prin definiție  $(l) = n(I_1M + MN)$ .

e) **Interferența localizată la infinit.** Să considerăm în fig. IV.3.4 lama transparentă cu fețe plan paralele  $P$ , de grosime  $e$  și indice de refracție  $n$ , iluminată de izvorul întins  $S$ . Să urmărim una din razele emise de o sursă elementară (un atom excitat) a izvorului  $S$  și anume, raza  $s_1I_1$ , care cade pe lamă sub unghiul de incidență  $i$ . În punctul  $I_1$  o parte din lumină pătrunde în lamă sub unghiul de refracție  $r$ , iar o parte se reflectă. Asemănător, în punctul  $I_2$  o parte se refractă (raza emergentă  $I_2E$ ), iar o parte se reflectă. După cum lesne se poate vedea, razele  $I_1M_1$  și  $I_2M_2$  sînt paralele; ele se întîlnesc la infinit

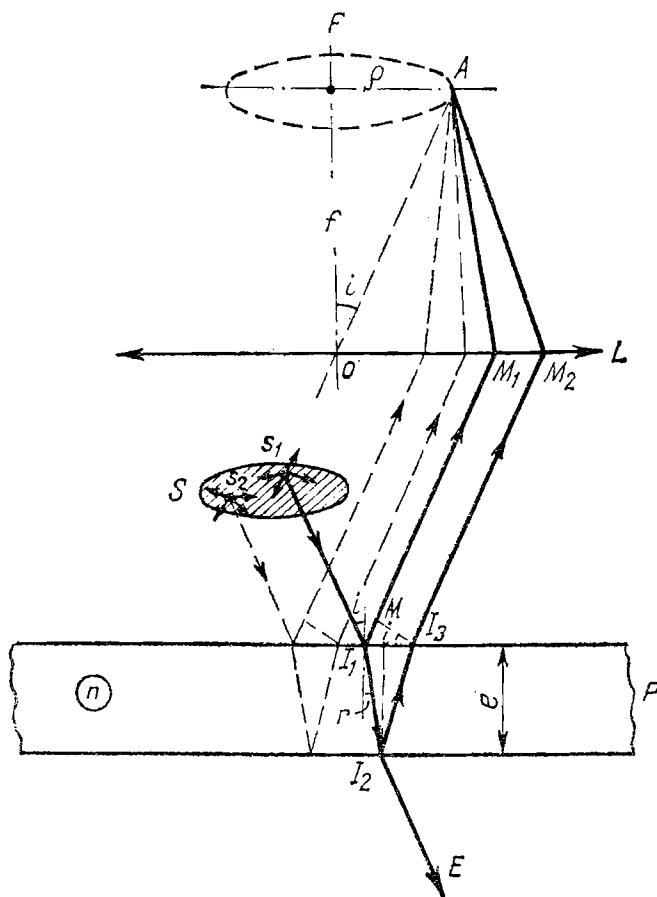


Fig. IV.3.4

sau în planul focal al unei lentile convergente  $L$ . În plus, aceste două raze sînt *coerente*, deoarece provin din separarea unui front de undă prin reflexie și refracție în punctul  $I_1$ . După cum se știe, toate punctele unui front de undă oscilează în fază. Dacă separăm în două unde un astfel de front, este evident că fronturile celor două unde parțiale vor transporta vibrații în fază. Dacă aceste două unde se vor reîntîlni, după ce au străbătut, în direcții diferite, drumuri de exemplu egale, diferența de fază  $\Delta\varphi$  în punctul de intersecție între oscilațiile lor va fi zero (deoarece diferența de drum  $\delta$  este zero și după cum știm,  $\Delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$ ). În fig. IV.3.4 cele două unde, după dedublarea din  $I_1$ , străbat drumuri geometrice diferite pînă în punctul de întîlnire  $A$  și anume  $I_1M_1A$  și  $I_1I_2I_3M_2A$ . Neluînd în discuție unele fenomene ce apar la refracțiile prin lentila  $L$ , se vede că între punctul  $I_1$  și frontul  $I_3M$ , raza refractată în  $I_1$  a străbătut drumul geometric  $I_1I_2 + I_2I_3$  și deci drumul optic  $(l_1) = n(I_1I_2 + I_2I_3)$ , iar raza reflectată (în aer,  $n = 1$ ) a străbătut drumul optic  $(l_2) = I_1M - \frac{\lambda}{2}$  (după cum se știe reflexia pe un mediu mai dens se face cu pierde-

rea unei semiunde, sau cu o diferență de fază de  $\pi$ ). Diferența de drum între undele ce se întâlnesc în  $A$  va fi deci  $\delta = (l_1) - (l_2)$  și anume:

$$\delta = n \left( \frac{e}{\cos r} + \frac{e}{\cos r} \right) - \left( I_1 I_3 \sin i - \frac{\lambda}{2} \right). \quad (3.24)$$

Dar

$$I_1 I_3 = 2e \operatorname{tgr} = 2e \frac{\sin r}{\cos r},$$

astfel că (3.24) devine:

$$\delta = 2n \frac{e}{\cos r} - 2e \frac{\sin r}{\cos r} \sin i + \frac{\lambda}{2}.$$

Ținând seama că:  $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ ,  $\delta$  capătă forma:

$$\delta = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.25)$$

Această expresie poate fi scrisă în funcție de unghiul de incidență  $i$ :

$$\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.26)$$

Așadar razele paralele  $I_1 M_1$  și  $I_3 M_2$  păstrează o diferență de drum constantă în timp, deoarece  $e$ ,  $n$ ,  $i$  și  $\lambda$  sînt constante. Să presupunem că  $\delta$  este astfel încît în  $A$  se formează un maxim de interferență. Dar în  $A$  se concentrează toate perechile de raze ce provin de la oricare punct  $s_1, s_2, \dots$  al sursei  $S$  sub aceeași incidență  $i$ . Cum aceste perechi au aceeași diferență de drum  $\delta$  (avînd același  $i$ ), ele vor da în  $A$  tot un maxim. Dar din fiecare punct  $s$  razele incidente sub același unghi  $i$  formează suprafața laterală a unui con, avînd generatoarea înclinată cu  $i$  față de normală. Aceste raze, prin dedublarea lor în punctele de incidență, vor da în planul focal al lentilei  $L$  aceeași stare de interferență pe un cerc de rază  $\rho$ , care poate fi calculată dacă cunoaștem distanța focală  $f$  a lentilei. Dacă ne limităm la unghiuri de incidență mici (caz obișnuit în practică), astfel încît  $\sin i \simeq \operatorname{tg} i \simeq i$ , atunci, din fig. IV.3.4 se vede că:

$$\rho = f \operatorname{tg} i \simeq fi. \quad (3.27)$$

Pe de altă parte, observăm că în centrul inelelor ( $i = 0$ ) diferența de drum este maximă:

$$\delta_0 = 2en + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.28)$$

Așadar pentru orice inel starea de interferență va fi dată de o diferență de drum *mai mică* decît cea din centru. Astfel, inelului de ordin  $k$  îi corespunde diferența de drum dată de:

$$\delta_k = \left( 2ne + \frac{\lambda}{2} \right) - \left( 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i_k} + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (3.29)$$

Dacă acest inel este un maxim ( $\delta_k = k\lambda$ ) și dacă ținem seama de aproximația menționată mai sus, atunci:

$$2ne - 2e\sqrt{n^2 - i_k^2} = k\lambda. \quad (3.30)$$

Pentru a-l explicita pe  $i$ , scriem această expresie sub forma:  $2e\sqrt{n^2 - i_k^2} = 2ne - k\lambda$  și ridicăm la pătrat ambii membrii. Neglijînd termenul în  $\lambda^2$ , obținem:

$$i_k = \sqrt{\frac{n\lambda}{e}k}. \quad (3.31)$$

Folosind (3.27) obținem:

$$\rho_k = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e}k}. \quad (3.32)$$

Conform acestei relații, inelele luminoase în regiunea roșie a spectrului de exemplu, au diametrele mai mari decît cele din violet. Diametrul inelelor depinde, cum se vede și de distanța focală a sistemului optic folosit. Este important de relevat mai ales că, pentru o lungime de undă dată, inelele se îndesesc spre margine, deoarece razele lor succesive sînt între ele ca și rapoartele rădăcinilor pătrate ale numerelor întregi succesive,  $k$ .

Așadar, interferența pe o lamă transparentă plan paralelă iluminată cu un izvor întins, nu prea depărtat de lamă, formează inele de interferență localizate la infinit. Acestea mai poartă și numele de *inele de egală înclinare*, deoarece fiecare inel este format, cum am văzut, cu raze ce au căzut pe lamă sub același unghi de incidență, indiferent de punctul luminos  $s$ , din care provin, sau de punctul de incidență  $I$ .

Se înțelege că, deoarece la formarea fiecărui inel contribuie toate punctele  $I$  de pe suprafața lamei, acest inel nu va apărea foarte clar decît dacă lama este perfect plan-paralelă. Pe această observație se bazează metodele interferențiale de verificare a planeității lamelor.

În încheiere menționăm că inelele de egală înclinare pot fi obținute și prin transmisie, folosind raza  $I_2E$  și una reflectată în  $I_3$ . Acestea au însă un contrast mult mai slab față de cele obținute prin reflexie.

**f) Interferența localizată pe lame.** Ce se va întîmpla dacă sursa de lumină  $S$  se va afla foarte departe de lamă, practic la infinit? Fiind foarte departe, razele coerente de la fiecare sursă elementară  $s$  sînt practic, paralele. Să delimităm mintal, un grup de raze paralele ce provin de la un singur punct luminos  $s$  al izvorului întins, monocromatic și să facem să cadă acest fascicul pe o lamă cu fețe plan-paralele (fig. IV.3.5a). Să urmărim raza  $sI_1$ . După refracția în  $I_1$  și reflexia în  $I_2$  ea va ajunge în  $I_3$  unde se va întîlni cu raza  $sI_3$ , una din razele fasciculului paralel. Diferența de drum în punctul  $I_3$  va fi  $\delta = n(I_1I_2 + I_2I_3) - MI_3$  și se poate calcula ca mai sus, în funcție de unghiul de incidență  $i$  și de grosimea lamei,  $e$ . Dar, deoarece toate razele cad sub același unghi  $i$ , diferența de drum este aceeași pentru o lamă plan-paralelă ( $e = \text{constant}$ ) pe toată suprafața sa. Suprafața lamei va apărea astfel uniform iluminată într-o singură culoare, dacă pe suprafața ei  $\delta = k\lambda$ . Diferența de drum  $\delta$  nu va fi însă aceeași pe toată suprafața dacă lama nu este plan-paralelă (fig. IV.3.5b). Vor apărea franje de-a lungul unor curbe ce unesc puncte în care grosimea lamei este aceeași



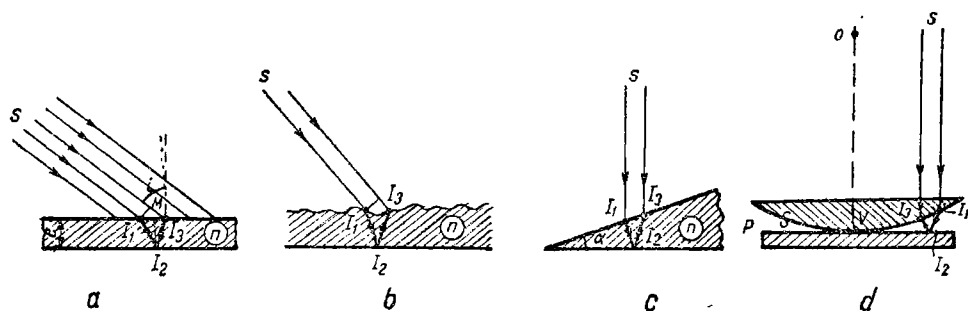


Fig. IV.3.5

satisfăcând condiția  $\delta = k\lambda$ , pentru franjele luminoase și  $\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$  pentru franjele întunecoase. Acestea se numesc *franje de egală grosime* și observarea lor se face privind direct suprafața lamei respective.

Dacă lumina este albă, iar lama suficient de subțire, franjele de egală grosime vor fi colorate în diverse culori. Acesta este cazul peliculelor de ulei sau petrol răspândite pe suprafața apei. Probabil cititorul a avut deseori ocazia să admire colorațiunile vii ale unor astfel de pelicule. În aceste cazuri izvorul întins situat la infinit este cerul luminos.

Dacă lama subțire este o pană (fig. IV. 3.5 c), franjele de egală grosime sînt drepte paralele cu muchia penei, iar dacă este un strat de aer cuprins între o suprafață plană  $P$  și una sferică  $S$  (fig. IV. 3.5d), franjele de egală grosime sînt cercuri concentrice în jurul axei  $oV$  (inelele lui Newton), în care  $o$  este centrul sferei din care face parte calota  $S$ . În toate cele patru cazuri de mai sus punctul  $I_3$  reprezintă punctul în care are loc întîlnirea razelor coerente, deci în care se produce fenomenul de interferență.

Observarea franjelor de egală grosime stă la baza metodelor interferențiale de măsurare cu mare precizie a *lungimilor, unghiurilor, coeficienților de dilatare* etc.

Instrumentele optice moderne cer realizarea unor suprafețe optice (plane, sferice etc.) care să nu se abată de la forma dorită cu mai mult de  $\lambda/10$  sau chiar  $\lambda/100$ . Controlul unor astfel de suprafețe aparține metrologiei interferențiale. În fig. IV. 3.6.a este dată schema unei astfel de metode. Peste suprafața  $S$  de verificat se așază o lamă plan-paralelă etalon  $E$ , realizată cu o precizie mai mare decît cea necesară aprecierii planeității suprafeței  $S$ . Între  $E$  și  $S$  se formează o pană de aer. Dacă  $S$  ar fi suficient de plană, franjele ar fi drepte. Dacă există denivelări, acestea produc deformarea franjelor. În fig. IV. 3.6.b se arată cum apar astfel de franje în cîmpul unui vizor cu care se studiază diversele porțiuni ale suprafeței. Ele sînt curbe de egală grosime și dau deci informații asupra abaterilor de la planeitate a suprafeței  $S$ .

g) **Dilatometrie interferențială.** Franjele de egală grosime localizate pe suprafața lamelor subțiri sînt folosite și în studiul dilatării corpurilor (dilatometrie interferențială). Ele dau rezultate excelente mai ales în mineralogie în studiul dilatării unor cristale anizotrope care prezintă coeficienți de dilatare diferiți în diferite direcții. Aparatul folosit pentru acest scop se numește

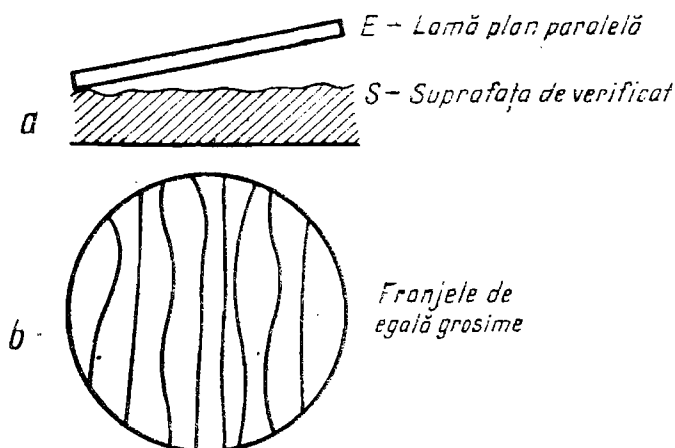


Fig. IV.3.6

*dilatometru interferențial*. El a fost construit de H. Fizeau (1863) și perfecționat de E. Abbe (1884, 1893); de aceea se mai numește și dilatometru *Fizeau-Abbe*. O variantă de construcție a acestui dilatometru este dată schematic în fig. IV.3.7. Corpul de studiat *C* este tăiat sub formă de paralelipiped de dimensiuni mici (aproximativ 12 mm înălțime și 25 mm lărgime). El este așezat pe suprafața plană a suportului *P* în interiorul inelului din cuarț topit *II'* care are un coeficient de dilatare foarte mic și foarte precis cunoscut (inelul este desenat în secțiune longitudinală în fig. IV. 3.7). Între suprafața superioară a corpului *C* (plană și foarte bine șlefuită) și suprafața *AB* a lamei de sticlă cu fețe plan paralele a aparatului se formează o pană de aer foarte subțire, având grosimea sub 0,1 mm. Dispozitivul este introdus într-o etuvă în interiorul căreia temperatura poate fi modificată extrem de fin și cunoscută cu mare precizie. Când temperatura crește, corpul se dilată, ceea ce duce la modificarea grosimii penei de aer. Dacă dispozitivul este iluminat cu lumină monocromatică, apar franje luminoase și întunecoase și modificarea grosimii se poate urmări prin observarea deplasării acestor franje de interferență printr-un vizor special. Din numărul franjelor deplasate se poate calcula variația grosimii stratului de aer, știind că o deplasare cu o interfranjă corespunde unei variații a grosimii stratului de aer cu  $\lambda/2$ . În calcul se ține seama desigur de faptul că dilatarea obținută din deplasarea franjelor reprezintă de fapt diferența dintre

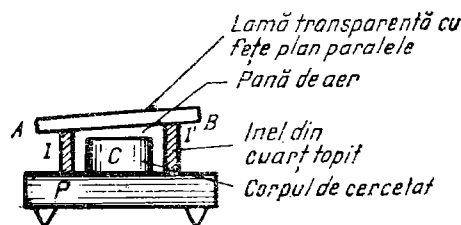


Fig. IV.3.7

dilatarea aparatului (cunoscută) și dilatarea corpului  $C$ . Cu aceste metode pot fi măsurate variații pînă la  $10^{-6}$  mm ale dimensiunilor unui corp supus variațiilor de temperatură.

### 3.3. DIFRACTIA LUMINII

a) **Difracția în lumină divergentă.** După cum s-a mai spus, dacă lumina s-ar propaga sub forma unor raze rectilinii, ar trebui ca umbra oricărui corp opac să fie net conturată pentru orice dimensiune a corpului. Cu alte cuvinte, pe un ecran de observație conturul umbrei ar trebui să fie o linie ce separă net regiunea luminată de cea neluminată. Deși în observațiile curente așa se petrec lucrurile, la o cercetare mai atentă observăm fenomene ce nu pot fi explicate în ipoteza propagării rectilinii a luminii.

Să luăm de exemplu un izvor rectiliniu  $S$ , perpendicular pe foaia de desen și un ecran opac sub forma unui semiplan, paralel cu izvorul  $S$  și care apare în fig. IV.3.8. prin urma sa  $PQ$ . În ipoteza propagării rectilinii, ecranul  $E$  ar trebui să fie împărțit în două regiuni distincte: una luminată, deasupra direcției  $SM_0$  („lumina geometrică”) și una întunecată, sub  $SM_0$  („umbra geometrică”). Dacă  $I_0$  este intensitatea luminii de pe ecran în absența semiplanului opac, se constată că în punctul  $M_0$  intensitatea este numai  $0,25 I_0$ , iar în umbra geometrică există de fapt lumină, intensitatea ei scăzînd monoton către zero, așa cum arată diagrama din dreapta ecranului  $E$ . În regiunea luminii geometrice, în locul unei distribuții uniforme a luminii, prevăzută de optica geometrică, apar pe o distanță relativ mică o serie de maxime și minime de intensitate, care se reduc treptat, după care începe regiunea de iluminare uniformă cu intensitatea  $I_0$ . Se vede că intensitatea primului maxim (din  $M_1$ ) este chiar mai mare decît  $I_0$ . Cauza acestor fenomene complexe ce apar la limita de separare dintre umbra geometrică și lumina geometrică este *difracția luminii*. Marginea umbrei geometrice nu este deci netă; în zona ei apar *franje de difracție*, care se datoresc proprietăților ondulatorii ale luminii. Distribuția intensității luminii în aceste franje de difracție poate fi dedusă folosind ipoteza lui Fresnel (1815),

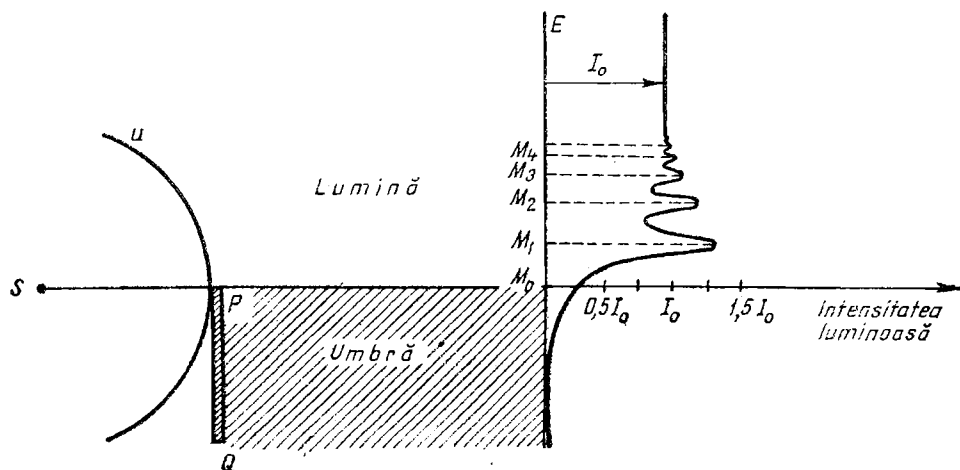


Fig. IV.3.8

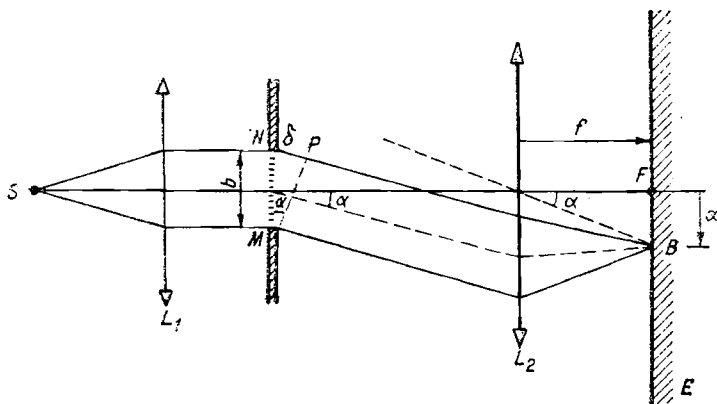


Fig. IV.3.9

conform căreia undele elementare emise de izvoarele secundare de pe frontul de undă  $U$  (în baza principiului Huygens), fiind coerente, pot produce la întâlnirea lor în  $M_0$  maxime sau minime de *interferență*, în conformitate cu legile cunoscute ale interferenței luminii. Principiul propagării luminii sub forma frontului de undă, completat cu principiul interferenței undelor periodice și coerente ale izvoarelor secundare, este cunoscut sub numele de principiul Huygens-Fresnel.

b) **Difracția produsă de o fantă în lumină paralelă.** În fig. IV.3.9 izvorul liniar  $S$ , normal pe figură, se află în focarul lentilei  $L_1$  astfel că pe fanta  $MN$ , paralelă cu  $S$  și de lungime  $b$ , cade lumină paralelă. Datorită difracției, fiecare punct al frontului limitat de fanta  $MN$  va deveni o sursă elementară de unde sferice, ce se vor propaga în toate direcțiile. În punctul  $B$ , de exemplu se vor întâlni, datorită lentilei convergente  $L_2$ , toate undele parțiale emise în direcția  $\alpha$ . Aplicând metoda Fresnel, să împărțim frontul de undă  $MN$  în  $n$  fișii înguste de aceeași lățime, paralele cu marginile fantei. Aceste fișii constituie izvoare secundare de lumină, ce oscilează în fază. Neexistând nici o diferență de fază între unde la emisie, nu va exista nici la întâlnirea lor vreo diferență de fază, dacă au străbătut drumuri optice egale. Așa stau lucrurile cu razele paralele cu axul optic ( $\alpha = 0$ ), care se vor întâlni în focarul principal  $F$ . Sub diverse unghiuri  $\alpha$ , vor exista însă diferențe de drum între undele elementare emise de fișii vecine. Să notăm cu  $\Delta\varphi$  diferența de fază dintre raze de lumină provenite de la două fișii vecine și cu  $a$  amplitudinea unei luminoase emisă de fiecare fișie, proporțională cu aria fișiei. Convenim să reprezentăm amplitudinea printr-un vector  $\vec{a}$ , iar  $\Delta\varphi$  prin unghiul dintre doi vectori  $\vec{a}$  succesivi (fig. IV.1.10a). Amplitudinea rezultantă  $\vec{A}$  în punctul de întâlnire este vectorul ce unește originea vectorului  $\vec{a}_1$  cu vârful ultimului vector  $\vec{a}_n$ , conform regulii de adunare vectorială. Dacă, de exemplu vectorii  $\vec{a}$  sînt paraleli, înseamnă că  $\Delta\varphi = 0$ . Direcția după care undele au diferență de fază nulă ( $\Delta\varphi = 0$ ) este aceea după care ele au diferența de drum nulă. Această direcție este cea paralelă cu axul optic al lentilei  $L_2$ . Dacă adunăm deci cei  $n$  vectori punîndu-i cap la cap de-a lungul unei drepte (fig. IV.3.10b) obținem amplitudinea  $\vec{A}_0$

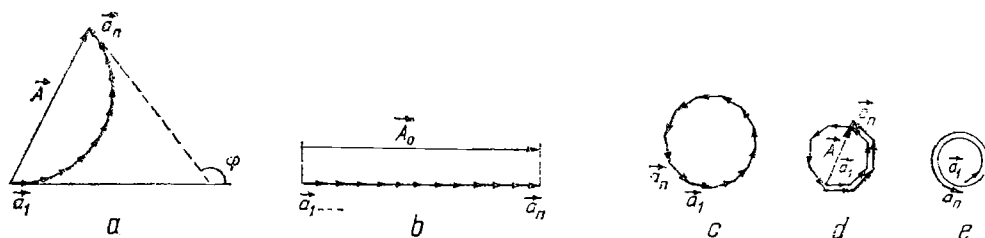


Fig. IV.3.10

corespunzătoare stării de interferență din centrul de simetrie  $F$ . Vectorul  $\vec{A}_0$ , este mai mare decât oricare alt vector  $\vec{A}$  obținut ca rezultantă a conturului poligonal din fig. IV.3.10.a. Amplitudinea luminii (deci și intensitatea ei  $I_0 \sim \sim A_0^2$ ) este așadar maximă în centrul  $F$  din fig. IV.3.9. Ce se întâmplă în celelalte puncte aflate la diferite distanțe  $x$  de centru? În punctul  $B$  de exemplu, interferează toate cele  $n$  unde elementare plecate sub unghiul  $\alpha$  din izvoarele (fîșiile) respective. Fiecare pereche ajunge în  $B$  cu o diferență de fază parțială  $\Delta\varphi$ . Diferența de fază totală  $\varphi$ , între prima undă (de amplitudine  $\vec{a}_1$ ) și ultima (de amplitudine  $\vec{a}_n$ ) va corespunde unei diferențe de drum  $\delta$  între razele emise de capătul  $M$  și capătul  $N$  al fantei (fig. IV.3.9), conform relației

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta.$$

Desigur că amplitudinea rezultantă  $\vec{A}$  va deveni nulă pentru cazul în care vîrfurile ultimului vector ( $\vec{a}_n$ ) coincide cu originea primului ( $\vec{a}_1$ ), adică pentru conturul poligonal (de lungime  $\vec{A}_0$ ) închis (fig. IV. 3.10.c). Dacă  $n$  este destul de mare ( $a$  destul de mic, adică fîșiile destul de înguste), la închiderea conturului poligonal, vectorul  $\vec{a}_n$  devine paralel cu  $\vec{a}_1$ . Unghiul dintre ei și deci diferența de fază între razele emise de fîșiile de la marginile fantei ia valoarea  $2\pi$ . Este ușor de găsit punctul  $B$  de pe ecran în care se realizează acest minim nul. Din fig. IV.3.9 rezultă imediat relația

$$\delta = b \sin \alpha, \quad (3.33)$$

astfel că:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \varphi = b \sin \alpha. \quad (3.34)$$

Cum  $\varphi = 2\pi$ , vom avea:

$$\lambda = b \sin \alpha. \quad (3.35)$$

Dacă  $f$  este distanța focală a lentilei  $L_2$  atunci distanța  $x$  pînă la primul minim nul va fi:

$$x = f \tan \alpha. \quad (3.36)$$

Limitându-se la unghiuri mici,  $\operatorname{tg} \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha$  și atunci:

$$\lambda = b\alpha, \quad x = f\alpha, \quad (3.37)$$

de unde obținem:

$$x = \frac{f}{b} \lambda. \quad (3.38)$$

Următorul maxim se va obține, după cum se vede din fig. IV.3.10.d, atunci când capătul conturului poligonal de lungime  $A_0$  a mai străbătut încă o jumătate de cerc. În acest caz unghiul dintre  $\vec{a}_n$  și  $\vec{a}_1$  devine  $3\pi$ , iar amplitudinea este egală cu diametrul noului contur. Desigur, diametrul  $A$  va fi mai mic decât lungimea totală  $A_0$  ( $A = \frac{2}{3\pi} A_0$ ), de unde deducem că intensitatea celui de al doilea maxim este mai mică decât a maximului central. Poziția punctului de pe ecranul  $E$  corespunzător acestui maxim se obține la fel, punind  $\varphi = 3\pi$  în (3.34):  $\frac{\lambda}{2\pi} \cdot 3\pi = b\alpha$ . Folosind (3.37) obținem:

$$x = \frac{3}{2} \frac{f}{b} \lambda. \quad (3.39)$$

În continuare, prin închiderea a doua oară a poligonului vectorial (fig. IV.3.10.e), ceea ce corespunde la  $\varphi = 4\pi$ , se obține un nou minim nul ( $\vec{A} = 0$ ). Coordonata  $x$  a punctului corespunzător de pe ecran va fi:

$$x = 2 \frac{f}{b} \lambda. \quad (3.40)$$

Se va obține apoi un nou maxim, mult mai mic decât precedentul, pentru  $x = \frac{5}{2} \frac{f}{b} \lambda$ , apoi un nou minim nul pentru  $x = 3 \frac{f}{b} \lambda$  și așa mai departe.

În fig. IV.3.11 este reprezentată grafic difracția corespunzătoare celor spuse mai sus. În abscisă este luată distanța  $x$  de la centrul de simetrie  $F$ , iar în ordonată intensitatea  $I$  raportată la intensitatea franjei centrale  $I_0$ . Se obține deci o franjă centrală foarte intensă de lărgime  $2 \frac{f}{b} \lambda$ , după care urmează o serie de franje luminoase de lărgime  $\frac{f}{b} \lambda$ , a căror intensitate scade foarte rapid cu  $x$ . Franjele luminoase sînt despărțite prin minime nule (franje complet întunecate) care se succed după fiecare distanță egală cu  $\frac{f}{b} \lambda$ , începînd de la centru.

c) **Rețeaua de direcție.** Dacă în loc de o singură fantă  $MN$  ca în fig. IV.3.9, realizăm într-un paravan opac un număr de  $N$  astfel de fante înguste de lărgime  $b$ , separate prin porțiuni netransparente de lărgime  $b'$ , obținem o *rețea de difracție*, reprezentată în fig. 3.IV.12.a, în care liniile negre reprezintă deschiderile  $b$ . Rețeaua de difracție se poate realiza practic, zgîriind suprafața unei plăci de sticlă, cu ajutorul unei mașini de divizat cu diamant,  $N$  segmente paralele. Porțiunile nezgîriate, rămînînd transparente, constituie

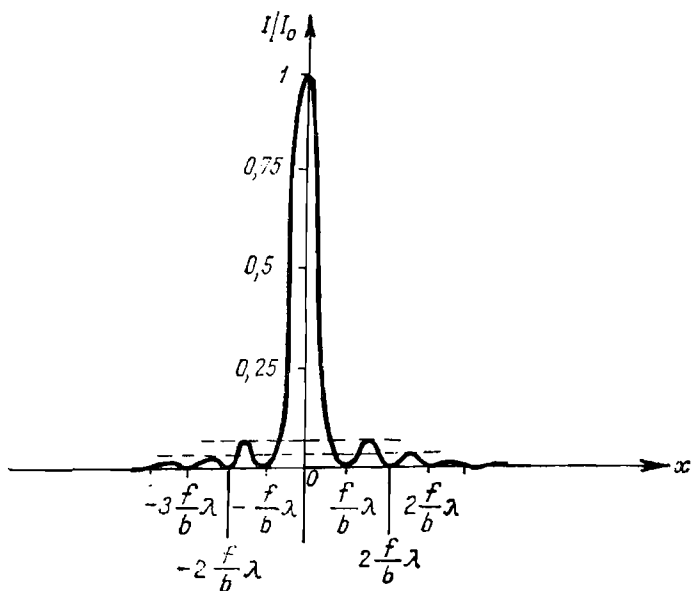


Fig. IV.3.11

deschiderile de lărgime  $b$ . Distanța dintre două trăsături succesive (sau dintre două goluri succesive) se numește *constanta rețelei*,  $l = \frac{L}{N}$ , în care  $L$  este lungimea totală a porțiunii striate. Dacă rețeaua are  $m$  trăsături pe unitatea de lungime ( $m = \frac{N}{L}$ ), evident că  $l = 1/m$ .

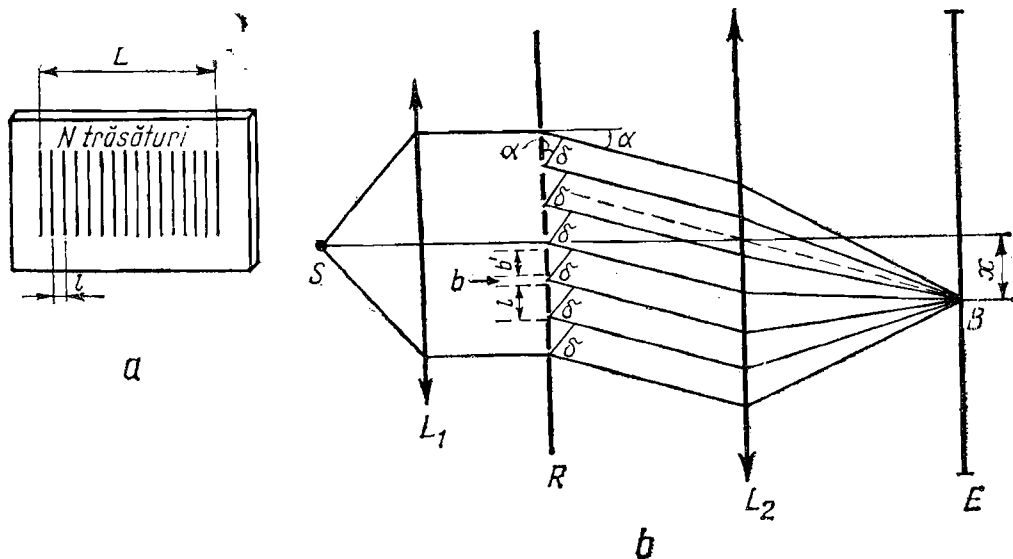


Fig. IV.3.12

În fig. IV.3.12.b, este dată schema experienței de difracție cu rețeaua  $R$ . Lumina paralelă cade sub unghiul de incidență zero pe rețeaua  $R$ . Pentru aflarea distribuției intensității luminii pe ecranul  $E$  se poate utiliza același formalism al zonelor Fresnel. Astfel, dacă considerăm din nou fiecare fantă a rețelei ca fiind împărțită în multe fișii paralele cu fanta, observăm că în fiecare fantă se va găsi o fișie așezată simetric în raport cu fanta vecină, adică la distanța  $l$ . Undele emise de aceste fișii într-o direcție  $\alpha$  au o diferență de drum  $\delta = l \sin \alpha$ . Se vede că vor exista foarte multe astfel de perechi de unde, care se vor întâlni într-un punct  $B$ . Interferența undelor de la două fișii aflate la distanța  $l$  este identică cu cea din dispozitivul Young. În consecință, dacă  $\delta = k\lambda$  (un multiplu întreg de  $\lambda$ ), obținem în  $B$  un maxim, iar dacă  $\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , obținem minime. În cazul rețelei, avem însă un număr foarte mare de astfel de unde interferente. Fără a intra în detalii asupra interferenței cu unde multiple, care depășește scopul acestei cărți, menționăm că în direcțiile  $\alpha$  pentru care:

$$l \sin \alpha = k\lambda, \quad (3.41)$$

se obțin maxime principale de interferență, iar între ele o serie de maxime secundare foarte slabe, în număr de  $N - 2$  (sau  $N - 1$  minime nule), unde  $N$  este numărul de deschideri ale rețelei.

Dar, deschiderile rețelei fiind foarte înguste, ele produc și difracția luminii. În consecință, pe ecranul  $E$  se va obține o distribuție de lumină rezultată din suprapunerea unui fenomen de interferență multiplă cu un fenomen de difracție produs de cele  $N$  fante înguste. De aceea, ca efect al difracției, maximele principale nu vor fi egale între ele, ci vor scădea treptat în intensitate cu creșterea ordinului  $k$ . Maximele secundare devin atât de slabe încât cele principale apar practic pe un fond întunecat și sînt extrem de înguste cînd  $N$  este mare.

Dacă iluminăm rețeaua cu lumină albă, relația 3.41 ne arată că pentru un  $k$  dat, diverse lungimi de undă  $\lambda$  vor avea maximul de intensitate sub diverse unghiuri  $\alpha$ , astfel că pe ecran se formează spectrul luminos al fascicului incident. Rețeaua de difracție este deci un instrument spectral cu care se poate analiza compoziția luminii emisă de un izvor dat. Pentru  $k = 1$  se obține spectrul de ordinul întâi, pentru  $k = 2$  se obține spectrul de ordinul doi etc. Franja centrală este totdeauna albă, deoarece în această direcție ( $\alpha = 0$ ) toate lungimile de undă satisfac condiția de maxim ( $\delta = 0$ ). Spectrele de difracție sînt dispuse de ambele părți ale franjei centrale, avînd liniile cu  $\lambda$  mai mici mai aproape de această franjă (cînd  $\lambda$  scade, scade și  $\alpha$ , conform relației 3.41).

### 3.4. POLARIZAREA LUMINII. TRANSVERSALITATEA VECTORULUI LUMINOS

Pentru explicarea interferenței și difracției a fost suficient să ne reprezentăm lumina ca o undă periodică, fără a fi necesar să știm dacă această undă este longitudinală sau transversală. În fig. IV.3.13 este dată schema unei experiențe care ne va obliga să optăm pentru una din alternative. Pe o suprafață plană de sticlă,  $P$ , este trimis un fascicul luminos în punctul  $o$ , sub unghiul



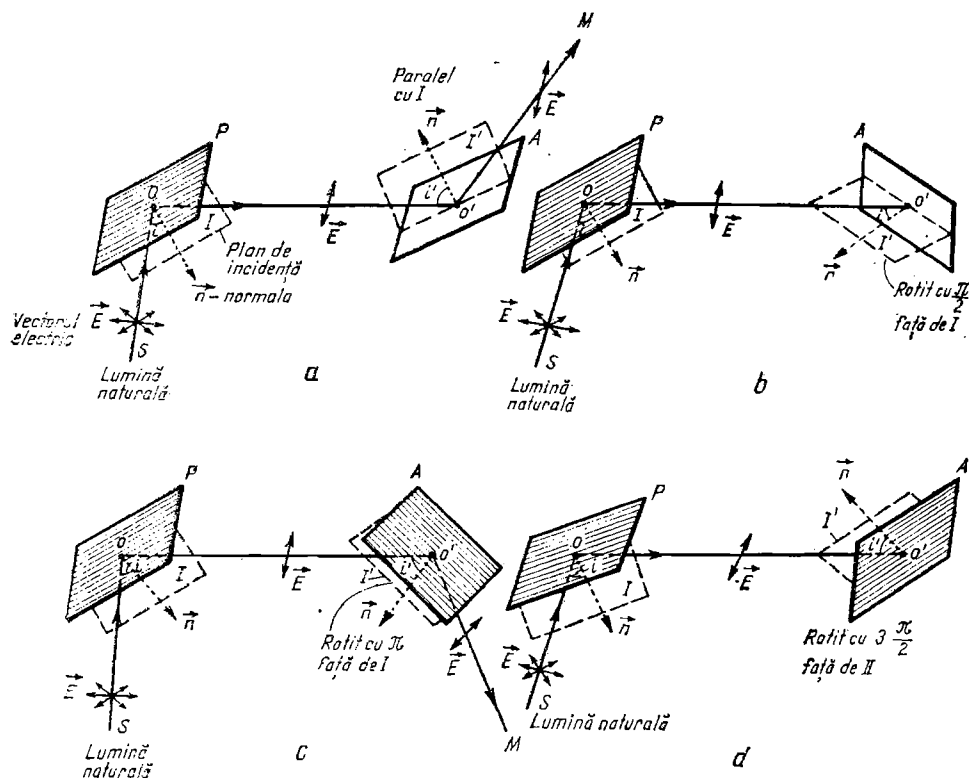


Fig. IV.3.13

de incidență  $i = 57^\circ$  (vom vedea mai jos de ce, tocmai sub acest unghi). După reflexie, lumina cade pe o altă suprafață plană de sticlă,  $A$  sub același unghi de incidență,  $i' = 57^\circ$ . În fig. IV.3.13.a planul de incidență  $I'$  al suprafeței  $A$  este paralel cu planul de incidență  $I$  al suprafeței  $P$ . Se constată că lumina se reflectă nestingherită și pe oglinda  $A$ , după direcția  $o'M$ . Se rotește oglinda  $A$  în jurul razei  $oo'$ , rezultată din prima reflexie în  $o$ . Este clar că prin această rotire unghiul  $i'$  nu se schimbă. Se observă o scădere a intensității razei  $o'M$  reflectată a doua oară. Continuând rotirea până când planele de incidență  $I'$  și  $I$  devin perpendiculare între ele, se constată că intensitatea razei  $o'M$  scade continuu până ce dispare complet, (fig. IV.3.13.b). Continuând rotirea, raza  $o'M$  reapare, crescând continuu până la o valoare maximă atinsă în momentul în care cele două plane au devenit din nou paralele, cu alte cuvinte, când  $I'$  a fost rotit cu  $\pi$  față de  $I$  (fig. IV.3.13.c). Se continuă rotirea; raza  $o'M$  scade iarăși până ce se anulează din nou pentru o nouă poziție perpendiculară a planelor de incidență unul față de altul, adică pentru rotirea lui  $I'$  cu  $3\frac{\pi}{2}$  față de  $I$  (fig. IV.3.13.d). Rotind mai departe placa  $A$ , raza  $o'M$  reapare, atinând valoarea maximă pentru o rotire de  $2\pi$ , care corespunde de fapt poziției inițiale (fig. IV.3.13.a).

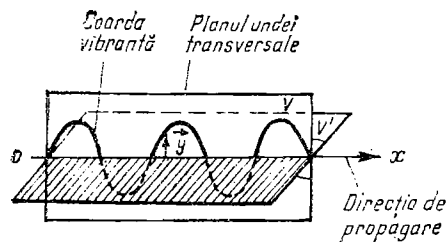


Fig. IV.3.14

Cum am putea explica aceste fenomene? Să observăm mai întâi că variațiile în intensitatea razei  $o'M$  nu apar în urma unor variații ale unghiului de incidență  $i'$  pe oglinda  $A$ , deoarece acest unghi rămâne constant, după cum am văzut, pentru că rotirea oglinzii  $A$  se face în jurul direcției  $oo'$  și normala  $\vec{n}$  va păstra în acest caz o aceeași înclinare față de  $oo'$ . Aceste variații apar numai în urma unor orientări diferite ale planului de incidență  $I$ , rotit în jurul razei de lumină  $oo'$ . Rezultă atunci că raza  $oo'$  nu are o structură simetrică în jurul direcției de propagare. Prin urmare, lumina nu poate fi o undă longitudinală, deoarece undele longitudinale au o structură simetrică față de direcția de propagare (exemplu, undele sonore, care se propagă sub forma unor comprimări și dilatări ale aerului de-a lungul direcției de propagare). O undă transversală poate însă manifesta anumite asimetrii în jurul direcției de propagare. Exemplul cel mai simplu este dat de coarda vibrantă (fig. IV.3.14). Starea de vibrație, adică depărtarea punctelor coardei față de poziția ini-

țială, este definită prin vectorul elongație  $\vec{y}$ . Acest vector este tot timpul normal pe direcția de propagare și se deplasează de-a lungul ei, menținându-se permanent într-un plan  $V$ , numit *plan de vibrație*. Oricare alt plan  $V'$  nu conține vibrații ale unde. Rotind un receptor special în jurul axei  $ox$ , acesta va înregistra oscilații numai în planul  $V$ . Observând acum că prin rotirea oglinzii  $A$  obținem lumina reflectată (după direcția  $o'M$ ) numai pentru anumite orientări ale ei, ne dăm seama prin analogie că raza  $oo'$  poartă unde luminoase transversale, ale căror vibrații se execută numai într-un singur plan. Unda care posedă anumite direcții privilegiate în care se execută vibrațiile sale se numește *undă polarizată*, iar fenomenul prin care se produc astfel de unde se numește *polarizare*. Raza  $oo'$  a suferit deci fenomenul de polarizare prin reflexia razei  $So$  pe suprafața de sticlă  $P$ . Pentru înțelegerea completă a fenomenelor trebuie deci să cunoaștem structura razei de lumină  $So$ . Această cunoaștere a întârziat pînă la descoperirea naturii electromagnetice a luminii. Conform acestei teorii, lumina este emisă sub formă de *unde electromagnetice transversale* de către atomii excitați ai sursei de lumină. S-a stabilit că orice atom emite lumină polarizată. Dar un atom dat își reia actul de emisie la intervale de timp extrem de scurte, iar fiecare atom emite, independent de ceilalți, unde electromagnetice de polarizații diferite, așa încît lumina emisă apare, în ansamblu, ca fiind nepolarizată, deoarece polarizația diferitelor unde emise se schimbă mai repede decît timpul de percepere a senzației de lumină de către organul nostru vizual. Raza de lumină va conține deci vibrații ce se execută în toate direcțiile perpendiculare pe direcția de propagare. Lumina emisă în mod obișnuit de către surse nu posedă așadar o direcție privilegiată

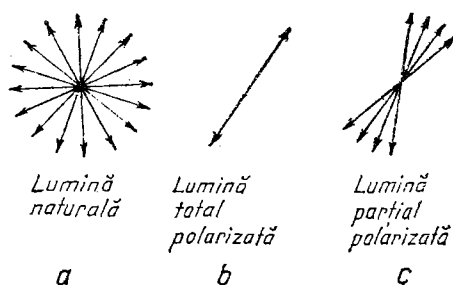


Fig. IV.3.15

de oscilație a câmpului electromagnetic. Ea se numește *lumină naturală*. S-a stabilit pe cale teoretică și experimentală că acțiunile luminoase (impresionarea retinei, a plăcii fotografice etc.) sînt produse de *cîmpul electric*  $\vec{E}$  al undei electromagnetice și nu de *cîmpul magnetic*  $\vec{H}$  (vezi experiența lui Wiener).

Dacă vectorul electric (vectorul lumină sau vectorul luminos) oscilează complet haotic în toate direcțiile într-un plan perpendicular pe direcția de propagare, avem de-a face, conform celor spuse mai sus, cu *lumină naturală* (fig. IV.3.15.a). În același timp, planul de oscilație al vectorului electric se deplasează de-a lungul direcției de propagare cu viteza luminii. Dacă vectorul electric are o singură direcție de oscilație, avem de-a face cu *lumină total polarizată* sau *liniar polarizată* (fig. IV.3.15.b), iar dacă el poate oscila în mai multe direcții posibile, cuprinse într-un anumit interval unghiular, lumina este *parțial polarizată* (fig. IV.3.15.c). În experiența descrisă în fig. IV.3.13,

raza  $oo'$  este desigur total polarizată; vectorul  $\vec{E}$  are o direcție unică de vibrație. Care este această direcție? Răspunsul poate fi stabilit experimental. Se trimite un fascicul paralel monocromatic de *lumină polarizată* pe o oglindă, sub unghiul de incidență  $i = 45^\circ$ . Raza reflectată (tot sub  $45^\circ$  față de normală) va interfera cu cea incidentă producînd unde staționare. Aceste unde staționare au fost observate experimental. Cum le interpretăm? Dacă direcția unică de vibrație a vectorului electric ar fi în planul de incidență,

în fig. IV.3.16. a se vede ușor că vectorii  $\vec{E}$  ai razei incidente și cei  $\vec{E}'$  ai razei reflectate sînt perpendiculari; dar două vibrații perpendiculare, după cum știm de la mecanică, nu pot da minime nule de interferență și în felul acesta nu poate fi explicată apariția nodurilor în sistemul de unde staționare observat în experiența de mai sus.

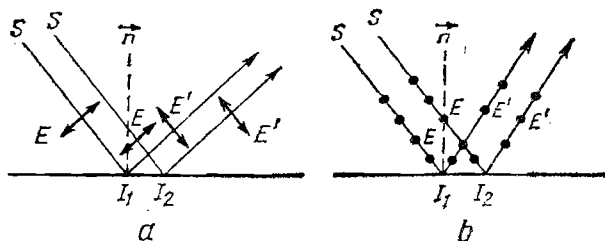


Fig. IV.3.16

Dacă direcția de vibrație a lui  $E'$  ar fi perpendiculară pe planul de incidență (în fig. IV.3.16.b vectorii  $\vec{E}$ , începînd planul caietului, sînt notați cu puncte), se vede pe fig. IV.3.16.b că vibrațiile incidente și cele reflectate au aceeași direcție și în consecință ele pot forma prin interferență minimele nule (nodurile) observate. Tragem deci concluzia că în lumina total polarizată, obținută prin reflexie, oscilațiile vectorului luminos (electric) se execută perpendicular pe planul de incidență. Așa se petrec lucrurile în experiența descrisă în fig. IV.3.13. Mai trebuie spus că în acea experiență oglinzile  $P$  și  $A$ , numite polarizor și analizor, sînt doar niște plăci dielectrice (sticlă) bine șlefuite neacoperite cu vreun stat metallic cum sînt de obicei oglinzile, deoarece reflexia pe metal se face diferit de reflexia pe dielectric și fenomenul de polarizație descris nu ar fi avut loc. Cercetîndu-se și raza refractată în sticlă s-a observat că și aceasta este polarizată.

Variîndu-se unghiul de incidență  $i$  al razei  $So$  din fig. IV.3.13, s-a putut constata că lumina reflectată  $oo'$  este, în mod obișnuit, parțial polarizată. Există însă un anumit unghi de incidență  $i_B$  (numit „unghiul lui Brewster”) pentru care raza reflectată este total polarizată. Acest unghi este dat de relația:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (3.42)$$

în care  $n_1$  și  $n_2$  sînt indicii de refracție ai mediului razei incidente și, respectiv reflectate. Valoarea lui pentru cazul în care lumina cade din aer pe sticlă este  $i_B \simeq 57^\circ$ . Motivul pentru care am luat încă de la începutul experienței descrise în fig. IV.3.13 incidența de  $57^\circ$  a fost deci acela de a obține prin reflexie lumina total polarizată.

Lumina refractată este de asemenea parțial polarizată, fiind însă maximă pentru incidență brewsteriană, fără a fi însă total polarizată ca cea reflectată. Gradul de polarizare al ei poate fi mărit printr-o nouă refracție pe o a doua lamă, apoi pe o a treia etc. Pentru un ansamblu de 8—10 lame, lucrînd la incidență brewsteriană, atît raza reflectată cît și cea refractată sînt practic, total polarizate. Examinînd raza emergentă cu ajutorul unei oglinzi analizoare într-un mod asemănător celui din experiența descrisă în fig. IV.3.13 s-a stabilit că direcția de vibrație a vectorului luminos (electric) în lumina total polarizată prin refracție se află în planul de incidență. Așadar cînd atît raza reflectată cît și cea transmisă sînt total polarizate (și numai atunci) vectorii electricei ai lor oscilează în direcții perpendiculare între ele.

Dar unghiul dintre direcțiile de propagare ale celor două radiații? Ce valoare are el de pildă, în cazul incidenței brewsteriene? Folosind legea refracției

$$\sin i_B / \sin r_B = n_2 / n_1$$

și legea lui Brewster scrisă sub formă:

$$\sin i_B / \cos i_B = n_2 / n_1$$

găsim imediat:

$$\cos i_B = \sin r_B.$$

Punînd de exemplu  $\sin r_B = \cos (90^\circ - r_B)$ , avem  $\cos i_B = \cos (90^\circ - r_B)$  și, deoarece unghiurile  $i_B$  și  $r_B$  sînt ascuțite, urmează că:

$$i_B + r_B = 90^\circ. \quad (3.43)$$

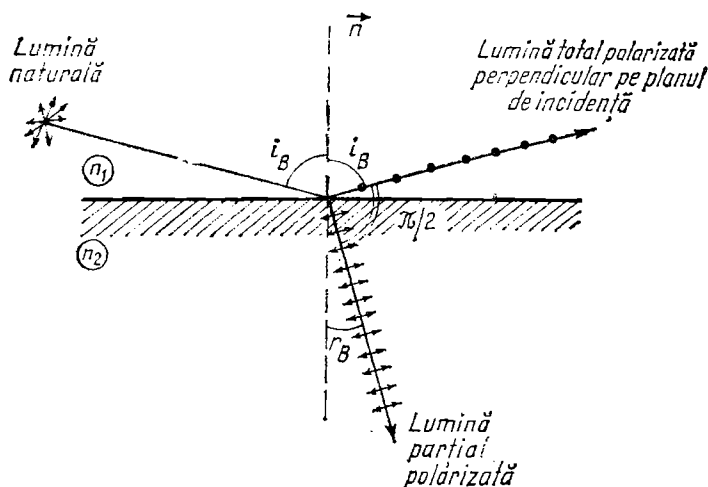


Fig. IV.3.17

Această relație ne spune că atunci cînd lumina cade sub unghiul Brewster pe un mediu transparent dielectric, raza reflectată și raza refractată sînt perpendiculare între ele. Acest caz este ilustrat în fig. IV.3.17.

*Experiența lui Wiener.* Teoria undelor electromagnetice a stabilit că dacă o undă electromagnetică se reflectă pe o suprafață a unui mediu mai dens ( $n_2 > n_1$ , unde  $n_1$  este indicele de refracție al primului mediu, în care se află raza incidentă, iar  $n_2$  este indicele de refracție al mediului al doilea), vectorul electric  $\vec{E}$  pierde prin reflexie o diferență de fază egală cu  $\pi$  (sau o diferență de drum  $\lambda/2$ ), iar vectorul magnetic  $\vec{H}$  se reflectă fără nici o diferență de fază. Dacă  $n_2 < n_1$ , vectorul magnetic este cel care se reflectă cu o pierdere de  $\pi$  (sau  $\lambda/2$ ), iar cel electric își păstrează faza neschimbată.

Wiener (1890) a realizat unde staționare luminoase trimițînd lumină monocromatică normal pe o oglindă pe suprafața căreia se afla depus un strat foarte subțire (cam  $\lambda/30$ ) de emulsie fotografică (suspensie de bromură de argint în colodiu). Interferența undei incidente cu cea reflectată dădea naștere unei unde staționare. Nodurile și ventrele acestora se puteau observa relativ ușor: regiunile în care se formaseră aglomerări de argint corespundeau ventrelor, deoarece ventrele sînt date de valorile maxime ale vectorului luminos al undei staționare, care prin acțiunea lui asupra bromurii de argint (develope) precipită argintul în cantități destul de mari. Făcînd experiența pentru cazul  $n_2 > n_1$ , Wiener a observat că *stratul de emulsie aflat chiar pe suprafața oglinzii rămînea neimpresionat*. Pe suprafață unda staționară are deci un nod, adică intensitate zero. Interferența între unda luminoasă incidentă și cea reflectată formează deci un minim nul pe suprafață. Rezultă că între ele există o diferență de drum egală cu  $\lambda/2$ . Dar dintre cei doi vectori ( $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ ) ai undei

electromagnetice, am văzut că  $\vec{E}$  este cel care se reflectă cu o diferență de drum egală cu  $\lambda/2$ . Apare astfel evident, pe cale experimentală, că vectorul electric este cel ce descompune bromura de argint, cu alte cuvinte, vectorul luminos este *vectorul electric* al undei electromagnetice.

## 4. Optică fonică și spectroscopie

### 4.1. EFECTUL FOTOELECTRIC

a) **Caracteristica tensiune-curent a efectului fotoelectric.** Emisia de electroni din suprafețele corpurilor în urma acțiunii anumitor radiații electromagnetice asupra acestor suprafețe poartă numele de efect fotoelectric. Și pentru că este vorba de scoaterea electronilor din masa corpurilor iradiate, el se mai numește *efect fotoelectric extern*. A fost descoperit de H. Hertz în 1887. În fig. IV.4.1 este dată schema unei experiențe pentru studiul cantitativ al efectului fotoelectric. Într-o incintă vidată se află două plăci metalice  $A$  și  $K$ . Prin fereastra  $P$  suprafața  $K$  poate fi iradiată din afară cu lumină monocromatică. Cu o sursă de tensiune  $E$  putem face ca electrodul  $K$  să fie negativ sau pozitiv față de  $A$ . Când e negativ, electronii emiși prin efect fotoelectric (fotoelectronii) sînt accelerați spre  $A$ , stabilindu-se astfel un curent ce poate fi măsurat cu galvanometrul  $G$ . Mărind diferența de potențial  $U$  (măsurată cu voltmetrul  $V$ ), intensitatea curentului crește pînă ce atinge o valoare maximă, constantă, numită *curent de saturație*  $I_s$  (fig. IV.4.2). Este interesant de observat că și în absența tensiunii între electrozi ( $U = 0$ ), galvanometrul indică totuși un curent  $I_0$ , ceea ce dovedește că electronii scoși din suprafața  $K$  au o energie cinetică apreciabilă care le permite să ajungă la  $A$ , închizînd astfel circuitul. Pentru micșorarea acestui curent  $I_0$ , trebuie inversată polaritatea celor doi electrozi: electrodul  $A$  trebuie să fie făcut negativ față de  $K$  pentru a respinge fotoelectronii proveniți din  $K$ . Mărind acest potențial „întîrzietor“, curentul poate fi redus pînă la zero pentru o valoare  $U_0$  care face ca nici un fotoelectron emis de  $K$  să nu mai poată ajunge la  $A$ . Curba reprezentată în fig. IV. 4.2 se numește *caracteristica tensiune-curent* (sau caracteristica

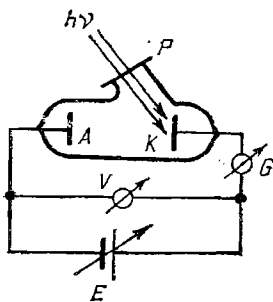


Fig. IV.4.1

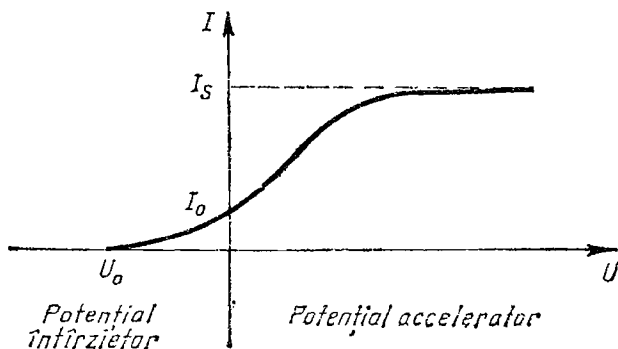


Fig. IV.4.2

volt-ampere) a efectului fotoelectric. Intensitatea de saturație  $I_s$  a curentului de fotoelectroni este atinsă pentru acea valoare a potențialului accelerator  $U$ , la care toți electronii scoși din suprafața  $K$  de către lumina incidentă în unitatea de timp sînt colectați de anodul  $A$  în aceeași unitate de timp.

b) **Legile efectului fotoelectric.** Studiul experimental cantitativ al efectului fotoelectric a dus la următoarele patru legi:

— *Curentul de fotoelectroni apare numai dacă lungimea de undă a radiației incidente este mai mică decît o valoare  $\lambda_0$  numită pragul roșu al efectului fotoelectric.*

— *Intensitatea curentului de saturație este direct proporțională cu fluxul luminos incident.*

— *Energia cinetică a fotoelectronilor nu depinde de mărimea fluxului luminos, ci de frecvența luminii incidente.*

— *Efectul fotoelectric este practic instantaneu.* S-a putut constata că emisia de electroni apare la mai puțin de  $10^{-9}$  s după începerea iluminării.

c) **Explicarea legilor efectului fotoelectric. Fotonul.** Legile de mai sus stabilite direct pe cale experimentală, nu au putut fi explicate în cadrul teoriei ondulatorii a luminii. Într-adevăr, considerînd o undă electromagnetică luminoasă ce cade pe un metal, ne-am putea explica emisia prin aceea că electronii din metal sînt puși în oscilație de către cîmpul electric variabil al undei; dacă forțele ce mențin electronii în metal nu sînt suficient de mari ei vor putea fi scoși în urma acestor oscilații forțate, datorită energiei cinetice de oscilație căpătată în cîmpul undei. Deoarece însă amplitudinea oscilațiilor electronice trebuie să fie proporțională cu amplitudinea de oscilație a cîmpului electric (vectorul luminos), ar rezulta că energia cinetică de oscilație a electronilor trebuie să fie proporțională cu amplitudinea undei incidente. Prin urmare, energia cinetică a electronilor expulzați din metal în urma acestor oscilații ar trebui să depindă de intensitatea luminii incidente (deoarece intensitatea undei este proporțională cu pătratul amplitudinii). Experiența însă nu pune în evidență nici un fel de dependență a energiei fotoelectronilor de intensitatea luminii, ci de frecvența ei (legea a treia), arătînd de exemplu că radiațiile violete dau electroni mai rapizi decît cele roșii.

Aceste legi au putut fi explicate numai după cercetarea mai profundă a schimbului de energie dintre lumină și substanță în procesul fotoelectric. În 1900 Planck a descoperit că radiațiile electromagnetice (deci și radiațiile luminoase) sînt emise în „porții” mici, numite *cuante* sau *fotoni* a căror energie  $\varepsilon$  este dată de:

$$\varepsilon = h\nu,$$

unde  $\nu$  este frecvența radiației, iar  $h = 6,624 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  este constanta lui Planck. Einstein, în 1905, face ipoteza că și în procesul de absorbție de către substanță, lumina manifestă proprietăți cuantice. El reușește să explice legile de bază ale fotoefectului considerînd că în acest proces fotonii radiației de frecvență  $\nu$ , comunică energia cîte unui electron liber din interiorul metalului. Deci absorbția de energie nu este un proces continuu, ci este similară ciocnirii dintre două particule, în cazul nostru, fotonul și electronul. Dacă energia  $h\nu$  este suficient de mare, atunci electronul poate învinge *lucrul de ieșire* (extracție),  $\varphi$  și părăsește metalul cu energia cinetică  $mv^2/2$ , conform legii conservării energiei:

$$h\nu = \varphi + \frac{mv^2}{2}. \quad (4.1)$$

Această egalitate poartă numele de formula lui Einstein pentru efectul fotoelectric. Ea ne arată că pentru o substanță dată ( $\varphi$  dat) energia cinetică a electronilor expulzați este direct proporțională cu frecvența radiației incidente, explicînd astfel legea a treia. Pe de altă parte, se vede că pentru o substanță dată, energia electronilor emiși,  $mv^2/2$ , scade cînd frecvența  $\nu$  scade. Pentru o anumită frecvență,  $\nu_0$ , ei nu mai au energie cinetică ( $v = 0$ ):

$$h\nu_0 = \varphi. \quad (4.2)$$

Această frecvență constituie deci o limită sub care efectul fotoelectric nu mai apare. Lungimea de undă  $\lambda_0 = c/\nu_0$ , ( $c$  fiind viteza luminii) este tot mai „pragul roșu” definit în legea întâi, care își găsește astfel explicația. Pragul roșu este caracteristic fiecărei substanțe al cărei lucru de ieșire este  $\varphi$ . El rezultă din (4.2):

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\varphi}. \quad (4.3)$$

Și legea a doua este ușor de explicat pe baza relației lui Einstein (4.1): numărul de electroni scoși din metal în unitatea de timp este direct proporțional cu numărul de fotoni incidenti în unitatea de timp. Observînd că intensitatea curentului este dată de numărul electronilor pe secundă, iar intensitatea fluxului luminos, de numărul de fotoni incidenti pe secundă, înțelegem acum ușor de ce intensitatea curentului de electroni este direct proporțională cu intensitatea fluxului luminos.

Trebuie spus însă că această lege poate fi explicată și în concepția ondulatorie, deoarece este firesc ca numărul de fotoelectroni scoși în unitatea de timp (intensitatea curentului) să fie direct proporțional cu puterea radiației incidente (fluxul luminos).

Concepția fonică explică la fel de simplu și legea a patra: fotonul, întîlnind electronul, îi comunică acestuia în întregime energia sa, fiind imediat expulzat, ca în orice ciocnire, dacă această energie depășește energia de ex-



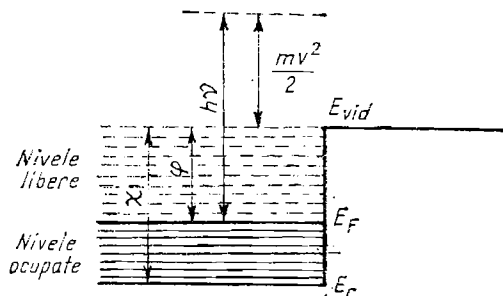


Fig. IV.4.3

tracție. În concepția ondulatorie, frontul de undă ar fi cedat numai o mică parte din energia sa în unitatea de timp, ceea ce ar fi făcut să apară un interval apreciabil de timp între incidență și emisie, pentru acumularea energiei de către electron, necesară ieșirii din metal. De exemplu, pentru  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$  și o densitate de flux obișnuită de  $10^{-9} \text{ J/m}^2 \cdot \text{s}$ , calculul prevede pentru acest interval cam 50 minute, rezultat care este în total dezacord cu experiența.

Teoria elementară a lui Einstein expusă mai sus explică perfect fundamentele efectului fotoelectric. Ea nu ne dă însă mecanismul de emisie al electronilor din solid și de aceea nu poate explica o serie de rezultate experimentale cum ar fi dependența de temperatură a curentului fotoelectric, dependența sa de starea suprafeței, de natura fotocatodului ș.a.

d) **Mecanismul emisiei fotoelectronilor.** Vom apela mai jos la cunoștințele cititorului asupra distribuției electronilor în zone de energii într-un solid.

*Emisia din metale.* În fig. IV.4.3 este dată schema nivelurilor energetice (ocupate și neocupate) ale electronilor în rețeaua metalică la  $T = 0^\circ\text{K}$ . În această figură  $E_c$  este nivelul corespunzător limitei inferioare a zonei de conducție, iar  $E_F$  este nivelul Fermi.  $\varphi$  este diferența dintre nivelul energetic al electronului în afara metalului (în vid) și cel mai înalt nivel energetic ocupat din interiorul metalului. Evident, pentru a se emite un fotoelectron, trebuie comunicată o energie cel puțin egală cu  $\varphi$ . Această energie minimă ne dă „pragul roșu” ( $h\nu_0 = \varphi$ ). Pentru ca fotoelectronul să dispună și de o energie cinetică  $mv^2/2$  în afara metalului, se vede imediat pe schema din fig. IV.4.3 că radiația incidentă trebuie să aibă energia  $h\nu = \varphi + \frac{mv^2}{2}$ . Această rela-

ție este tocmai formula lui Einstein (4.1). Teoria zonelor permite deci explicarea relativ simplă a legilor efectului fotoelectric. În plus ea poate explica influența temperaturii. Astfel, nivelul Fermi este bine definit doar la  $T = 0^\circ\text{K}$ . De aceea și pragul fotoelectric  $\lambda_0$  (sau  $\nu_0$ ) are, teoretic, o valoare unică numai în acest caz ideal. În realitate,  $T > 0$  și o parte din electronii aflați pe nivelele inferioare nivelului Fermi sînt excitați termic pe nivele superioare acestuia, ceea ce face ca să apară fotoelectroni chiar și pentru frecvențe mai mici decît  $\nu_0$ . De fapt la temperaturile obișnuite ( $T \simeq 300^\circ\text{K}$ ) numărul acestor fotoelectroni este în general neglijabil de mic la metale.

*Efectul fotoelectric în izolatori și semiconductori.* După cum se știe (vezi VI) izolatorii, spre deosebire de metale, nu dispun de o zonă parțial ocupată.

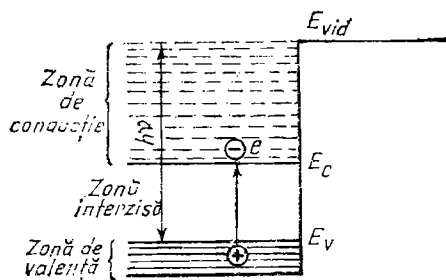


Fig. IV.4.4

Din această cauză ei nu pot conduce curentul, în condiții obișnuite. În fig. IV.4.4 este dată schema nivelelor energetice într-un izolator la  $T = 0\text{ K}$ . El poate conduce curentul numai dacă electronii din zona de valență (complet ocupată) capătă energie suficientă, cel puțin egală cu  $E_c - E_v$ , pentru a intra în zona de conducție (complet liberă). Această energie poate fi furnizată electronului pe cale termică, prin interacțiuni cu radiația sau prin alte mijloace, atât pentru cazul izolatoarelor cît și al semiconductorilor. Efectul fotoelectric la izolatoare și mai ales, la semiconductori este deci important în primul rînd pentru obținerea electronilor de conducție necesari trecerii curentului electric prin aceste corpuri. Din fig IV.4.4 se vede că pentru ca un electron de valență să devină un electron de conducție, energia radiației incidente trebuie să aibă cel puțin valoarea:

$$h\nu_0 = \Delta E \quad (4.4)$$

în care  $\Delta E = E_c - E_v$  este lărgimea benzii interzise. Această eliberare a electronilor de valență din jurul atomilor rețelei sub acțiunea radiației și trecerea lor în rîndul electronilor de conducție se numește *efect fotoelectric intern*. Acest efect nu duce deci la expulzarea electronului din izolator sau semiconductorul respectiv, ci produce numai o variație a rezistenței materialului respectiv. Pentru detalii se va consulta capitolul VI.4.2.

e) **Aplicații ale efectului fotoelectric.** Pe principiul efectului fotoelectric funcționează *celulele fotoelectrice*, care transformă energia luminoasă în energie electrică. Ele au o mare răspîndire în automatizare, cinematografie și televiziune și în multe alte domenii ale științei și tehnicii.

*Celula fotoelectrică cu vid.* În fig. IV.4.5 este reprezentată schema unei celule fotoelectrice care constă dintr-un mic balon de sticlă vidat, acoperit pe o anumită porțiune interioară cu un strat metalic ce constituie fotocatodul. Se utilizează straturi de cesiu, potasiu, argint, antimoniu-cesiu și altele în funcție de domeniul spectral la care trebuie să fie sensibilă celula.

Anodul este un inel metalic așezat la o anumită distanță de catod (anodul poate fi și o plasă de sîrmă sau o mică sferă metalică în centrul balonului). Cei doi electrozi pot fi legați la un circuit cu ajutorul a două fire metalice ce trec prin peretele sticlei. Fotonii de energie  $h\nu$  căzînd pe catod expulzează din suprafața acestuia electroni prin *efect fotoelectric exterior*. Aceștia sînt dirijați spre anod de către cîmpul electric accelerator creat de bateria  $B$ , dînd astfel naștere unui curent electric ce trece prin consumatorul  $R$ . Curentul de saturație obținut cu aceste celule cu vid este în mod obișnuit de apro-

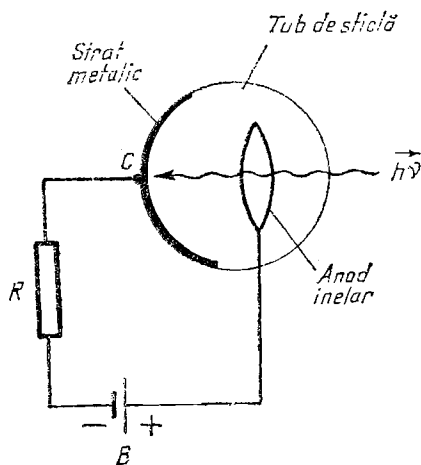


Fig. IV.4.5

ximativ 50 microamperi pe lumen ( $\mu\text{A/lm}$ ). Receptorul  $R$  trebuie deci să fie destul de sensibil pentru a „răspunde” la semnale foarte mici de curent declanșate de fluxurile luminoase.

**Celula fotoelectrică cu gaz.** Schema unei astfel de celule nu diferă de cea din fig. IV.4.5. Celula este însă umplută cu un gaz inert la presiuni mai mici decât cea atmosferică. Dacă tensiunea dintre anod și catod este suficientă, electronii emiși din catod de către fotoni, pot fi accelerați în câmpul electric pînă la energia cinetică necesară ionizării atomilor gazului prin ciocniri. Ioni pozitivi și electronii astfel generați, se îndreaptă către electrozii corespunzători, contribuind astfel la creșterea curentului. Pentru un flux luminos dat, aceste celule dau curenți de saturație de zeci de ori mai mari decât cele cu vid.

**Fotorezistențele.** Spre deosebire de cele două dispozitive, descrise mai sus, care folosesc efectul fotoelectric extern, fotorezistențele folosesc efectul fotoelectric intern la semiconductoare; prin iluminare crește numărul de electroni și de goluri pozitive, ceea ce duce la micșorarea rezistenței electrice a semiconductorului respectiv. La o fotorezistență, semiconductorul (seleniu, sulfură de cadmiu, de taliiu, de plumb și altele) este depus sub formă de strat subțire pe o plăcuță izolatoare (de exemplu, sticlă). La marginile plăcuței se află două straturi înguste metalice, care constituie electrozii fotorezistenței (fig. IV.4.6). Legînd acești electrozi la o porțiune dintr-un circuit dat, curentul prin acest circuit va putea fi modificat prin iluminarea fotorezistenței cu radiații de o anumită lungime de undă.

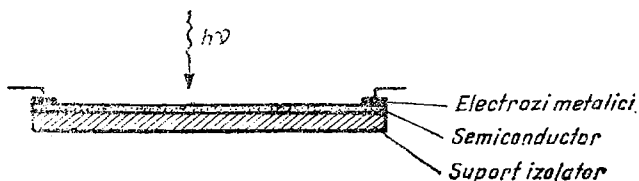


Fig. IV.4.6

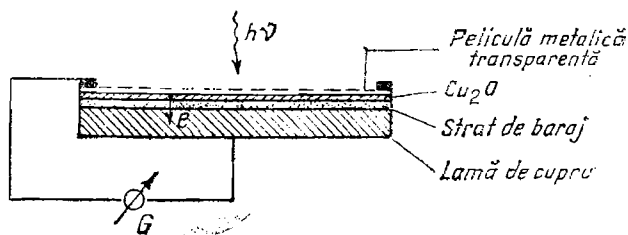


Fig. IV.4.7

*Celula fotovoltaică sau celula cu strat de baraj.* Pe suprafața unei lame de cupru se depune un strat subțire de oxid cupros  $\text{Cu}_2\text{O}$  (fig. IV.4.7). La suprafața de separare dintre  $\text{Cu}_2\text{O}$  și placa de cupru se formează un *strat de baraj* care permite electronilor să treacă numai în sensul de la  $\text{Cu}_2\text{O}$  spre  $\text{Cu}$ . Peste stratul de  $\text{Cu}_2\text{O}$  se depune o peliculă foarte subțire metalică (de exemplu, aur) încât să fie transparentă pentru lumină. Acest strat metalic joacă rolul de electrod; un al doilea electrod îl constituie chiar placa de cupru. Lăsând să cadă lumină pe această celulă, ea va străbate stratul subțire metalic și va excita în semiconductorul  $\text{Cu}_2\text{O}$  electroni din banda de valență în banda de conducție. Aceștia pot străbate stratul de baraj, trecând pe placa de cupru. Ia naștere astfel o diferență de potențial, care va face ca în circuitul închis prin galvanometrul  $G$  să treacă un curent electric fără ajutorul vreunei tensiuni electromotoare aplicată din exterior.

În afara celulelor cu oxid cupros și cupru (celulele cu cuproxid) se mai utilizează și celule cu seleniu și plumb, cu telur și plumb etc. Sensibilitatea celulelor fotovoltaice, numite uneori și *celule fotogalvanice*, sau *celule fotoelectrice generatoare*, poate ajunge pînă la ordinul  $10^3 \mu\text{A}/\text{lm}$  și pot da fotocurenți pentru un domeniu foarte larg de lungimi de undă, mergînd pînă în infraroșul îndepărtat.

Deoarece celula fotovoltaică produce curent fără o sursă exterioară de tensiune, ea este un transformator (convertizor) de energie luminoasă direct în energie electrică. Randamentul nu depășește, din păcate, în prezent cîteva procente. Utilizîndu-se, de exemplu, celule cu siliciu se poate obține, în timpul unei zile însorite, o putere electrică pînă la  $100 \text{ W}/\text{m}^2$  de substanță fotosensibilă, cu un randament de aproximativ 10%. Calculele arată că cerințele principale, ca iluminat, încălzit, frigider etc., în 24 h, pentru o locuință pot fi satisfăcute de o baterie solară de celule fotoelectrice avînd suprafața efectivă totală de  $5,5 \text{ m}^2$ .

## 4.2. NOȚIUNI DE SPECTROSCOPIE

a) **Serii spectrale.** După cum se știe, emisia luminii este rezultatul unui proces la scară atomică. Atomul este mai întîi excitat pe un nivel energetic superior, apoi el emite sub formă de radiație electromagnetică energia de excitare, revenind pe un nivel energetic inferior. La procesul de emisie participă, de regulă, numai electronii de pe păturile exterioare ale atomului, numiți și electroni de valență (sau electroni optici), iar aceștia au multiple posibilități de a ocupa diverse nivele energetice permise și deci de a emite radiații de diferite frecvențe, conform legii  $E_{\text{superior}} - E_{\text{inferior}} = h\nu$ . Numărul total

de lungimi de undă sau de frecvențe din radiația unui atom formează *spectrul de emisie* al atomului dat, și el va fi cu atât mai simplu cu cât numărul electronilor de valență este mai mic. Cititorul cunoaște desigur cele câteva *serii spectrale*, relativ simple, ale hidrogenului, ci și alți atomi cum sînt cei ai metalelor alcaline, de exemplu (litium, sodiu, potasiu etc.) dau spectre simple, deoarece au un singur electron pe pătura de valență. Manganul, fierul, cromul, wolframul (tungstenul), molibdenul, tantalul, pămînturile rare și altele, dau spectre complicate, cu un mare număr de frecvențe, deoarece au numeroși electroni pe ultima pătura. Important este faptul că fiecare element chimic produce un anumit spectru de radiații, bine definit, care nu mai este întîlnit la un alt element. Există deci o strînsă legătură între structura atomului și spectrul său de emisie, ceea ce face posibilă identificarea unui element chimic după natura spectrului.

b) **Spectroscopul.** Spectroscopul este un aparat care permite descompunerea unui fascicul de lumină în radiațiile monocromatice din care este alcătuit fasciculul și analiza acestor radiații. În fig. IV.4.8.a este dată schema unui spectroscop cu prismă. Radiațiile luminoase de la sursa *S* sînt transformate într-un fascicul paralel cu ajutorul colimatorului. Colimatorul este un tub metalic care are la un capăt o lentilă convergentă, iar la celălalt capăt o fantă foarte îngustă a cărei poziție coincide cu planul focal al lentilei. Căzînd pe prisma spectroscopului, lumina este descompusă datorită fenomenului de dispersie, în radiațiile sale monocromatice. Fasciculul astfel descompus este analizat de către observator cu ajutorul lunetei acomodată pentru infinit. Punerea la punct pentru infinit a lunetei, prin deplasarea ocularului, este necesară pentru ca observatorul să poată vedea clar imaginea fantei *F*, de la care sosesc raze paralele ca urmare a acțiunii colimatorului. Dacă sursa *S* este *monocromatică*, în cîmpul lunetei se vede un mic segment de dreaptă, care nu este altceva decît imaginea fantei *F* formată pe retina ochiului. Ea are culoarea corespunzătoare sursei și se numește *linie spectrală*. Pentru determinarea poziției liniei spectrale se folosește de obicei o plăcuță de sticlă pe

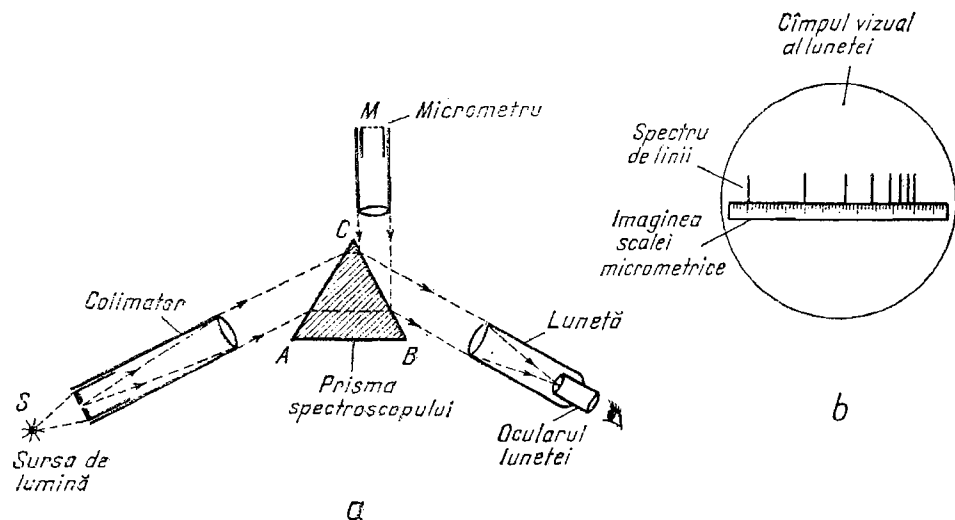


Fig. IV.4.8

care sînt gradate diviziuni foarte apropiate (în fig. IV.4.8.a, micrometrul  $M$ ). Plăcuța este iluminată cu o sursă auxiliară și prin reflexia razelor pe fața  $BC$  a prisme, acestea pătrund în lunetă formînd apoi, în final, pe retină, imaginea reală a diviziunilor, suprapusă peste imaginea reală a fantei (liniei spectrale). Păstrînd fixă imaginea micrometrului, se poate repera poziția liniei spectrale citind diviziunea în dreptul căreia se află.

Dacă atomii emițători se află în stare gazoasă destul de rarefiată, încît în timpul emisiei fiecare atom să nu sufere practic influențe din partea atomilor vecini, atunci el emite o serie de radiații monocromatice, care alcătuiesc spectrul său caracteristic. Trecînd prin prisma spectroscopului acestea sînt deviate spre baza prisme, dar în mod diferit, în funcție de lungimea de undă a fiecăreia. Ca urmare, în cîmpul lunetei va apărea o serie de linii colorate, fiecare linie fiind imaginea fantei în culoarea radiației respective. Ele alcătuiesc astfel un *spectru de linii* (fig. IV.4.8.b).

Dacă în locul ochiului se folosește ca receptor de lumină placa fotografică, aparatul poartă numele de *spectrograf*.

c) **Clasificarea spectrelor.** Am văzut mai sus că atomii izolați (în stare gazoasă) emit *spectre discrete* (de linii). Astfel de spectre sînt emise, de exemplu, de către descărcările electrice în gaze monoatomice la presiuni joase (sub 1 mm Hg). Dacă gazul emițător este format din molecule (gaz molecular), el emite *spectre de bandă*. Acestea sînt alcătuite dintr-o serie de dungi, luminoase de largimi diferite, numite *benzi spectrale*. O bandă spectrală poate avea o luminozitate continuă, sau poate fi alcătuită la rîndul ei dintr-o serie de linii extrem de apropiate între ele.

Într-un corp solid atomii și ionii sînt foarte apropiați între ei și de aceea nivelele lor energetice sînt deformate și descompuse datorită influenței microcîmpurilor create de atomii și ionii vecini. Agitația termică permanentă a lor în jurul poziției de echilibru contribuie la apariția unei mari varietăți de nivele de excitare. De aceea un corp solid incandescent, cum ar fi de exemplu, un filament încălzit electric, nu va emite un spectru format din radiații monocromatice izolate, cum se întîmplă la gazele rarefiate, unde distanța dintre atomi este mare, ci va prezenta un *spectru continuu*, cuprinzînd toate lungimile de undă posibile. În cîmpul lunetei spectroscopului, un astfel de spectru apare ca o fișie colorată în culorile curcubeului, trecerea de la o nuanță la alta făcîndu-se uniform, fără discontinuități.

Pînă acum am vorbit de *spectre de emisie*, obținute prin excitarea atomilor, fie într-o descărcare electrică în care atomii sînt excitați de regulă prin ciocniri electronice (electronii primesc energie cinetică prin accelerare în cîmpul electric dintre electrozi și o cedează apoi atomilor prin ciocniri), fie într-un corp solid incandescent care emite un spectru continuu. Spectroscopia cunoaște însă și *spectre de absorbție*. Un spectru de absorbție al unei substanțe date se obține așezînd această substanță între o *sursă de radiații cu spectru continuu* și aparatul spectral. Dacă substanța absoarbe una sau mai multe frecvențe din radiația continuă incidentă, în luneta spectroscopului spectrul continuu va fi brăzdat de o serie de linii sau benzi întunecoase situate exact în locurile în care ar fi trebuit să se afle acele frecvențe în absența substanței absorbante. Spectrul Soarelui, de exemplu apare brăzdat de astfel de dungi negre (linii Fraunhofer), care se datoresc absorbției luminii de către atomii vaporilor și gazelor ce înconjoară sfera de foc a Soarelui. Unele din aceste linii se datoresc și absorbției în atmosfera terestră.

## PROBLEME

1. Spotul unui galvanometru cu oglindă deviază cu  $\alpha_0$  pentru un curent  $i_0$ . Cu ce unghi  $\alpha$  se rotește oglinda sa plană  $AB$  pentru un curent  $i$ , dacă distanța de la centrul oglinzii pînă la planul scalei, în poziția de repaus a spotului, este  $R$ ?

Aplicație:  $\alpha_0 = 10^\circ$ ;  $i_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  A;  $i = 4,99 \cdot 10^{-7}$  A;  $R = 1$  m

R:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\alpha_0}{R i_0} i; \alpha \simeq 7^\circ.$$

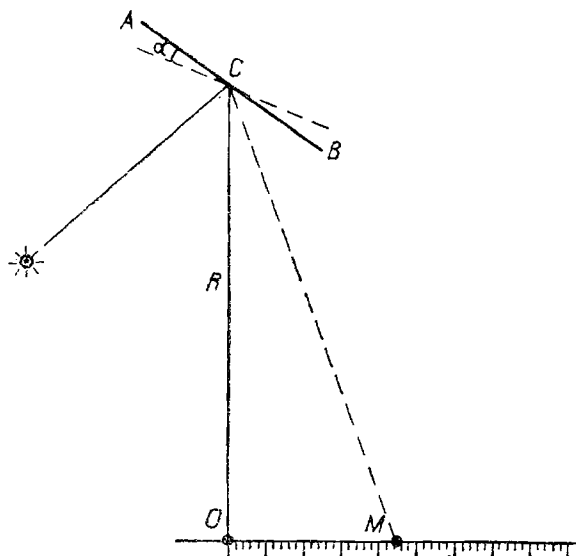


Fig. IV.P.1

2. Pe fundul plan, orizontal, al unui lac, avînd adîncimea  $l$ , se află o pietricică. Un copil, vrînd să o deplaseze, introduce un baston în direcția ei, sub un unghi  $\alpha$  față de normala la suprafața lacului. La ce distanță  $x$  de pietricică atinge bastonul fundul lacului, dacă indicele de refracție relativ al apei față de aer este  $n$ ?

Aplicație:  $l = 60$  cm;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $n = 4/3$ .

R: 
$$x = l \sin \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \simeq 0,103 \text{ m}.$$

3. Un fascicul de lumină monocromatică, avînd lungimea de undă  $\lambda$ , cade asupra unei bucăți de gheață aflată la temperatura  $0^\circ$  C. Să se calculeze numărul  $N$  al fotonilor, necesar pentru transformarea în vapori a unei mase  $m$  de gheață, dacă sînt cunoscute căldura latentă de topire a gheții  $l_{\text{top}}$ , căldura specifică a apei  $c_a$  și căldura latentă de vaporizare  $l_{\text{vap}}$ .

Aplicație:  $\lambda = 4100$  Å;  $m = 1$  g;  $l_{\text{top}} = 334, 4 \cdot 10^3$  J/kg;  $c_a = 4180$  J/kg;  $l_{\text{vap}} = 2253 \cdot 10^3$  J/kg.

Se dau: constanta Planck  $h = 6,624 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  și viteza luminii  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

**R:** 
$$N = \frac{m\lambda(l_{\text{top}} + c_{\text{u}}\Delta t + l_{\text{vap}})}{hc} : \simeq 6,75 \cdot 10^{21}.$$

4. Pe o lamă de sticlă cu fețe plan paralele, avînd indicele de refracție  $n$  și grosimea  $e$ , cad două raze de lumină provenite de la un izvor punctiform  $S$ , aflat la distanța  $h$  de suprafața lamei. Prima rază, căzînd pe suprafața lamei sub unghiul de incidență  $i$ , se îndreaptă, după reflexie, spre lentila convergentă  $L$ , al cărui ax optic principal este paralel cu raza reflectată. A doua rază, la incidență normală, după trecerea prin lamă, este reflectată paralel cu axul optic principal al lentilei  $L$  cu ajutorul unei oglinzi plane  $O$ . Distanța dintre cele două raze reflectate este  $d$ .

a) La ce distanță de lentila  $L$  trebuie așezat un ecran  $E$ , pentru ca cele două raze să se întâlnească pe suprafața lui, dacă este folosită o lentilă subțire biconvexă din sticlă, cu indicele de refracție absolut  $n_L = 1,5$ , aflată în aer ( $n_{\text{aer}} = 1$ ), avînd razele de curbură  $R_1 = 12 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 60 \text{ cm}$ ?

b) Să se determine diferența de drum  $\delta$  între cele două raze în punctul de convergență.

c) Să se determine diferența de drum  $\delta$  în cazul  $d = e$ ;  $i = \pi/4$ . Aplicație:  $e = 2 \text{ mm}$ ;  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 1,5$ .

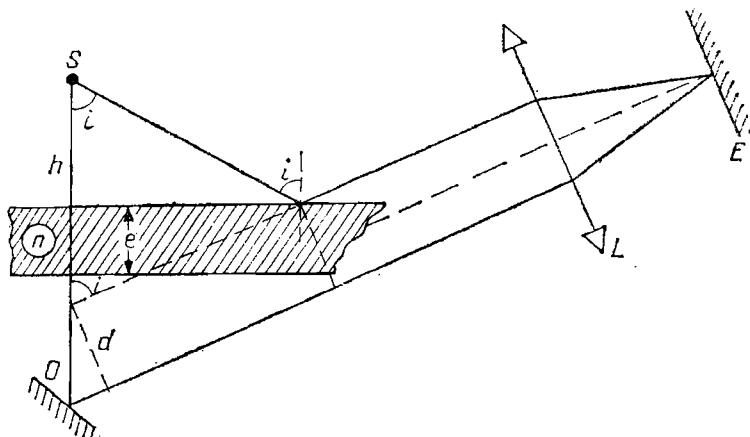
d) Să se calculeze la punctul c) diferența de fază  $\Delta\varphi$ , dacă în calea celor două raze reflectate este așezat un filtru monocromatic roșu, ce transmite lungimea de undă  $\lambda = 6560 \text{ \AA}$ .

**R:** a)  $f = 0,2 \text{ m}$ .

b)  $2h + e(n - 1) + \frac{d}{\sin i} (1 + \cos i)$

c)  $\delta = 2h + e(n + \sqrt{2})$ ;  $\delta \simeq 45,82 \text{ mm}$

d)  $\Delta\varphi \simeq 4,4 \cdot 10^5 \text{ rad}$ .





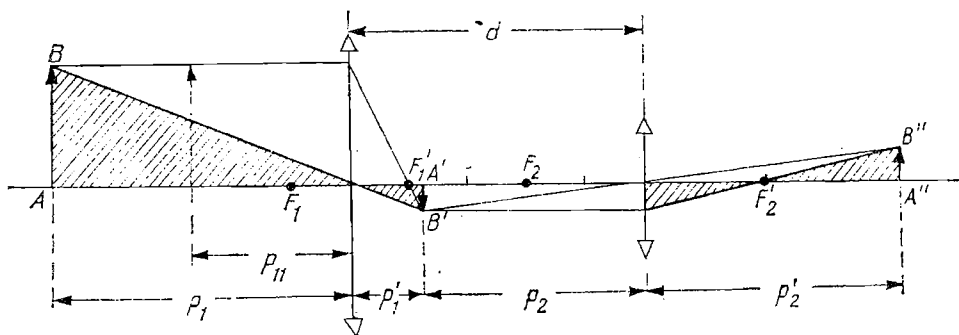


Fig. IV.P.3

5. Se dau două lentile subțiri cu distanțele focale  $f_1 = 1$  cm  $f_2 = 2$  cm, aflate la distanța  $d = 5$  cm una de alta. În fața primei lentile se află un obiect luminos  $AB$  la distanța  $p_1 = 10$  cm.

a) Să se determine distanța  $p_2'$  la care se formează imaginea finală  $A''B''$  față de lentila posterioară și mărirea liniară  $A''B''/AB$ .

b) Dacă obiectul începe să se deplaseze cu accelerația  $a = 0,1$  cm/s<sup>2</sup>, să se calculeze timpul după care imaginea finală se formează la infinit.

c) Cu cât se modifică poziția imaginii dacă se intercalează în primul caz, între obiect și prima lentilă o lamă plan paralelă de sticlă, avînd grosimea  $e = 0,5$  cm și indicele de refracție relativ  $n = 1,5$ ?

R: a)  $p_2' = \frac{70}{17}$  cm;  $\frac{A''B''}{AB} = 0,1$ .

b)  $t = \sqrt{\frac{2}{a} \left[ p_1 - \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} \right]} \approx 13,04$  s.

c)  $\frac{1}{p_{2s}'} = \frac{1}{f_2} - \frac{p_{1s} - f_1}{(p_{1s} - f_1)d - f_1 p_{1s}}$ , unde  $p_{1s} = p_1 + e(n - 1)$

$\Delta p_2' = p_2' - p_{2s}' \approx 2,16$  cm.

6. Se dau două oglinzi concave, avînd aceeași distanță focală  $f$ , situate cu vîrfurile și centrele pe același ax optic principal.

a) Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească distanța  $d$  dintre vîrfurile oglinzilor, pentru ca imaginea unui punct luminos  $A$  de pe axul optic să se formeze tot în  $A$ , ca urmare a reflexiilor succesive pe cele două oglinzi.

b) Să se calculeze distanța  $d$  pentru  $f = 20$  cm.

Indicație. Notînd cu  $p$  distanța de la una din oglinzi la punctul  $A$  (deci și la imaginea finală), aceasta va fi dată de ecuația:  $p^2 - pd + fd = 0$

R: a)  $d \geq 4f$ .

b)  $d = 80$  cm.

7. Se dă o lentilă subțire, planconvexă, din sticlă, cu indicele de refracție  $n$  și raza de curbă  $R$ .

a) Să se determine convergența ei,  $C$ .

b) Fața plană se argintează. Se așază pe axul optic un obiect de înălțime  $y$

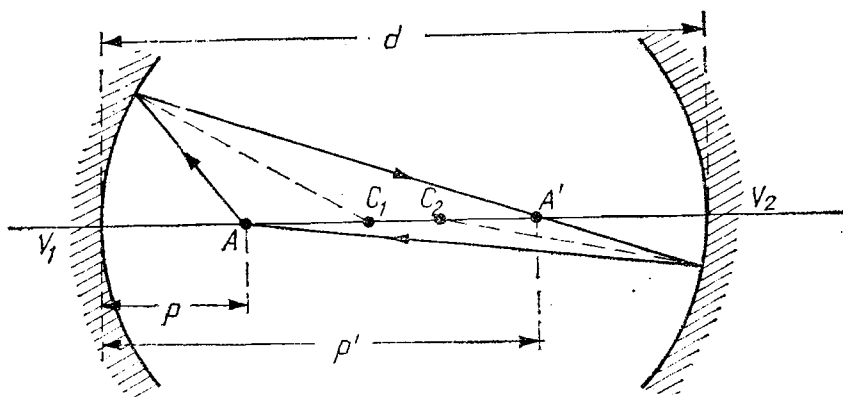


Fig. IV.P.4

la distanța  $p$  de lentilă. Să se determine distanța  $p'$  la care se formează imaginea finală.

c) Să se determine mărimea  $y'$  a imaginii finale.

R: a)  $C = \frac{R}{n - 1},$

b)  $p' = \frac{Rp}{2(n - 1)p - R},$

c)  $y' = y \frac{R}{2(n - 1)p - R}.$

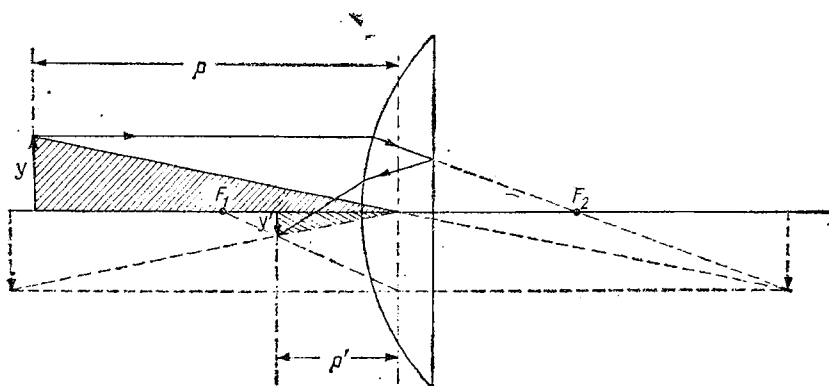


Fig. IV.P.5

8. Două lentile subțiri biconvexe, simetrice, identice, cu razele de curbură egale cu  $r$ , sînt în contact pe același ax optic principal. Indicele de refracție al lor este  $n$ .

a) Să se determine distanța focală a sistemului.

b) Intervalul dintre lentile este umplut cu un lichid transparent avînd indicele de refracție  $n'$ . Să se determine  $n$  știind că la distanța  $p'$  de sistem se formează imaginea unui obiect, aflat la distanța  $p$  de sistem.

- c) Să se determine distanța focală  $f$  a sistemului conținând lichidul.  
 d) Să se calculeze mărimile de la punctele a) , b), c) pentru cazul:  $r = 20$  cm,  $n = 3/2$ ,  $p = 30$  cm,  $p' = 30$  cm.

**R:** a)  $f = \frac{r}{4(n-1)}$ ,

b)  $n' = 2n - \frac{r}{2} \left( \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} \right) - 1$ ,

c)  $c = \frac{2(2n - n' - 1)}{r}$ ,

d) 0,1 m; 4/3; 0,15 m.

9. La un dispozitiv de interferență Young, distanța între fante este  $l = 1$  mm, iar distanța de la planul fantelor pînă la ecran este  $D = 75$  cm. Pe o distanță  $x = 5,625$  mm s-au numărat  $N = 10$  franje de interferență.

- a) Care este lungimea de undă  $\lambda$  a luminii monocromatice folosite? Care este valoarea interfranjei?  
 b) Spațiul dintre planul izvoarelor coerente și ecran se umple cu un lichid transparent. În acest caz, interfranja este  $i' = 421,9$   $\mu\text{m}$ . Să se determine indicele de refracție  $n$  al lichidului.  
 c) Dacă viteza luminii în aer este  $c = 299790$  km/s, care este viteza ei în spațiul umplut cu lichid?

**R:** a)  $\lambda = 7500$  Å;  $i = 562,5$   $\mu\text{m}$ ,

b)  $n = \frac{\lambda D}{i' l} \simeq 1,33$ ,

c)  $v = 225406$  km/s.



**V**

**Fizică atomică și nucleară.  
Elemente de mecanică cuantică**



# 1. Structura discretă a materiei

## 1.1. INTRODUCERE

Obiectul acestei părți constă în aprofundarea înțelegerii atomismului în sensul cunoașterii structurii atomice și a fenomenelor atomice.

Spre deosebire de teoria cinetico-moleculară, studiată anterior, care se ocupă de legile de mișcare a atomilor și moleculelor precum și de legile ansamblurilor de atomi și molecule, în cele ce urmează vom căuta să înțelegem construcția atomilor și de aici proprietățile elementare, fundamentale, ale atomilor, proprietăți care le determină caracterele lor specifice. Din același punct de vedere, chimia se ocupă de studiul modurilor de legare a atomilor între ei, respectiv de formarea legăturii chimice, de formarea moleculelor. În sfârșit, de modul de aranjare a moleculelor sau atomilor în corpurile solide se ocupă fizica corpului solid.

Experiența de pînă acum ne permite să facem o serie de precizări relativ la atom și la modul de alcătuire a lui. Astfel: 1) atomii au dimensiuni foarte mici și 2) sînt extrem de stabili. Am văzut că fenomenele electrice pot fi explicate prin existența electronilor și a ionilor. Rezultă de aci că: 3) electronul este un component al atomului. Pe de altă parte, substanțele în ansamblu nu sînt încărcate electric, deci atomul trebuie să fie neutru din punct de vedere electric. În consecință, 4) trebuie să conțină sarcini electrice pozitive. Un alt capitol al fizicii, optica, studiază alte fenomene legate de existența atomilor: 5) capacitatea de a emite și de a absorbi lumina. Cu alte cuvinte, atomul trebuie să fie locul de naștere a luminii, iar modelele atomice trebuie să explice în ce constă emisia și absorbția. În sfârșit, fizica atomică trebuie să explice 6) fenomenele chimice cum ar fi valența, originea legăturii chimice și mai ales să explice sensul tabloului periodic al elementelor.

## 1.2. ELECTRONUL

Electronul se caracterizează în primul rînd prin sarcină electrică și masă. Sarcina electronului (vezi III.2.5) este negativă și egală cu  $|e| = 1,6020 \cdot 10^{-19}$  C.

Masa acestei particule este de aproximativ 2000 de ori mai mică decît cea a atomului de hidrogen (J.J. Thomson, 1897).

Cea mai convingătoare și directă metodă de determinare a valorii sarcinii elementare de electricitate este cea a lui Millikan (1911).

Metoda constă în determinarea directă a sarcinii electrice a unor picături de ulei ce se deplasează între armăturile unui condensator electric plan. Asupra picăturii electrizate de ulei acționează următoarele forțe: (a) greutatea  $G = m_1g$ ,  $m_1$  fiind masa picăturii, (b) forța arhimedică  $F_A = m_2g$ ,  $m_2$  fiind masa volumului de aer dislocuit de picătura de ulei, (c) forța electrostatică datorită câmpului  $E$  dintre plăcile condensatorului  $F_e = qE$ ,  $q$  fiind sarcina electrică. Dacă picătura se află în mișcare, asupra ei va acționa și o forță de frecare, forța Stokes,  $F_s = 6\pi\eta r_0 v$ , unde  $\eta$  este coeficientul de viscozitate al aerului,  $r_0$  — raza picăturii, iar  $v$  viteza de mișcare a picăturii; această forță este totdeauna opusă sensului mișcării. Dacă armăturile condensatorului sînt dispuse orizontal, toate aceste forțe vor fi coliniare, echilibrul stabilindu-se cînd rezultanta tuturor forțelor va fi zero\*:

$$m_1g - m_2g \pm qE \pm 6\pi\eta r_0 v = 0.$$

Pentru această ecuație am ales ca sens pozitiv, sensul în care este orientată greutatea  $G$ . Forța electrostatică va fi pozitivă sau negativă în funcție de polaritatea aplicată armăturilor, iar forța Stokes va fi pozitivă sau negativă după cum rezultanta primelor trei forțe determină o mișcare ascendentă sau

descendentă a particulei. Presupunînd picătura sferică,  $m_1 = \rho_1 \frac{4\pi r_0^3}{3}$ ;  $m_2 =$

$= \rho_2 \frac{4\pi r_0^3}{3}$ ,  $\rho_1$  și  $\rho_2$  fiind densitățile uleiului și respectiv aerului; sarcina  $q$  o

putem determina cunoscînd pe  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $g$ ,  $r_0$ ,  $E$ ,  $\eta$  și  $v$ . Dintre toate acestea, doar  $r_0$  este inaccesibilă unei măsurători directe, particula fiind prea mică, motiv pentru care experiența trebuie efectuată în două etape diferite. În prima etapă nu se aplică câmpul electric și atunci relația de echilibru, anterioară devine

$\frac{4\pi}{3} r_0^3 (\rho_1 - \rho_2)g = 6\pi\eta r_0 v_1$ , de unde  $r_0^2 = \frac{9\eta v_1}{2(\rho_1 - \rho_2)g}$ . În a doua

etapă se aplică un câmp electric, astfel încît picătura să urce cu viteza  $v_2$ . În acest caz:

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3 (\rho_1 - \rho_2)g - qE = 6\pi\eta r_0 v_2,$$

de unde se poate calcula  $q$ . Observarea deplasării picăturilor de ulei și măsurătorile corespunzătoare se fac cu ajutorul unui microscop cu axa paralelă cu planul condensatorului, iar particulele sînt iluminate lateral puternic. Dacă experiența se repetă cu foarte multe particule de ulei, se poate constata că valorile obținute pentru sarcinile particulelor se grupează în jurul unor valori, multipli ai unei sarcini, care reprezintă sarcina elementară de electricitate și care în 1890 a fost denumită electron, de către J. Stoney.

Cealaltă caracteristică fundamentală a electronului, masa, se determină experimental măsurînd deviația traiectoriei lui în câmpuri electrice sau magnetice. Asupra unui electron în mișcare acționează forța Lorentz (vezi partea a III-a)

$$\vec{F} = -|e|(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m\vec{a}, \quad (1.1)$$

\* Vezi I.10.4., pp. 224—225.



unde  $\vec{E}$  este intensitatea câmpului electric,  $\vec{v}$  viteza electronului, iar  $\vec{B}$  inducția magnetică. Deoarece câmpurile se aleg constante în timp și omogene în spațiu, această forță are o valoare constantă, ceea ce va determina o mișcare uniform

accelerată, cu accelerația  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

*Mișcarea în câmp electric.* Vom considera două cazuri particulare: câmp electric paralel cu viteza inițială  $\vec{v}_0$ , respectiv perpendicular pe ea. În primul caz paralelismul dintre direcția câmpului și cea a vitezei inițiale ne arată că traiectoria va fi o linie dreaptă, coliniară cu viteza inițială. Vom presupune că electronul pleacă din originea sistemului de referință, cu viteza inițială paralelă cu axa  $Oy$ . În acest caz:

$$y = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t, \quad v_y = at + v_0 \text{ cu } a = -\frac{e}{m} E. \quad (1.2)$$

Eliminând timpul din cele două ecuații, obținem

$$v_y = \sqrt{2ay + v_0^2} = \sqrt{-2 \frac{e}{m} Ey + v_0^2}, \quad (1.3)$$

deci  $v_y$  scade cu creșterea lui  $y$ , adică electronul este *frînat*, deoarece viteza inițială îi imprimă o mișcare opusă sensului forței electrostatice. Dacă  $v_0$  este îndreptată în sens invers sensului câmpului electric, atunci  $y < 0$  și viteza electronului crește, deci electronul este *accelerat*. Dacă  $v_0 = 0$ , atunci

$$v_y = \sqrt{2 \frac{e}{m} Ey}, \quad (1.4)$$

înțelegînd că electronul se va mișca către  $y < 0$ , cu energia cinetică

$$W_c = \frac{m}{2} 2 \frac{e}{m} Ey = eEy \Rightarrow W_e = eV, \quad (1.5)$$

unde  $V = Ey$  este potențialul câmpului electric în punctul  $y$ .

Pe baza acestei relații se introduce o unitate de energie, specifică fizicii atomice, *electronvoltul* (eV), care reprezintă *energia cinetică* pe care o primește un electron cînd străbate o diferență de potențial de un volt:  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Multiplii:  $1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$ ;  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ;  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ .

Al doilea caz, câmp electric perpendicular pe direcția vitezei inițiale (fig. V.1.1), este analog mișcării corpurilor în câmp gravitațional. La distanța  $L_1$  de origine câmpul electric își încetează acțiunea, iar de aici, pe distanța  $L_2$ , electronul se mișcă liber, deci după tangenta la traiectorie în punctul  $B$ . În punctul  $y_2$  se plasează de obicei un ecran fluorescent (tubul catodic). În acest fel se poate măsura direct deviația electrică  $\Delta_e$ . Cu condițiile inițiale specificate în figură și cu notațiile respective, printr-un calcul simplu (folosind tot ecuațiile cinematice (1.2) se găsește că traiectoria este un arc de parabolă iar deviația datorită câmpului electric este

$$\Delta_e = \frac{eE}{2mv_0^2} \cdot L_1(L_1 + 2L_2). \quad (1.6)$$

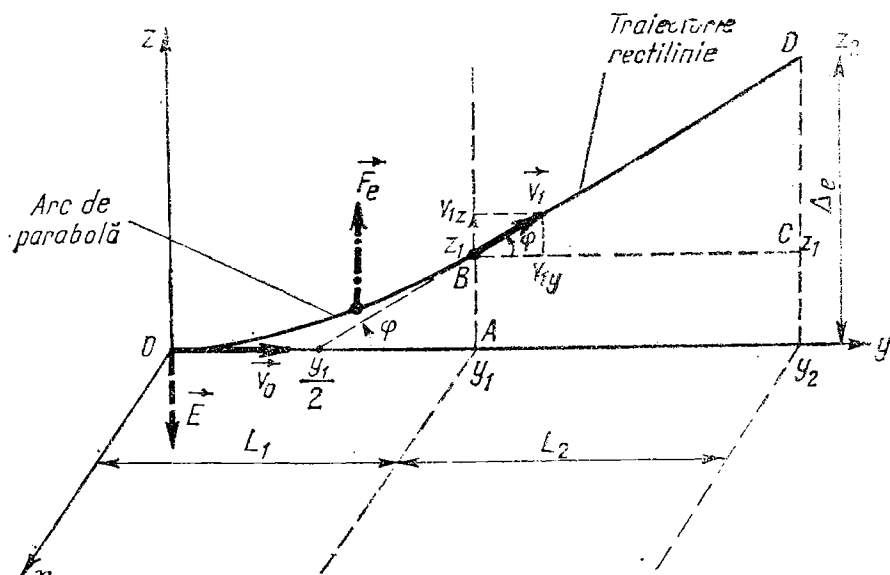


Fig. V.1.1

Deci mișcarea electronului în câmp electric va depinde doar de raportul  $\frac{e}{m}$  (ce poartă numele de sarcină specifică) și nu de  $e$  și  $m$  separat.

*Mișcarea în câmp magnetic.* Componenta magnetică a forței Lorentz,  $-e\vec{v} \times \vec{B}$ , are caracteristic faptul că în tot timpul mișcării forța rămâne perpendiculară pe traiectorie. Aceasta îi conferă forței Lorentz funcția de forță centripetă. Ca urmare mișcarea în câmp magnetic se va deosebi de cea în câmp electric deoarece: asupra unei sarcini în repaus nu se va exercita nici o forță din partea câmpului magnetic; o sarcină în mișcare va avea o traiectorie circulară, iar energia sa nu se va modifica. Câmpul magnetic are efectul maxim atunci când este perpendicular pe direcția vitezei. Forța magnetică (centripetă) va fi întotdeauna echilibrată de forța centrifugă. Obținem astfel raza traiectoriei circulare:

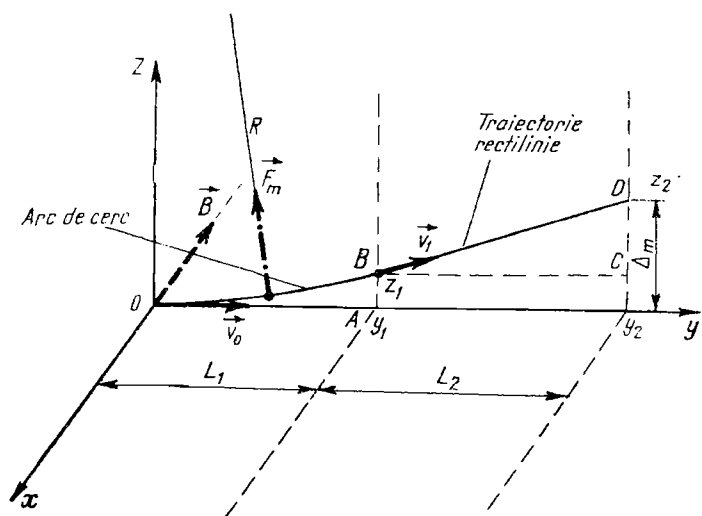
$$\frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow R = \frac{mv}{eB}. \quad (1.7)$$

Frecvența  $\nu$  de rotație este independentă de viteza particulei,

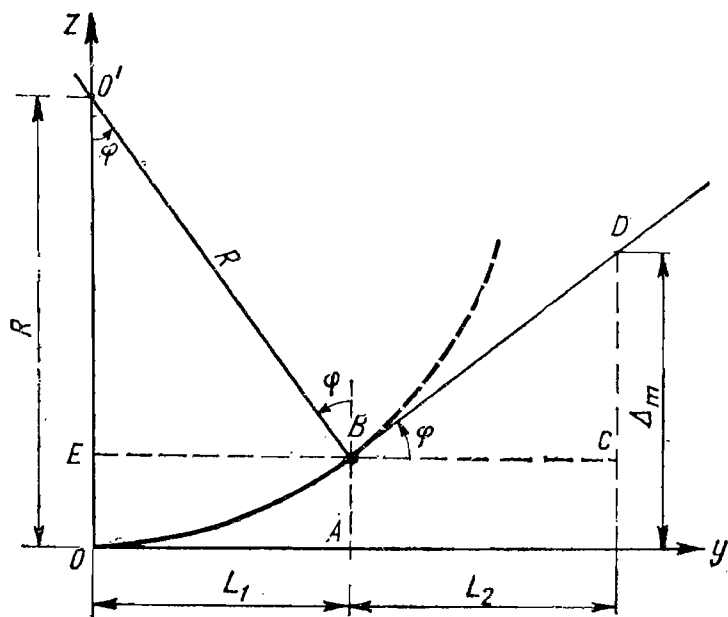
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{eB}{m}, \text{ adică } \nu = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{m} B. \quad (1.8)$$

Această frecvență poartă uneori denumirea de *frecvență ciclotronică*, deoarece ea stă la baza funcționării ciclotronului. Deviația în câmp magnetic, folosind notațiile din fig. V.1.2 a și b, este:

$$\Delta_m = \frac{eB}{2mv_0} L_1(L_1 + 2L_2). \quad (1.9)$$



a



b

Fig. V.1.2

La ieșirea din zona câmpului magnetic, electronul își va continua mișcarea după tangenta la curbă în punctul B.

Putem compensa deviația în câmp electric printr-o deviație în sens contrar în câmp magnetic, adică  $\Delta_e = \Delta_m$ . În acest caz rezultanta forțelor este nulă

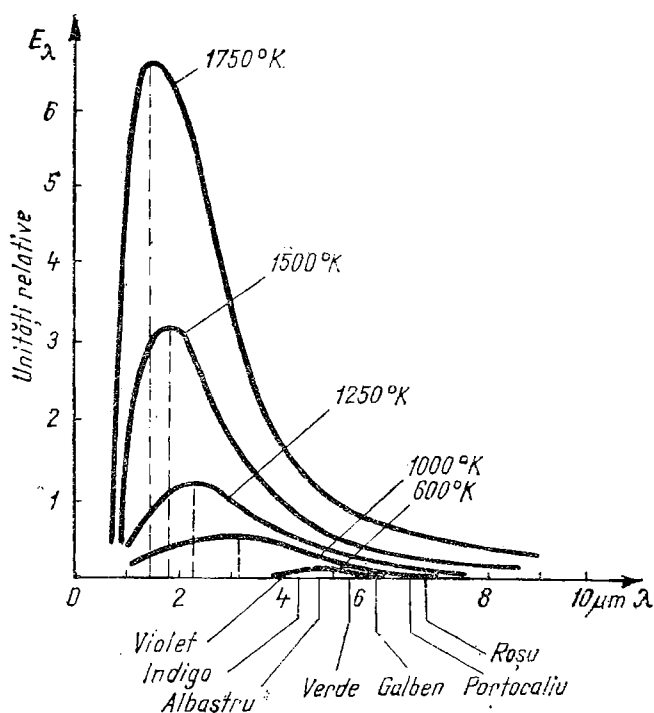


Fig. V.1.3

(pe toată traiectoria) pentru particulele a căror viteză inițială este, *indiferent de masă*:

$$v_0 = \frac{E}{B}. \quad (1.10)$$

Un dispozitiv experimental care să realizeze această condiție poate selecta particulele de o viteză dată dintr-un ansamblu de particule de diverse viteze și se numește *selector* sau *filtru de viteze*.

Experimental aceasta se realizează orientînd cîmpul electric perpendicular pe cîmpul magnetic (cîmpuri încrucișate).

Folosind aceste metode s-a obținut pentru masa electronului valoarea  $m_e = 0,9108 \cdot 10^{-32}$  kg. Aceleași metode sînt utilizate pentru determinarea masei oricărei particule încărcate (ioni, nuclee etc.).

### 1.3. FOTONUL

În urma studiului radiației emise de corpurile încălzite (radiație termică), s-a constatat experimental că orice corp încălzit emite o radiație electromagnetică care este cu atît mai intensă cu cît temperatura corpului este mai ridicată. De asemenea se cunoaște că, corpurile încălzite trec treptat prin diverse colorații (roșu, portocaliu, galben, alb, alb-albastru) cu creșterea temperaturii. Toate aceste observații sînt cuprinse în graficul din fig. V.1.3 în

care este reprezentată distribuția energiei radiate, la diferite temperaturi, în funcție de lungimea de undă a radiației. Nici o explicație bazată pe teoria ondulatorie a luminii nu a condus la această dependență. M. Planck în 1900 a reușit să dea o explicație corectă, dar pentru aceasta a fost nevoit să introducă relația

$$\varepsilon = h\nu, \quad (1.11)$$

în care  $h$  este constanta lui Planck,  $\nu$  frecvența radiației emise, iar  $\varepsilon$  energia minimă a radiației de frecvență  $\nu$  ce se poate pierde sau câștiga. El a numit această proprietate, cuantificarea energiei radiante, iar  $\varepsilon = h\nu$  — *cuantă de energie*.

În 1905 A. Einstein folosește noțiunea de cuantă pentru a explica efectul fotoelectric. Dar revoluționar în această explicație este faptul că Einstein înțelege prin cuanta  $h\nu$  nu numai o „porție“ minimă de energie, ci și o individualitate a ei, care îi conferă proprietăți de particulă. În acest fel cuanta  $h\nu$  poate ciocni un electron ca o veritabilă particulă, explicînd pe această cale efectul fotoelectric (vezi secțiunea IV. 4.4.1). Prin foton sau cuantă de energie radiantă înțelegem azi cantitatea elementară de energie a unei radiații, dată de (1.11), care posedă unele proprietăți de particulă cum ar fi: impulsul și masa de mișcare. Cu alte cuvinte fotonul reprezintă cea mai mică cantitate de energie a unei radiații de frecvență dată, ce poate fi emisă sau absorbită de substanță.

## 2. Modele atomice

### 2.1. MODELUL THOMSON

Primul model de atom a fost cel al lui Thomson, în care electronii sînt fixați elastic în interiorul unei sfere umplute uniform cu sarcini pozitive. Dar acest model nu poate explica cum stau sarcinile pozitive, uniform distribuite, fără să se respingă între ele și nu poate explica satisfăcător nici emisia radiației luminoase. În principiu, sarcinile din interiorul atomului nu pot fi distribuite decît în două moduri: grupate în locuri diferite spațial sau în aceeași regiune spațială restrînsă. Bombardînd atomii cu un fascicul paralel de particule încărcate, în primul caz ele vor interacționa cu sarcinile de un fel sau de altul și vor fi puternic deviate (împrăștiate), pe cînd în cazul al doilea, sarcinile fiind foarte strîns unite, cîmpul electric creat de ele va fi extrem de slab, interacțiunea va fi foarte slabă, deci particulele practic nu vor fi deviate. Rutherford, bombardînd atomii cu particule încărcate electric, a observat (1910) că ele sînt puternic deviate, deci a dovedit astfel că sarcinile din atom sînt separate spațial, deci modelul Thomson este părăsit.

### 2.2. MODELUL PLANETAR

Un model atomic bazat pe echilibrul dinamic al sarcinilor este analog sistemului solar în care forțele centrifuge echilibrează forțele de atracție gravitațională. Atomul are o parte centrală numită *nucleu*, încărcată pozitiv, în jurul căreia se rotesc electronii. Deci sarcinile sînt separate spațial. Concordanța modelului planetar atomic cu experiența este foarte bună. E. Rutherford a fost capabil să calculeze care va fi numărul de particule  $\alpha$  deviate sub un unghi dat și a dedus din datele experimentale că partea centrală pozitivă se întinde pe o zonă cu dimensiunea de  $10^{-13} - 10^{-12}$  cm. Comparînd cu dimensiunea unui atom  $\sim 10^{-8}$  cm, tragem concluzia că el este mai mult gol decît plin. În acest fel, modelul planetar propus încă din 1901 de J. Perrin, a fost definitiv acceptat ca urmare a experiențelor lui E. Rutherford. Ca și în cazul modelului Thomson rămîne de explicat motivul pentru care sarcinile pozitive din nucleu nu se desfac. Pentru a analiza condiția de stabilitate ne vom referi la atomul cel mai simplu, care conține un singur electron și al cărui nucleu are o sarcină electrică pozitivă, egală cu  $e$ . Acest nucleu a fost numit *proton* (E. Rutherford, 1920), iar atomul este hidrogenul. Electronul se va

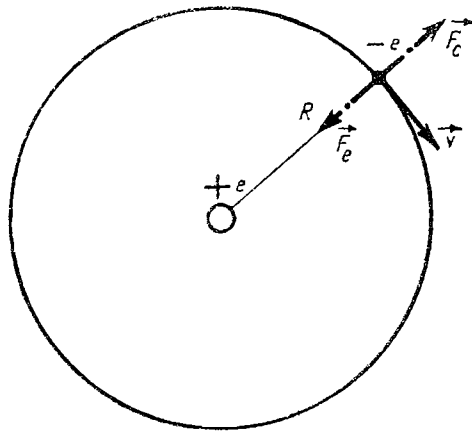


Fig. V.2.1

mișca în jurul protonului pe o traiectorie circulară astfel ca forța centrifugă să fie egală cu cea electrostatică de atracție (fig. V.2.1):

$$\frac{mv^2}{R} = K \frac{e^2}{R^2} \Rightarrow R = \frac{Ke^2}{mv^2}, \quad (2.1)$$

unde  $m$  este masa electronului,  $v$  viteza lui pe orbită,  $R$  distanța electron-

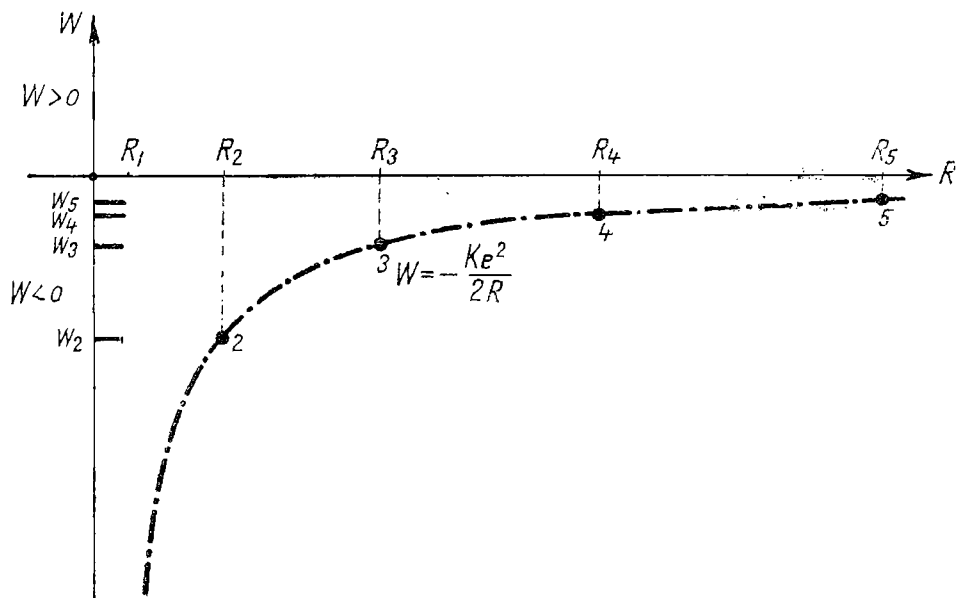


Fig. V.2.2

nucleu, iar  $K = 9 \cdot 10^9$ , lucrînd în SI. Energia electronului care se mișcă pe această orbită va fi egală cu suma energiilor cinetică și potențială:

$$W = W_c + W_p = \frac{mv^2}{2} - K \frac{e^2}{R} = -\frac{Ke^2}{2R}. \quad (2.2)$$

Dependența lui  $W$  de distanță este redată în fig. V.2.2.

Pot fi trase următoarele concluzii: 1) energia totală este negativă, ceea ce înseamnă că pe măsură ce raza crește, energia totală va crește și tinde către zero cînd raza tinde către infinit. Orbitale de energie mică vor fi cele cu rază mică, deci cele apropiate de nucleu. Dacă electronul va primi energie, el se va îndepărta de nucleu și invers; 2) energia totală a electronului este în acest caz egală cu jumătate din energia potențială în câmpul electrostatic al nucleului; 3) expresia (2.2) are caracterul unei funcții care leagă energia totală a electronului de raza traiectoriei circulare. Rezultă de aici că unei raze date îi corespunde o singură valoare pentru energie. În consecință, în funcție de energia electronului, sînt permise toate orbitele. Stabilitatea sistemului planetar este asigurată dacă se păstrează constantă raza traiectoriei electronului. La rîndul ei aceasta este direct legată de constanta energiei electronului. Din păcate, în electrodinamică se arată că orice sarcină electrică care se mișcă accelerat trebuie să emită radiație electromagnetică, micșorîndu-se astfel energia de mișcare a sarcinii. Cu toate că în mișcarea pe orbita circulară viteza electronului este uniformă, ea va varia totuși ca direcție, dînd naștere astfel unei accelerații centripete egală cu  $v^2/R$ . În urma emisiei acestei radiații, energia electronului se va micșora, raza traiectoriei se va micșora la rîndul ei rapid, urmînd ca în final electronul să cadă pe nucleu. Aceasta duce la concluzia că atomul ar fi un sistem instabil și că, în plus ar emite continuu radiații, chiar în stare normală, ceea ce contravine experienței.

### 2.3. POSTULATELE LUI BOHR

Ieșirea din impas se datorește lui Niels Bohr. Acesta modifică concepțiile teoretice clasice, folosind cunoștințele pe care descoperirile epocii sale i le puneau la îndemînă: cuantele de energie și observația lui A.W. Conway (1907) că emisia luminii nu este un proces continuu, fiecare linie spectrală fiind efectul însumării radiațiilor emise de diverși atomi la diverse momente. Pe baza lor el trage concluzia că atomul *nu trebuie să emită sau să absoarbă continuu*, ci numai în anumite cazuri speciale, procesul avînd un caracter discontinuu. În acest fel el este condus la formularea celor două postulate care-i poartă numele și care fac ca modelul planetar să capete drept de existență: 1) electronul se poate mișca în atom, fără să emită radiații, numai pe anumite orbite. Aceste orbite se numesc *staționare*; 2) atomul poate să emită sau să absoarbă energie radiantă (sau de altă natură) numai la trecerea (tranziția) de pe o orbită (stare) staționară pe alta, iar energia emisă sau absorbită să fie cuantificată. Legea de conservare a energiei cere ca

$$h\nu = W_i - W_f, \quad (2.3)$$

unde  $W_i$ ,  $W_f$  sînt energiile corespunzătoare stărilor staționare inițială  $i$  și finală  $f$ .



## 2.4. ATOMUL DE HIDROGEN

Cu ajutorul celor două postulate, Bohr a reușit să explice stabilitatea modelului planetar precum și caracterul discontinuu al proceselor de emisie și absorbție. Din relația (2.3) se obține doar diferența energiilor a două stări staționare, dar nu și valoarea lor. Pentru a găsi expresia energiei atomului în stările staționare, Bohr a folosit ipoteza cuantelor. El a făcut următoarea observație: în realitate nu  $h\nu$  este constant, ci raportul  $\frac{E}{\nu} = h$  este o veritabilă constantă. Cu alte cuvinte emisia și absorbția de radiație este guvernată în ultimă instanță de cerința ca raportul între cea mai mică energie emisă și frecvența ei să fie constantă, sau ca raportul între energia emisă și frecvența să fie un număr întreg de constante ( $n\hbar$ ) Planck. Bohr a căutat să procedeze în mod analog pentru atom. Deci el cere ca  $\frac{W}{\nu} = n\hbar$  unde  $W$  este energia stării staționare. Problema este că nu știm ce semnificație poate să aibă frecvența  $\nu$ , deoarece acum este vorba de o stare în care nu se emite sau absoarbe energie. Atunci el a căutat să modifice forma acestei expresii pentru a găsi o condiție de cuantificare care să lege mărimi cunoscute ale mișcării orbitale. El a observat că raportul  $\frac{W}{\nu}$  are dimensiunea: energie  $\times$  timp. Făcând următoarele transformări:

$$\left[\frac{W}{\nu}\right] = [W \cdot T] = [F \cdot s \cdot T] = [p \cdot s]$$

(unde  $T = \frac{1}{\nu}$  un timp,  $W = F \cdot s$  — lucru mecanic în care  $s$  — deplasarea,  $F \cdot T = p$  din legea lui Newton) a rezultat că raportul energie/frecvență corespunde în fond produsului dintre impuls și spațiul parcurs într-o perioadă. Știind că mișcarea se face pe o orbită de rază  $R$ , spațiul parcurs de electron într-o rotație completă va fi  $2\pi R$ , de unde condiția de cuantificare aplicată de Bohr la atom este:  $mv(2\pi R) = nh$  sau, cu alte cuvinte,

$$L = mv \cdot R = n \frac{h}{2\pi}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty, \quad (2.4)$$

$L$  fiind momentul impulsului. Rezultă că pe lângă relația (2.1) care reprezintă condiția de echilibru pentru o orbită de o rază oarecare, mai trebuie satisfăcută și relația (2.4) care dă regula de selectare a orbitelor permise. Condiția de cuantificare va determina în acest fel orbitele staționare în sensul lui Bohr. Rezolvând ecuațiile (2.1) și (2.4) în raport cu  $R$  și  $v$  obținem:

$$v_n = \frac{Ke^2}{n\hbar} \text{ și } R_n = \frac{n^2\hbar^2}{Kme^2}, \quad (2.5)$$

unde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ; indicele  $n$  ne arată că atât  $v$  cât și  $R$  depind de valoarea lui  $n$ .

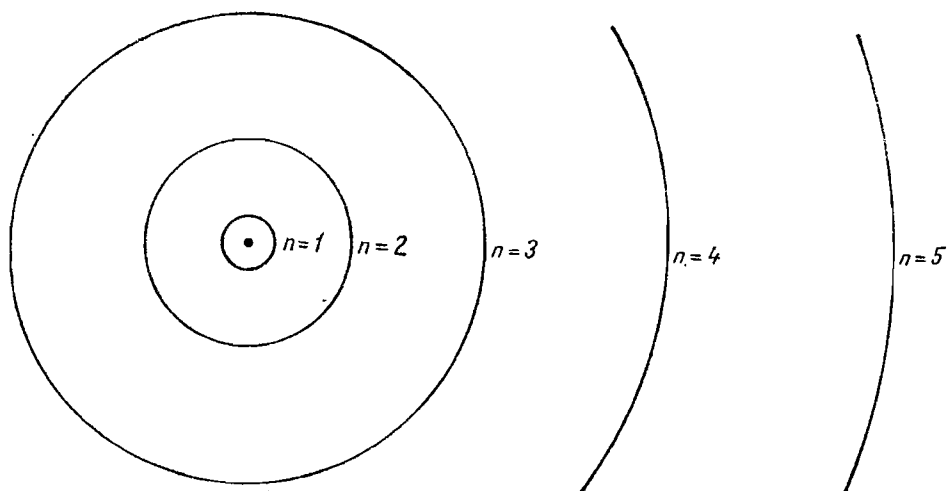


Fig. V.2.3

Cunoscînd  $R$  și folosind relația (2.2) putem determina energiile stărilor staționare:

$$W_n = - \frac{K^2 m e^4}{2 n^2 \hbar^2}. \quad (2.6)$$

Aceste concluzii sînt reprezentate grafic în fig. V.2.2, V.2.3, și V.2.4. Să urmărim pe scurt care sînt consecințele acestui punct de vedere. Atomul

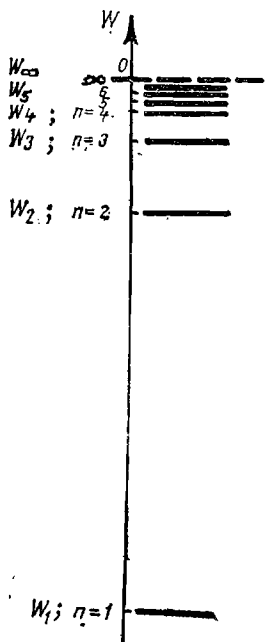


Fig. V.2.4

de hidrogen posedă un număr infinit de stări staționare determinate de numărul  $n$ , numit *număr cuantic principal*, ce poate lua toate valorile șirului numerelor naturale, întregi și pozitive (1, 2, 3, 4, . . . ,  $\infty$ ). O parte din aceste stări sînt exemplificate numeric în tabelul V.1.

TABELUL V.1

$n$	raza $R_n$ în Å	energia $W_n$ în eV	viteza $v_n$ în cm/s	$v = \frac{\omega}{2\pi}$ în s <sup>-1</sup>	$n$	$R_n$ în Å	$W_n$ în eV	$v_n$ în cm/s	$v = \frac{\omega}{2\pi}$ în s <sup>-1</sup>
1	0,529	-13,6	$2,19 \cdot 10^8$	$6,58 \cdot 10^{15}$	10	52,9	-0,13	$0,22 \cdot 10^8$	$6,58 \cdot 10^{11}$
2	2,12	-3,4	$1,09 \cdot 10^8$	$0,82 \cdot 10^{15}$	100	5290	-0,0013	$0,02 \cdot 10^8$	$6,58 \cdot 10^8$
3	4,76	-1,51	$0,73 \cdot 10^8$	$0,24 \cdot 10^{15}$	$\infty$	$\infty$	0	0	0

Stările de energie ale atomului de hidrogen corespund stărilor de energie ale electronului (ceea ce nu se întîmplă la atomii cu mai mulți electroni). Stările de energie posibile pentru electronul legat de nucleu sînt cele pentru care  $R < R_\infty$ . În consecință toate stările cu  $W < 0$  reprezintă *stări legate* ale electronului, adică stări în care electronul aparține atomului și nu se poate mișca liber. Stările cu energia  $W \geq 0$  reprezintă stări de energie pentru electronul nelegat de nucleu, deci liber. Se arată că sînt cuantificate toate stările electronice ce au  $W < 0$ , ele corespunzînd electronului legat de un centru de forțe. Pentru ca electronul să treacă dintr-o stare cu  $W < 0$  într-o stare cu  $W > 0$  trebuie să-i furnizăm energie din exterior, procesul purtînd numele de *ionizare*. Energia minimă de ionizare va fi:

$$E_n = W_\infty - W_n = -W_n, \quad (2.7)$$

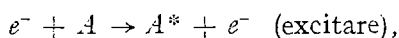
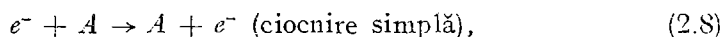
deoarece  $W_\infty = 0$ . Atomul devine *ion pozitiv*. Dintre toate stările energetice posibile pentru electron, starea cea mai convenabilă energetic și deci de maximă stabilitate va fi starea de energie minimă. Această stare se obține pentru  $n=1$ , din care cauză  $W_1$  se numește *energie fundamentală* (*stare fundamentală*). Oricare altă stare de energie cu  $W_n < 0$  se numește *stare excitată* și poate fi obținută furnizînd energia necesară trecerii de pe un nivel pe altul, conform relației (2.3), numită *energie de excitare*.

## 2.5. EXCITAREA ȘI IONIZAREA ATOMULUI

Există diverse metode de a excita sau ioniza atomii. Dintre acestea vom aminti doar: a) excitarea și ionizarea prin ciocniri, b) excitarea și ionizarea termică și c) excitarea și ionizarea optică. Excitarea are loc prin cedare de energie, pentru ca electronul să ajungă pe nivele superioare. Energia necesară excitării pe primul nivel superior este energia minimă de excitare. O altă caracteristică a stării excitate este aceea că raza atomului crește corespunzător, cu alte cuvinte atomul excitat este mai „umflat” decît cel în stare fundamen-

tală. De obicei atomul excitat se notează prin  $A^*$ , cel ionizat prin  $A^+$  dacă este ion pozitiv odată ionizat, sau  $A^{++}$  biionizat, iar ionii negativi  $A^-$  etc. ... Ionii negativi se formează prin atașarea unuia sau mai multor electroni la un atom neutru.

a) **Excitarea și ionizarea prin ciocniri.** Acest proces are loc atît cu particule încărcate (de exemplu electroni, particule  $\alpha$ ) cît și cu particule neutre (neutroni, atomi neutri). În tabelul V.2 sînt date energiile necesare excitării atomului de hidrogen pe diverse nivele precum și energia minimă (prag) de ionizare presupunînd că atomul se găsește inițial pe starea fundamentală. În multe cazuri energia particulei care ciocnește este obținută de la un cîmp electric accelerat. Tot aici sînt date și potențialele acceleratoare minime pentru aceste procese. Schematic, excitarea sau ionizarea prin ciocniri se poate reprezenta sub forma unor ecuații de reacții. Spre exemplu, la o ciocnire cu un electron pot avea loc următoarele „reacții”:



Existența ciocnirilor simple care nu conduc nici la excitare și nici la ionizare arată că nu orice ciocnire este „eficace” pentru o excitare sau ionizare chiar dacă din punct de vedere energetic sînt îndeplinite toate condițiile. Dacă particula incidentă are o energie mult mai mare ca cea minimă de excitare sau ionizare, ea va fi capabilă să excite și să ionizeze pe întreaga sa traiectorie, lăsînd în urma ei o „dîră” de atomi excitați și ionizați, pînă cînd își va pierde întreaga energie. Acesta este cazul radiațiilor emise de substanțele radioactive care au proprietatea de a ioniza mediul prin care trec. Pe noi ne va interesa direct acest proces deoarece pe baza lui a fost concepută o experiență fundamentală pentru verificarea modelului atomic Bohr. Ea a fost efectuată în 1914 de către J. Frank și G. Hertz. Redusă la forma ei cea mai simplă ea constă dintr-o triodă. (fig. V.2.5) în care filamentul este înconjurat strîns de o grilă  $G$  pusă la un potențial pozitiv împreună cu anodul. Anodul nu mai are rol de accelerare ci doar de colectare a electronilor emiși de filament. Dacă în tub există un vid înaintat, electronii emiși de filament și accelerați de grilă vor ajunge la electrodul colector  $E$ . Caracteristica curent-tensiune este analogă diodei, curentul tinzînd către o valoare de saturație legată de colectarea tuturor electronilor emiși de filament (fig.V.2.6a). Să presupunem că în tub există o cantitate de gaz, de exemplu hidrogen, heliu etc. ... la o presiune scăzută. În acest caz caracteristica curent-tensiune se va modifica și va arăta ca în fig. V.2.6b, datorită următorului mecanism; pe porțiunea  $FG$  electronii vor fi accelerați la potențialul  $V$ , presiunea gazului fiind astfel aleasă încît în această regiune să nu aibă loc nici o ciocnire electron-atom. Între  $G$  și  $E$  electronii accelerați vor putea ciocni atomii urmelor de gaz. Cît timp potențialul nu va fi suficient de mare pentru a excita primul nivel atomic, ciocnirile vor fi de primul tip (2.8) și nu vor modifica simțitor curentul măsurat de galvanometru. Atunci cînd energia electronului va fi egală cu primul potențial de excitare al atomului, o parte dintre electroni își vor pierde prin ciocnire practic toată energia cinetică, încît curentul va scădea brusc

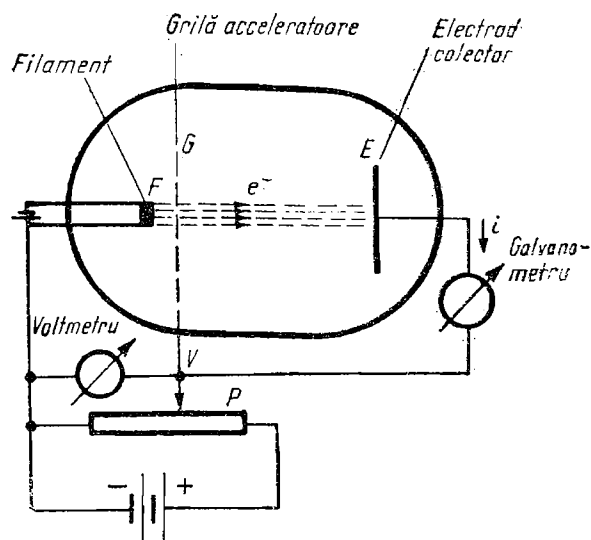


Fig. V.2.5

(potențialul  $V_1$  în fig. V.2.6b). Prin creșterea în continuare a potențialului accelerator, va crește și curentul ca urmare a faptului că după ciocnire electronul mai rămâne cu un rest de energie. Crescând și mai mult potențialul accelerator vom observa și alte minime în caracteristica curent-tensiune. Ele vor fi determinate de excitarea atomului pe nivele superioare sau vor corespunde excitării succesive de către același electron a primului nivel în funcție de restul de energie al electronului după prima ciocnire. În sfârșit, dacă energia electronului este suficientă pentru ionizarea atomului ciocnit, atunci se va petrece o ciocnire de al treilea tip (2.8) care va duce iar la micșorarea curentului, deoarece ambii electroni (și cel ciocnitor și cel scos) au energie practic nulă. Concomitent cu excitarea nivelelor atomice, va apare și o radiație electromagnetică corespunzătoare *dezexcitării* nivelelor excitate. Dezexcitare

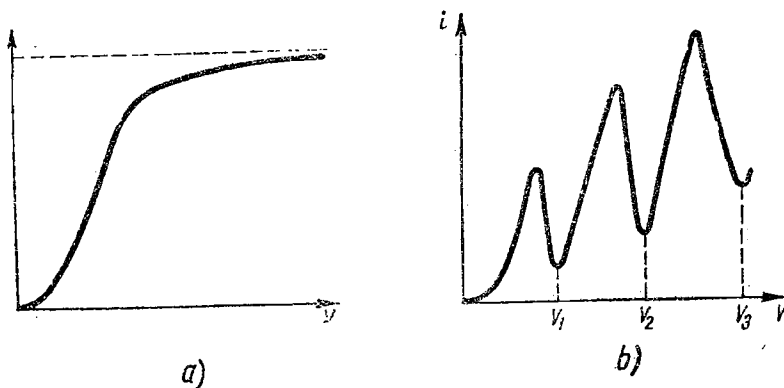


Fig. V.2.6

înseamnă deci revenirea atomului pe starea de minimă energie, revenire care duce la expulzarea surplusului de energie sub formă de radiație. Dacă măsurăm spectroscopic frecvența radiației emise, vom găsi că energia cuantei corespunzătoare  $h\nu$  va fi egală cu  $e$  înmulțită cu potențialul la care curentul are un minim (de exemplu  $h\nu = eV_1$ ). Concluziile finale ale acestei experiențe sînt: a) atomul nu este capabil să primească orice cantitate de energie, ci numai cea corespunzătoare stărilor staționare date de modelul Bohr. În felul acesta se probează direct existența stărilor staționare în atom, caracteristica curent-tensiune obținută fiind o evidență macroscopică a cuantificării la scară microscopică; b) emisia radiației de către atom corespunde întru totul celei prevăzute de al doilea postulat al lui Bohr.

b) **Excitarea și ionizarea termică** reprezintă în fond tot o excitare sau ionizare prin ciocniri, în care atomul ciocnit este un atom sau o moleculă neutră. Atomul sau molecula incidentă este un component al agregatului de atomi din care face parte atomul excitat sau ionizat. Energia necesară excitării sau ionizării este obținută prin absorbție de energie termică. Exemple de excitări și ionizări termice: culoarea flăcării în care introducem o substanță oarecare (de exemplu sodiul colorează o flacără în galben), emisia termică a oricărui corp încălzit, emisia termoelectronică a filamentelor ca și emisia luminoasă a filamentelor becurilor electrice etc.... După cum se știe din teoria cinetico-moleculară, temperatura unui corp este o măsură a energiei cinetice medii de agitație a moleculelor și atomilor unui corp conform relației  $\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{med} \sim \sim kT$ , unde  $k$  este constanta lui Boltzman,  $T$  — temperatura absolută.

TABELUL V.2

		Excitare					Ionizare
		$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$	$n = \infty$
Energia de excitare	$W(\text{eV})$	10,2	11,1	12,75	13,06	13,47	13,60
Excitare prin ciocniri	$V(\text{volți})$	10,2	11,1	12,75	13,06	13,47	13,60
Excitare termică	$T (^{\circ}\text{K})$	11 840	12 900	14 800	15 160	15 620	15 800
Excitare optică	$\nu (\text{Hz})$	$2,47 \cdot 10^{15}$	$2,92 \cdot 10^{15}$	$3,09 \cdot 10^{15}$	$3,16 \cdot 10^{15}$	$3,26 \cdot 10^{15}$	$3,29 \cdot 10^{15}$
	$\lambda (\text{\AA})$	1 215	1 026	973	950	920	910

În tabelul (V.2) sînt trecute, pentru hidrogen, rezultatele calculelor care ne dau temperatura necesară pentru ca energia medie de agitație termică să fie egală cu energia de excitare. Se vede că temperaturile necesare sînt enorme și s-ar părea că este greu să excităm termic atomul. Această impresie se pierde dacă ne gîndim că în realitate pe lîngă atomi de energie medie mai există și cei cu energie foarte mică sau foarte mare, evident într-o cantitate mai redusă. Calculele și experiența de toate zilele arată că există totuși suficienți atomi de energie foarte mare și la temperaturile normale, pentru ca aceste excitări să aibă loc. Evident numărul atomilor excitați sau ionizați crește cu temperatura ceea ce se remarcă prin creșterea intensității radiației de dezexcitare a atomilor. La temperatura de  $\simeq 650^{\circ}\text{C}$  orice corp începe să capete o culoare roșiatică care treptat cu creșterea temperaturii se intensi-

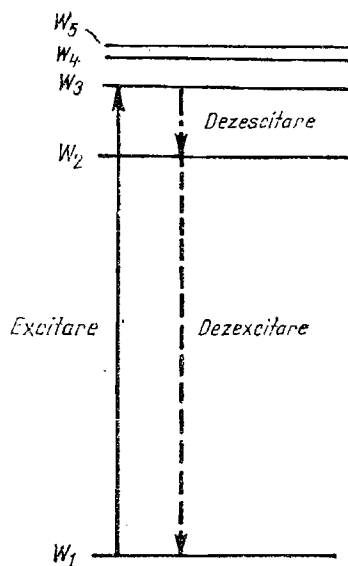


Fig. V.2.7

fică. Culoarea corpului trece spre galben apoi spre alb, ceea ce este o dovadă că tot mai mulți atomi au fost excitați, revenirea lor la starea fundamentală determinând această emisie de radiație. În fine, eliberarea electronilor în acest proces (catozii tuburilor electronice) constituie o dovadă a ionizării termice a atomilor.

c) **Excitarea și ionizarea optică** poate fi în fond concepută tot ca un proces de ciocnire în care partenerul este fotonul de energie  $h\nu$ . Condiția de excitare va fi dată aici evident de relația fundamentală (2.3). În tabelul (V.2) sînt sumate frecvențele și lungimile de undă care corespund excitării optice sau ionizării atomului de hidrogen. În urma absorbției, substanța va emite puternic, în toate direcțiile, radiația de dezexcitare a atomilor, fenomen care se numește *fluorescență*. Radiația de fluorescență nu trebuie să posede neapărat aceeași frecvență cu radiația excitatoare deoarece dezexcitarea poate să se facă prin trepte succesive pe nivele intermediare (fig. V.2.7). Un exemplu tipic al acestui caz îl constituie iluminarea unor substanțe cu radiații ultraviolete (invizibile) care determină emisia unei radiații de fluorescență în domeniul vizibil.

## 2.6. RADIATIA EMISĂ DE ATOMUL DE HIDROGEN

Vom analiza, în continuare, modul în care teoria lui Bohr explică cantitativ emisia liniilor spectrale, concretizate prin relația generalizată a lui Balmer

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Conform postulatului al doilea al lui Bohr, frecvența radiației este:

$$\nu = \frac{1}{h} (W_i - W_j).$$

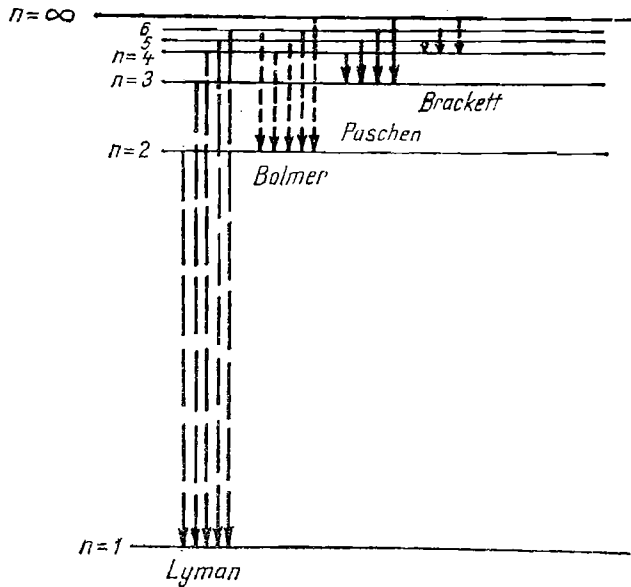


Fig. V.2.8

Introducînd aici expresia energiei stării staționare (2.6) obținem:

$$\nu = \frac{me^4 K^2}{4\pi\hbar} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right), \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{me^4 K^2}{4\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right). \quad (2.9)$$

Comparînd relațiile (2.9) cu cea a lui Balmer, obținem corespondențele:

$$R = \frac{me^4 K^2}{4\pi\hbar^3}; \quad n \equiv n_i; \quad m \equiv n_f. \quad (2.10)$$

În acest fel, Bohr a fost capabil să calculeze constanta lui Rydberg, care s-a dovedit a fi în excelentă concordanță cu valoarea determinată experimental. De asemenea se explică apariția numerelor  $n$  și  $m$ , care au semnificația de numere cuantice principale ale stării inițiale ( $n_i = m$ ) și finale ( $n_f = n$ ) a atomului emițător. Starea inițială este obligatoriu una din stările excitate ale atomului, starea finală putînd fi și starea fundamentală. În această interpretare seriile spectrale corespund diverselor stări finale, iar termenii diverselor serii, unor nivele excitate succesiv, crescătoare energetic (fig. V.2.8). Concordanța remarcabilă a frecvențelor radiațiilor emise de atomul de hidrogen cu experiența a impus definitiv modelul Bohr și a determinat o cotitură hotărîtoare în dezvoltarea fizicii. Inaplicabilitatea fizicii clasice în domeniul microcosmosului a fost astfel dovedită, motiv pentru care tot mai mulți fizicieni au început să studieze acest nou domeniu. Rezultatul a fost apariția mecanicii cuantice. În tabelul (V.3) sînt prezentate liniile spectrale principale ale atomului de hidrogen. Deoarece regiunea spectrală vizibilă este între aproximativ 3 900 și 7 700 Å se vede că numai seria Balmer dă linii care se găsesc în vizibil, iar celelalte în infraroșu sau ultraviolet.



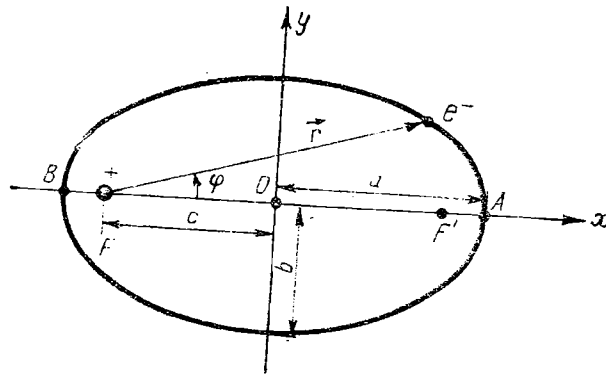
TABELUL V.3

Tranziția $n_i \rightarrow n_j$	$W_i - W_j$ în eV	$\nu$ în $s^{-1}$	$\lambda$ Å	Tranziția $n_i \rightarrow n_j$	$W_i - W_j$ în eV	$\nu$ în $s^{-1}$	$\lambda$ Å
Seria <i>Lyman</i> $2 \rightarrow 1$	10,20	$2,47 \cdot 10^{15}$	1215,68	Seria <i>Paschen</i> $4 \rightarrow 3$	0,66	$1,60 \cdot 10^{14}$	18 751,1
$3 \rightarrow 1$	12,09	$2,92 \cdot 10^{15}$	1025,73	$5 \rightarrow 3$	0,97	$2,34 \cdot 10^{14}$	12 818,1
$4 \rightarrow 1$	12,75	$3,39 \cdot 10^{15}$	972,54	$6 \rightarrow 3$	1,14	$2,74 \cdot 10^{14}$	10 938,1
Seria <i>Bulmer</i> $3 \rightarrow 2$	1,89	$4,56 \cdot 10^{14}$	6562,79 (H $\alpha$ )	$7 \rightarrow 3$	1,23	$2,98 \cdot 10^{14}$	10 049,4
$4 \rightarrow 2$	2,55	$6,15 \cdot 10^{14}$	4861,33 (H $\beta$ )	$8 \rightarrow 3$	1,20	$3,14 \cdot 10^{14}$	9 546,0
$5 \rightarrow 2$	2,86	$6,92 \cdot 10^{14}$	4340,46 (H $\gamma$ )	Seria <i>Brackett</i> $5 \rightarrow 4$	0,31	$7,40 \cdot 10^{13}$	40 510,4
$6 \rightarrow 2$	3,03	$7,54 \cdot 10^{14}$	4101,74 (H $\delta$ )	$6 \rightarrow 4$	0,48	$1,14 \cdot 10^{14}$	26 251,6
$7 \rightarrow 2$	3,12	$7,57 \cdot 10^{14}$	3970,07				

În legătură cu emisia radiației prin salt electronic de pe o orbită pe alta, trebuie să observăm caracterul ei total neclasic. Nicăieri nu apare atât de pregnant caracterul neclasic ca în acest proces de emisie. Acest lucru rezultă din următorul raționament. Dacă între acele orbite între care se face tranziția, electronul ar străbate o traiectorie mai mult sau mai puțin spirală atunci emisia radiativă ar corespunde nu unei linii spectrale ci unei bande continue de frecvențe. Mai concret, la tranziția  $2 \rightarrow 1$ , de exemplu, se emite radiația de 1215,68 Å (tabelul V.3) și nu o bandă cuprinsă între 3660 Å și 456 Å cum ar trebui, dacă emisia s-ar petrece clasic. Limitele au fost calculate din tabelul V.1, din coloana frecvențelor de rotație pe orbitele 2 și 1. Faptul că se emite o radiație de o foarte precisă lungime de undă, arată că energia se pierde în această tranziție, într-un singur act, dintr-o dată. Saltul electronului de pe o orbită pe alta este în cel mai strict înțeles al cuvîntului un salt fără etape intermediare. Saltul cuantic este un eveniment unic care nu poate fi descompus în faze intermediare.

## 2.7. MODELUL BOHR-SOMMERFELD

Încercările de perfecționare a modelului Bohr, făcute între anii 1915–1925 au culminat cu construirea unei noi mecanici, mecanica cuantică, care să îmbrățișeze toate fenomenele la scară atomică în mod unitar. Principala contribuție a avut-o fizicianul A. Sommerfeld care a generalizat modul de cuantificare, încercînd să aplice modelul Bohr cazului mai general, de mișcare pe orbite eliptice. În acest caz trebuia cuantificată mișcarea care acum depindea de două mărimi variabile. Într-o mișcare circulară variaza doar poziția electronului pe arcul de cerc, raza fiind constantă. În cazul mișcării electronului pe o orbită eliptică variaza atât poziția electronului pe orbită (exprimată printr-o coordonată unghiulară ( $\varphi$ )), cît și distanța electron-nucleu



$a$  - axa mare

$b$  - axa mică

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$  - distanța de la centrul elipsei ( $O$ ) la focarul elipsei ( $F$ )

$\varepsilon = \frac{c}{a}$  - excentricitatea elipsei

$A$ : Afeliu

$B$ : Periheliu

Fig. V.2.9

( $r$ ) (fig. V.2.9). În figură sînt date toate distanțele și punctele importante ale unei elipse. Elipsa din figură are o *excentricitate*  $\varepsilon = 0,8$ . Mecanica arată că în cazul mișcării pe o elipsă, centrul de forțe (nucleul, Soarele) se găsește nu în centrul elipsei ( $O$ ), ci în unul din cele două focare ( $F$  sau  $F'$ ). Se spune de asemenea că mișcarea eliptică are două grade de libertate. Sommerfeld a arătat că la *cuantificarea sistemelor cu mai multe grade de libertate vor apărea un număr corespunzător de numere cuantice*. În conformitate cu regula de mai sus, se introduc două numere cuantice  $n_r$  și  $n_\varphi$ . Sommerfeld a calculat elementele geometrice ale orbitei eliptice ( $a$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$ ) cît și energia orbitei ( $W_n$ ) în funcție de aceste două numere cuantice, obținînd:

$$a = (n_r + n_\varphi)^2 \cdot \frac{\hbar^2}{m e^2 K}; \quad b = (n_r + n_\varphi) \cdot n_\varphi \cdot \frac{\hbar^2}{m e^2 K} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^2}}; \quad W_n = - \frac{m e^4 K^2}{2(n_r + n_\varphi)^2 \hbar^2}.$$

Concluziile ce rezultă de aici sînt următoarele: 1) energia pe traiectorie depinde *doar de suma* celor două numere cuantice, din care motiv putem înlocui suma cu un nou număr cuantic

$$n = n_r + n_\varphi \quad (2.12)$$

pe care introducîndu-l în (2.11) obținem:

$$a_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m e^2 K}, \quad b_n = n \cdot n_\varphi \cdot \frac{\hbar^2}{m e^2 K}, \quad W_n = - \frac{m e^4 K^2}{2 n^3 \hbar^2}. \quad (2.13)$$

Introducerea lui  $n$  duce la obținerea aceleiași expresii pentru energie ca cea obținută de Bohr (2.6).

2) forma traiectoriei eliptice depinde pe de altă parte de două numere cuantice:  $n_r$  și  $n_\varphi$ . Rezultă că pentru o energie dată a mișcării vor corespunde mai multe tipuri de traiectorii posibile. Cu alte cuvinte viteza, accelerația, parametrii  $a$  și  $b$  ai orbitei pot să difere fără ca energia totală a mișcării să se modifice. Acest fenomen se numește *degenerare*.

3) din relația (2.12) rezultă că  $n_\varphi \leq n$ ;  $n$  se numește *număr cuantic principal* iar  $n_\varphi$  — *număr cuantic azimutal*. Prin definiție, numerele cuantice fiind întregi, rezultă că  $n_\varphi$  poate lua valorile:  $n_\varphi = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ . Valoarea  $n_\varphi = 0$  se exclude, căci ea ar corespunde unei orbite cu  $b = 0$ , care ar presupune traversarea nucleului de către electron, orbita eliptică transformându-se într-un segment de dreaptă. Rezultă că unei energii  $W_n$ , îi vor corespunde  $n$  orbite diferite, posibile, de mișcare a electronului.

În tabelul (V.4) sînt exemplificate numeric o serie de orbite posibile, dîndu-se parametrul corespunzător. În figura V.2.10 sînt reprezentate grafic diversele orbite posibile, iar în fig. V.2.11 nivelele energetice posibile pentru atomul de hidrogen pentru primele trei valori ale lui  $n$ .

TABELUL V.4

$n$	$W_n$	$n_\varphi$	$a$	$b$	forma traiectoriei $\varepsilon$	numărul de orbite
1	$W_1 = -\frac{mc^4 K^2}{2\hbar^2}$	1	$a_1 = \frac{\hbar^2}{mc^2 K}$	$a_1$	cerc $\varepsilon = 0$	1
2	$\frac{1}{4} W_1$	1	$4a_1$	$a_1$	elipsă $\varepsilon = 0,96$	2
		2	$4a_1$	$4a_1$	cerc $\varepsilon = 0$	
3	$\frac{1}{9} W_1$	1	$9a_1$	$a_1$	elipsă $\varepsilon = 0,99$	3
		2	$9a_1$	$4a_1$	elipsă $\varepsilon = 0,89$	
		3	$9a_1$	$9a_1$	cerc $\varepsilon = 0$	

Din cauza rolului lor important în descrierea atomului, energia și raza (axa mare) primei orbite Bohr au fost folosite uneori ca unitate de energie și de lungime:

$$W_1 = 2,1795 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,60 \text{ eV}; \quad a_1 = 5,2917 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,52917 \text{ \AA}. \quad (2.14)$$

Mișcarea pe o orbită eliptică se caracterizează și prin faptul că viteza în lungul traiectoriei nu mai este constantă, ea fiind cu atît mai mare cu cît  $r$  se micșorează și invers, precum arată și relația (2.1). Deci viteza nu mai este cuanti-

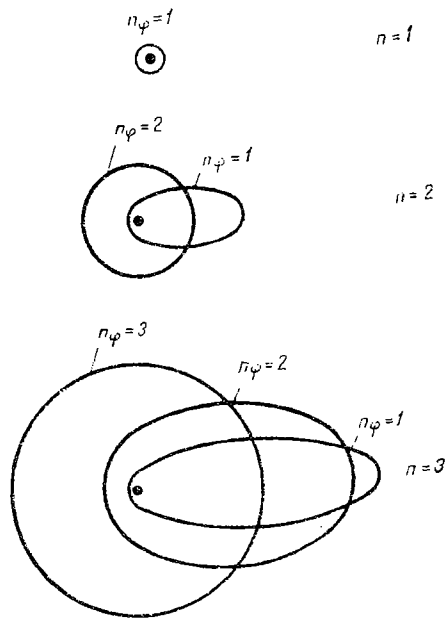


Fig. V.2.10

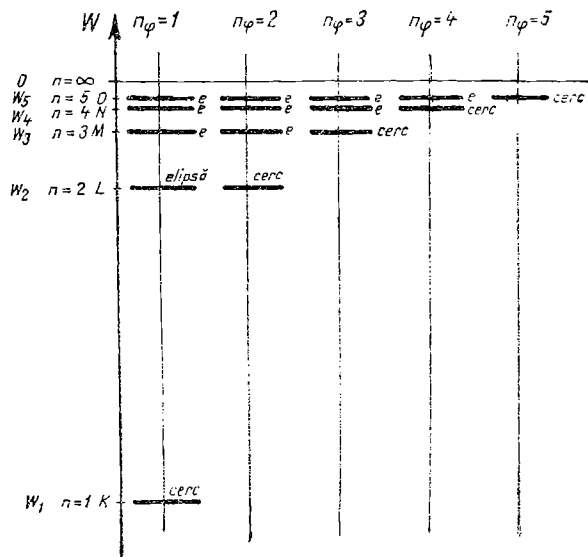


Fig. V.2.11

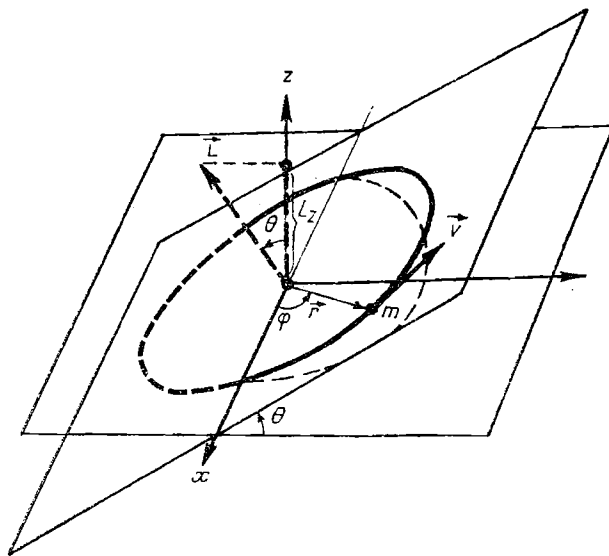


Fig. V.2.12

ficată ca în (2.5). Apare astfel încă o dată în evidență faptul că, condiția de cuantificare nu se aplică lui  $r$ ,  $\varphi$  sau  $W$ , ci momentelor cinetice.

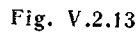
Dar Sommerfeld nu s-a oprit aici, ci a atacat problema și mai complicată, dar mai apropiată de realitate, a orbitelor atomice care pot avea diverse înclinații în spațiu. Se știe că mișcarea eliptică (sau circulară) se petrece într-un plan dat, fixat în spațiu (efect care în mecanică se numește efect de giroscop). Dar așa cum a considerat Sommerfeld, nu pare să existe motive care să împiedice orientări arbitrare ale planului orbital în spațiu. Altfel spus, electronul în mișcarea lui pe orbită va trebui caracterizat prin trei parametri (coordonate):  $r$ ,  $\varphi$  și a treia:  $\theta$  = unghiul pe care-l face normala la planul orbital cu o direcție oarecare în spațiu, notată pentru concretizare cu  $Oz$  (fig. V.2.12).

În conformitate cu cele spuse, electronul va poseda trei grade de libertate, deci vor trebui introduse trei numere cuantice, două cunoscute (care nu se modifică)  $n_r$ ,  $n_\varphi$  și un al treilea  $n_\theta$ . Ce modificări aduce considerarea a trei numere cuantice? Sommerfeld a arătat că energia va fi descrisă tot de relația (2.13), în care însă numărul cuantic principal va fi:

$$n = n_r + n_\varphi + n_\theta. \quad (2.15)$$

Degenerarea mișcării crește în acest fel, orbitele de diverse orientări spațiale avînd aceeași energie. Să ne amintim că momentul impulsului este un vector de mărime  $|\vec{L}| = r \cdot mv$ , a cărui direcție este perpendiculară pe planul traiectoriei. Rezultă că modificarea planului orbitei în spațiu va atrage modificarea proiecției momentului pe direcția  $Oz$ , aleasă fixă în spațiu. Mărimea acestei proiecții este egală cu

$$L_z = |\vec{L}| \cdot \cos \theta. \quad (2.16)$$


$$L_z = n_\theta \cdot \hbar \Rightarrow \cos \theta = \frac{n_\theta}{n}. \quad (2.17)$$
[illegible]

**Fig. V.2.14**

pentru orbitele electronice. Deoarece  $|\cos \theta| \leq 1$ , rezultă pentru  $n_0$  următoarele valori posibile:

$$n_0 = n_\varphi, n_\varphi - 1, n_\varphi - 2, \dots, 0, \dots, -n_\varphi + 1, -n_\varphi,$$

deci  $2n_\varphi + 1$  valori. Este foarte important să se remarce deosebirea între numerele cuantice  $n_r, n_\varphi, n$  pe de o parte și  $n_0$  pe de altă parte:  $n_0$  poate lua atât valori pozitive cât și negative.

În fig. V.2.13 este ilustrată relația (2.17) pentru cazul  $n_\varphi = 3$ . Există astfel  $2n_\varphi + 1 = 7$  orientări posibile pentru planul orbital, respectiv pentru vectorul moment cinetic. Unghiurile corespunzătoare vor fi:  $0^\circ, 48^\circ 10', 70^\circ 30', 90^\circ, 109^\circ 30', 131^\circ 50', 180^\circ$ .

Ultima problemă pe care o vom discuta în acest context, este influența variației masei cu viteza asupra mișcării electronului. Asupra orbitelor circulare, influența variației masei cu viteza este destul de ne semnificativă, în sensul că se produce o micșorare a razei orbitei ca urmare a creșterii masei cu viteza.

Dacă luăm cazul primei orbite Bohr, unde viteza este maximă (tabelul V.1) raportul  $\frac{v}{c} = 0,73 \cdot 10^{-2}$  și  $\frac{m}{m_0} \simeq 1$ , deci influența este neglijabilă.

Dacă însă luăm în considerație orbitele eliptice, atunci această variație aduce un efect nou, și anume, viteza va fi variabilă pe traiectorie: maximă în punctul  $B$  și minimă în punctul  $A$  (fig. V.2.9), masa va varia pe traiectorie în mod corespunzător. Ea va duce la creșterea masei în  $B$ , ceea ce va determina o creștere a inerției și ca urmare orbita următoare nu se va suprapune identic cu cea anterioară. Apare în acest fel o lentă deplasare în spațiu a axei mari a elipsei, în modul indicat în fig. V.2.14. Ca urmare a acestui efect, orbita nu va mai fi în realitate o elipsă ci un fel de rozetă. Fenomenul se numește *precesia periheliului*. Cum diversele orbite se caracterizează prin diverse forme și precesia periheliului va fi diferită la ele. Înseamnă că o parte din energia mișcării se cheltuiește pe această precesie fapt ce conduce la dependența (foarte slabă) energiei orbitei, de forma ei, adică de  $n_\varphi$ . În acest fel introducerea corecției relativiste micșorează gradul de degenerare, orbitele cu  $n_\varphi$  diferit, dar cu același  $n$ , vor diferi puțin unele de altele și ca energie. Acest rezultat se concretizează prin *existența structurii fine* a liniilor spectrale. Spre exemplu cele două orbite cu  $n = 2$ , ( $n_\varphi = 1$  și  $n_\varphi = 2$ ) se vor separa energetic una de alta, ca urmare tranziția  $2 \rightarrow 1$  va consta din două linii extrem de apropiate, dar separabile experimental. În acest fel modelul Bohr-Sommerfeld reflectă fenomenele atomice cu un mult mai mare grad de precizie.

Cu toate perfecționările aduse modelului Bohr, cele mai importante fiind discutate anterior, modelul acesta nu a reușit să explice o serie de fenomene. Cele mai serioase deficiențe sînt următoarele:

— Modelul nu se poate aplica decît la hidrogen sau la atomi hidrogenoizi (atomi multiplu ionizați care posedă doar un singur electron). Toate încercările de aplicare la atomul imediat superior, heliul care are doi electroni, au dat greș. S-a putut chiar demonstra că în cadrul acestui model un atom cu mai mulți electroni este instabil.

— Experiența arată că liniile spectrale emise de atomi nu sînt toate la fel de intense. Acest lucru însă nu reiese de loc din modelul Bohr.

### 3. Elemente de mecanică cuantică

#### 3.1. UNDE ȘI PARTICULE

Pe măsura adâncirii studiilor legate de structura și proprietățile atomilor, fizicienii au ajuns tot mai mult la concluzia că greutățile și deficiențele întâmpinate de modelul Bohr-Sommerfeld au o cauză mai profundă. Cu alte cuvinte, greutățile pe care le întâmpină în a descrie corect atomul se regăsesc sub o formă sau alta la înțelegerea oricăror fenomene la o scară a dimensiunilor de ordinul a  $10^{-8}$  cm. De aci a rezultat că trebuie căutată o descriere mai corectă, mai conformă cu realitatea a tuturor fenomenelor microscopice. Concluzia generală este că mecanica lui Newton nu mai poate descrie corect fenomenele la această scară.

Fenomene cum ar fi efectul fotoelectric sau emisia de radiație termică (Planck) nu pot fi încadrate corect în teoria ondulatorie a luminii. La o analiză ceva mai atentă rezultă că fenomenele care nu pot fi corect explicate ondulator, corespund momentului de apariție (naștere) sau dispariție a radiației luminoase, momente care presupun directă legătură între radiație și atom. Într-un fel acest lucru a fost explicat de către modelul Bohr prin introducerea postulatelor. În fond în spatele acestor postulate se ascunde cheia înțelegerii fenomenelor la scară atomică.

Newton încă a observat că fenomenele luminoase pot fi descrise foarte bine pînă la un anumit punct atît pe o bază ondulatorie cît și pe o bază corpusculară. Acest lucru este ușor de văzut în tabelul de mai jos (V.5) în care sînt sumate principalele fenomene optice precum și descrierea pe care o admit.

TABELUL V.5

Fenomenul	Ondulatoriu	Corpuscular	
propagare rectilinie reflexia refracția	da da da	da da da	} optica geometrică
interferența difracția	da da	nu nu	} optica ondulatorie
radiația termică efectul fotoelectric	nu nu	da da	} optica fotonică



Nu pot fi explicate simultan, ondulator și corpuscular acele fenomene care sînt condiționate de trăsăturile ce deosebesc cel mai mult particulele de unde; în particular deosebirea este legată de întinderea spațială pe care o ocupă o particulă sau o undă. O particulă este totdeauna localizată într-o regiune finită a spațiului, pe cînd unda se întinde (ca și cîmpul) pe un spațiu infinit. Fenomenele de difracție și de interferență presupun această extindere spațială, pe cînd emisia radiației termice ca și efectul fotoelectric presupun restrîngerea și localizarea undei într-o regiune extrem de mică (deci cu caracter corpuscular).

În acest fel trebuie să admitem ori că lumina în diverse momente este cînd undă, cînd particulă, ceea ce este deosebit de greu de înțeles, ori presupunem că lumina conține în sine ambele calități dar că în unele momente una dintre calități predomină. A doua alternativă pare mai ușor de acceptat, cu condiția să putem cunoaște și explica fizic, cînd, cum și de ce se comportă lumina, dominant ondulatoriu sau dominant corpuscular.

Astfel ajungem la concluzia că lumina trebuie să conțină ambele calități: undă și particulă. În acest caz pot fi explicate atît fenomenele de interferență cît și cele cu caracter corpuscular, formînd astfel o unitate indestructibilă undă-particulă, numită *foton*. Așa cum a arătat Planck lumina ca undă se caracterizează prin frecvența  $\nu$ , iar ca particulă prin cuanta de energie  $\varepsilon = h\nu$  pe care o transportă. Cuanta de energie  $h\nu$  se comportă ca o unitate așa cum s-a văzut și din efectul fotoelectric explicat de către Einstein.

### 3.2. UNDA ASOCIATĂ. EXPERIENȚA DAVISSON ȘI GERMER

Rezultă din cele discutate mai sus, că atît fenomenele optice cît și cele mecanice trebuie să poată fi unificate deoarece ambele descriu comportarea unei singure entități, fotonul. Mecanica și optica trebuie să fie echivalente în cazul descrierii mișcării fotonilor. Pornind de la acest punct de vedere L. de Broglie a arătat că mecanica și optica devin echivalente și descriu în mod unitar fenomenele dacă se presupune valabilă expresia

$$v_p \cdot v_f = c^2, \quad (3.1)$$

unde  $v_p$  — viteza particulei,  $v_f$  — viteza de fază a undei,  $c$  — viteza luminii în-vid. Cu alte cuvinte, aspectul ondulator al comportării luminii, descris aici prin viteza de fază,  $v_f$ , este legat de aspectul corpuscular al fotonului, descris aci prin viteza particulei  $v_p$ .

Pe de altă parte din punct de vedere energetic echivalența în descrierea undă-particulă pentru lumină cere ca

$$\varepsilon = h\nu = mc^2, \quad (3.2)$$

adică particula (fotonul) în descriere ondulatorie are energia  $h\nu$  dată de Planck, iar pe de altă parte, în descriere mecanică are energia  $mc^2$ , conform teoriei lui Einstein. Ținînd cont că  $v_f = \lambda\nu$ , putem unifica cele două relații:

$$v_p \cdot \lambda\nu = c^2, \quad v_p\lambda \frac{mc^2}{h} = c^2, \quad (3.3)$$

$$\lambda = \frac{h}{mv_p},$$

Această relație reprezintă legătura care trebuie să existe între elementele celor două descrieri pentru ca ele să fie echivalente.

În 1924 L. de Broglie presupune că relația (3.3) este general valabilă. Cu alte cuvinte: *oricărui fenomen ondulatoriu îi este atașată o particulă și invers, oricărei particule îi este atașată o undă — undă asociată*. Relația (3.3) este cea care exprimă această corespondență în mod cantitativ.

În felul acesta pe lângă unificarea fenomenelor optice și mecanice se obține și o remarcabilă simetrie particulă-undă.

Această neobișnuită și revoluționară unire a celor două aspecte fundamentale de mișcare a materiei ar fi rămas o pură speculație dacă fapte experimentale, în afară de orice dubiu, nu ar fi verificat calitativ și cantitativ corectitudinea expresiei (3.3). Astfel în 1927, experiențele de difracție a electronilor efectuate de Davisson și Germer au confirmat atât existența fenomenului ondulatoriu atașat electronului cât și valabilitatea relației cantitative postulate de L. de Broglie (3.3).

În tabelul (V.6), sînt date valorile calculate ale lungimii de undă a unei asociații, pentru două particule: un electron și o particulă de masă  $10^{-3}$  kg, pentru diverse viteze:

TABELUL V.6

Viteza	70 km/h (mașină)	1 000 km/h (avion)	51 000 km/h (rachetă)	$10^8$ m/s electron pe orbită	$10^8$ m/s 1/3 din viteza luminii
$\lambda$ pentru electron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg	$3,6 \cdot 10^{-5}$ m	$2,4 \cdot 10^{-6}$ m	$1,3 \cdot 10^{-8}$ m	$7,2 \cdot 10^{-10}$ m	$7,2 \cdot 10^{-12}$ m
$\lambda$ pentru particulă $m = 10^{-3}$ kg	$3,3 \cdot 10^{-32}$ m	$2,2 \cdot 10^{-33}$ m	$1,2 \cdot 10^{-35}$ m	$6,6 \cdot 10^{-37}$ m	$6,6 \cdot 10^{-39}$ m

Din optică știm că fenomenele de interferență și difracție, devin observabile atunci cînd lungimea de undă devine comparabilă cu dimensiunea obiectelor pe lângă care trece unda. Din tabelul (V.6) se vede că niciodată o particulă macroscopică de 1 g nu va putea trece printr-o fantă de  $10^{-30}$  cm și deci toate obiectele macroscopice vor prezenta caracteristici pregnante de particulă, pe cînd comportarea ondulatorie nu se manifestă. Din contră, particule de masă extrem de mică (electron, proton,...) se mișcă în continuu printre „obiecte” ale căror dimensiuni sînt de aproximativ aceeași mărime ca și lungimea de undă asociată. De exemplu, electronul pe prima orbită Bohr are  $\lambda = 3,3 \cdot 10^{-10}$  m, iar raza primei orbite Bohr  $0,53 \cdot 10^{-10}$  m. Din această cauză neglijarea aspectului ondulator în mișcarea electronului în jurul atomului sau la ciocnirea lui cu atomii, conduce la obținerea unor rezultate în dezacord complet cu experiența. În acest sens Davisson și Germer au căutat să observe aspectul ondulator în mișcarea electronului, punîndu-l să se miște printre atomi așezați ordonat unul lângă altul la distanțe comparabile cu lungimea de undă asociată (analog cu o rețea de difracție optică). Această „rețea de difracție” care să posedă o atît de mică echidistanță între atomi ( $a$ ) este rețeaua cristalină.

Pentru a găsi condiția de producere a fenomenului de interferență să analizăm cazul cel mai simplu: un șir liniar de atomi echidistanți (fig. V.3.1). Din punct de vedere ondulatoriu spunem că o undă plană (fascicul) cade pe

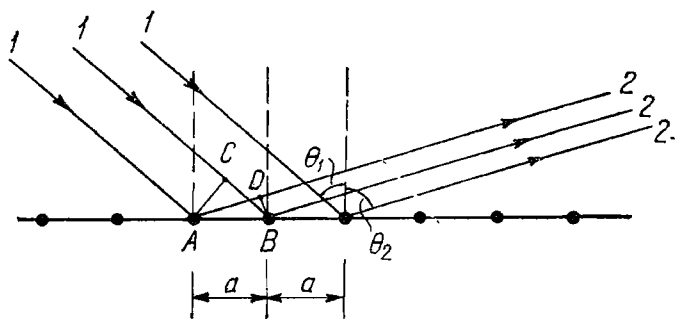


Fig. V.3.1

șirul de atomi, sub unghiul de incidență  $\theta_1$  și este împrăștiată sub unghiul  $\theta_2$ . Undele împrăștiate de atomi vor interfera, direcția unei împrăștiate se va găsi punînd condiția ca diferența de drum a undelor împrăștiate să fie un multiplu întreg de  $\lambda$ . Acest lucru se exprimă prin relația

$$|\overline{CB} - \overline{AD}| = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

care devine

$$n\lambda = a |(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)|. \quad (3.4)$$

Dacă  $a$  se cunoaște ( $\theta_1$  și  $\theta_2$  se măsoară experimental), se poate determina  $\lambda$ . Davisson și Germer au construit un „tun electronic” care dă un fascicul paralel de electroni de o viteză constantă și cunoscută (ca la tubul catodic).

Acest fascicul de electroni a fost dirijat asupra unui cristal de nichel și au fost detectați electronii împrăștiați sub diverse unghiuri. Știind  $a$  ( $a \simeq 3,5\text{\AA}$  pentru Ni) și viteza electronilor, s-a putut verifica că pe direcțiile  $\theta_2$  (care corespund relației (3.4) cînd se introduce valoarea lui  $\lambda$  din (3.3)) se obțin într-adevăr maxime de interferență. Deci electronul se comportă ca o undă, în conformitate cu postulatul lui de Broglie. Ulterior aceste experiențe au fost efectuate și cu alte particule ca protoni, neutroni, particule  $\alpha$ , și de fiecare dată comportarea ondulatorie a fost regăsită în concordanță cu teoria. În acest fel s-a demonstrat că în realitate avem de-a face nu cu particule sau cu unde ci cu un gen nou de particulă, care are legi specifice de mișcare și pe care o vom denumi *microparticulă*. Orice microparticulă cuprinde în ea atât proprietăți corpusculare cît și de undă. Această dualitate nu ne este cunoscută la scara macroscopică și deci nu avem un model de reprezentare al ei. Din această cauză comportarea microparticulei ne apare stranie, deoarece ea nu se supune legii de mișcare a lui Newton sau legii de mișcare a undelor decît în cazuri limită, foarte particulare.

Putem înțelege astfel că mișcarea electronului în jurul nucleului nu poate fi complet înțeleasă dacă considerăm numai aspectul corpuscular-mecanic al mișcării lui. Dacă luăm în considerație și celălalt aspect — ondulatoriu — mișcarea electronului va fi descrisă în concordanță cu experiența. Într-adevăr, condiția de echilibru al forțelor exercitate asupra electronului pe traiectorie ne conduce la relația pentru raza orbitei circulare:

$$R = \frac{K e^2}{m v^2}. \quad (3.5)$$

Aspectul ondulatoriu în mișcarea electronului intervine la rîndul lui cu cerința ca lungimea traiectoriei electronului să fie un multiplu întreg de  $\lambda$ . Această cerință este necesară pentru ca fenomenul ondulatoriu asociat electronului să aibă aceleași valori atunci cînd se întoarce la punctul de plecare, căci numai în acest caz interferența va conduce la un maxim. Un minim de interferență ar corespunde dispariției fenomenului ondulatoriu, ceea ce ar corespunde inexistenței particulelor pe acea traiectorie. Deci rezultă că traiectoriile permise ale electronului ca undă-particulă trebuie să fie selectate de condiția

$$2\pi R = n\lambda. \quad (3.6)$$

Combinînd relațiile (3.5), (3.6) și (3.3) obținem relația cunoscută a lui Bohr,

$$R_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2 K}.$$

Încă o dată postulatul lui de Broglie este perfect verificat iar existența orbitelor staționare și cuantificarea mișcării electronice devine o simplă consecință a caracterului dual al microparticulei.

### 3.3. ECUAȚIA SCHRÖDINGER

Rămîn de rezolvat două mari probleme: 1) natura fenomenului ondulator asociat, 2) legea de mișcare a microparticulei. Să discutăm cele două probleme pe rînd. Nici una din undele cunoscute (unde electromagnetice, acustice...) nu corespund cu natura undei asociate. Orice încercare de detectare a undei asociate este *sortită eșecului*. Unda asociată se dovedește a fi de o natură total deosebită. Mai exact ea nu este o undă în sensul propriu al cuvîntului, ci este o *cale de explicare a modului deosebit de comportare a microparticulelor*. Nu există nici o undă cu lungimea de undă  $\lambda$  care este atașată într-un fel sau altul de o microparticulă. Fenomenul ondulatoriu asociat corespunde în realitate la exprimarea faptului că o *particulă caracterizată prin impulsul  $mv$  se va comporta în mișcarea ei ca o undă a cărei lungime de undă este dată de (3.3)*. Din cauză că ea exprimă un mod de comportare, ea nu este o undă fizică propriu-zisă căci nu *transportă nici o energie*. Din această cauză denumirea de undă asociată (istoric rămasă) este nepotrivită și poate conduce la confuzii.

Să trecem acum la cea de a doua problemă. Cunoaștem că particulele se supun legii de mișcare a lui Newton, cu ajutorul căreia se poate determina forma traiectoriei și toți ceilalți parametri ai ei. În cazul undelor legea de mișcare este o ecuație diferențială a cărei soluție ne dă modul de propagare a undei, respectiv a frontului de undă. Pentru simplificare vom lua cazul mișcării rectilinii, respectiv a undei plane și vom putea să scriem:

Fenomen	mecanic	ondulatoriu
Legea de mișcare	$F = ma = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot m$	$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi$
Soluția	$x = x(t)$	$\psi = a \sin 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right)$

În primul caz, soluția este dată sub forma unei funcții care ne dă poziția pe axa  $Ox$  la un moment dat a particulei de masă  $m$ .

În al doilea caz, soluția ne este dată sub forma elongației  $\psi$  a undei, la un moment dat  $t$  și într-un punct  $x$  de-a lungul direcției de propagare, pentru unda de lungime de undă  $\lambda$ . În ambele cazuri, efectuând derivatele necesare, din soluție putem ajunge la ecuația de mișcare. Pentru a găsi legea de mișcare pentru microparticulă va trebui să folosim legătura dată de relația (3.3) pentru cele două mișcări. Astfel vom căuta să găsim pe  $\lambda$  din mișcarea mecanică. Pentru aceasta vom folosi legea de conservare a energiei.

$$E = U + \frac{mv^2}{2} \quad (U - \text{energie potențială}),$$

de unde

$$mv = \sqrt{2m(E - U)},$$

iar

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U)}}. \quad (3.7)$$

Introducem această expresie în legea de mișcare a undelor și obținem cea mai simplă expresie pentru mișcarea microparticulelor:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \psi = 0. \quad (3.8)$$

Ea reprezintă *ecuația* (E. Schrödinger 1926) *pentru mișcarea staționară, uni-dimensională* a microparticulei.

În realitate modul în care am dedus ecuația lui Schrödinger nu este o demonstrație (ea nu este demonstrată), ci este un mod de a „construi”. În mecanica cuantică, ea este postulată ca valabilă, la fel cum legea lui Newton este postulată în mecanica clasică. În ambele cazuri experiența demonstrează în mod strălucit corectitudinea ei pentru gama de fenomene la care se referă. Ecuația (3.8) ne dă modul de comportare a unei microparticule în mișcare pe axa  $Ox$ , într-o situație staționară. Din modul în care am construit ecuația Schrödinger, se pare că deosebirea față de ecuația undelor este doar formală. În realitate deosebirile sînt foarte mari și vom menționa cîteva dintre ele. Elongația  $\psi$  numai în cazuri particulare (ca cel de mai sus, de exemplu) este o funcție reală. De obicei ea este complexă, ceea ce nu se întîmplă pentru cazul undelor clasice. O a doua deosebire extrem de importantă este aceea că acum nu mai știm ce înseamnă sau ce reprezintă elongația  $\psi$ , deoarece nu avem de-a face cu o undă în sensul obișnuit al cuvîntului (clasic), ci cu un mod de comportare. În cazul clasic, elongația ne dădea intensitatea undei într-un punct, dar acum nu mai știm. Pentru a se înțelege ce se exprimă prin  $\psi$ , s-au efectuat nenumărate experiențe. Vom descrie una din ele sub o formă deosebit de simplificată. Se numește experiența lui Young pentru difracția prin două fante apropiate (fig. V.3.2), des folosită în optică. Presupunem că experiența se efectuează cu unde luminoase. Dacă ambele fante ( $A$  și  $B$ ) sînt deschise, atunci pe paravanul  $E$  se obțin maxime și minime de intensitate luminoasă, figurate grafic alături ( $a$ ). Poziția maximelor și minimelor se poate calcula cunoscînd distanța dintre fante  $a$ , distanța dintre ecran și paravan  $d$ , lungimea de undă  $\lambda$  a luminii,

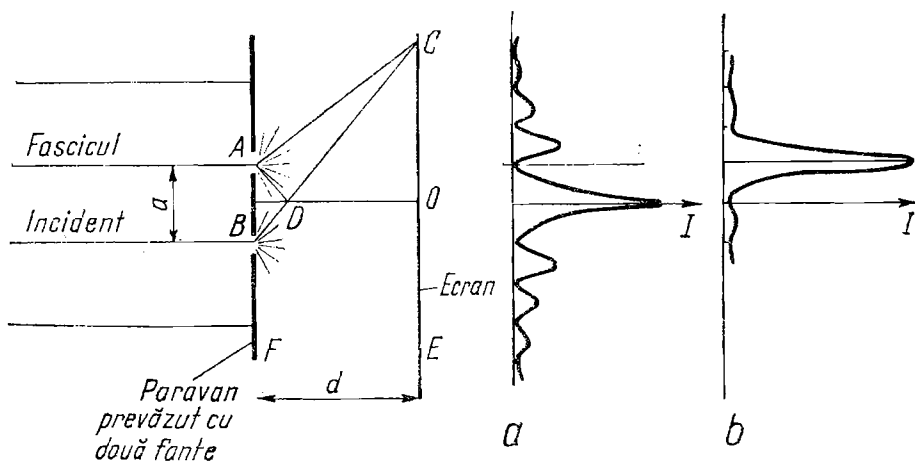


Fig. V.3.2

punînd condiția  $(\overline{BC} - \overline{AC}) = \overline{BD} = n\lambda$ . Intensitățile maximelor succesive, pentru  $n$  crescător, scad repede. Este interesant că în dreptul lui  $O$  al figurii se obține un maxim, cu toate că în dreptul lui avem un paravan opac. Acesta este un exemplu tipic de difracție. Dacă, mai departe, acoperim de exemplu fanta  $B$ , lumina va putea trece doar prin fanta  $A$ , maximul se va muta, precum se vede în (b), în dreptul fantei. Înțelegem deci că atunci cînd ambele fante sînt deschise, undele care străbat cele două fante interferă și dau maxime și minime. Care ar fi rezultatul dacă experiența ar fi efectuată cu electroni? Electronul, în concepție de particulă, se propagă rectiliniu și deci nu ar suferi fenomene de difracție, în sensul că dacă el cade pe o fantă, o va străbate și va ciocni ecranul  $E$  în dreptul fantei. Ne așteptăm deci ca să detectăm prezența electronilor numai în dreptul fantelor deschise. Într-adevăr, experiența arată că dacă una din fante este deschisă și cealaltă închisă, atunci electronii vor fi prezenți în dreptul fantei deschise, pe ecranul  $E$ . Dar dacă ambele fante sînt deschise, vom găsi electroni practic pe toată întinderea ecranului  $E$ , astfel încît numărul de electroni care cad pe fiecare  $\text{cm}^2$  variază exact ca în cazul undei luminoase de aceeași lungime de undă  $\lambda$ . Pe ecran se vor observa maxime și minime ale fluxului de electroni analog cazului optic. Rezultă încă o dată de aci că electronul se mișcă ca și cum ar fi o undă. Deoarece în cazul undei, intensitatea ei este proporțională cu pătratul elongației vom spune că și în acest caz intensitatea fascicului de electroni trebuie să fie proporțională cu pătratul elongației  $\psi$ . Cum însă  $\psi$  poate fi complex, în loc de pătrat se ia modulul pătrat  $|\psi|^2$ , deoarece intensitatea fascicului trebuie să se exprime printr-o expresie reală. Pe de altă parte intensitatea fascicului de electroni care a ajuns într-o regiune dată a ecranului este egală cu fracțiunea din numărul total de electroni care a ajuns în acea zonă. Tragem concluzia că  $|\psi|^2$  ne va da fracțiunea din numărul total de electroni căzuți pe fante și care s-au îndreptat spre regiunea la care se referă  $\psi$ . Cu alte cuvinte  $|\psi|^2$  ne dă probabilitatea de a găsi electronul în preajma unui punct de pe ecran:

$$P = |\psi|^2 \quad (3.9)$$

În felul acesta se găsește că elongația  $\psi$  sau *funcția de undă*, cum este ea numită în mecanica cuantică, este o măsură a probabilității de a găsi electronul într-o anumită regiune. Fenomenul ondulatoriu se dovedește a fi astfel, o „undă pe probabilitate”, care realmente dă numai *modul de comportare* al microparticulei, iar  $\psi$  în sine nu are nici o semnificație fizică. Semnificația fizică este cuprinsă în  $|\psi|^2$ .

### 3.4. NOUA IMAGINE ASUPRA MICROCOSMOSULUI

Rezultatele la care s-au ajuns în urma analizei experiențelor de difracție a electronilor, cu toate că lămuresc o parte din problemele legate de comportarea microparticulelor, conduc în același timp la o mulțime de consecințe neașteptate. Să analizăm în continuare experiența lui Young efectuată cu ajutorul electronilor (fig. V.3.2). Să presupunem că închidem fanta  $B$ . În acest caz densitatea de electroni care cade pe ecran este reprezentată în fig. V.3.2b și coincide cu cea obținută în cazul luminii. Dacă micșorăm intensitatea fascicolului incident, figura (b) se obține identică dacă lăsăm să treacă un timp mai îndelungat. Chiar dacă micșorăm într-atât intensitatea încît electronii să vină rînd pe rînd (cît timp un electron zboară de la sursă la ecranul  $E$ , nici un alt electron nu este lăsat să vină) imaginea de difracție se obține în același mod, după un timp convenabil de expunere. Deci proprietatea de difracție, adică de a-și schimba direcția rectilinie de zbor *este proprie fiecărui electron în parte*. Putem să încercăm să dăm vina pe marginile fantei, care ar produce devierea din drum a electronilor. Dar există contraargumente care spun că atunci nu s-ar forma maxime și minime ci o uniformă scădere a intensității de electroni pe ecran în jurul imaginii fantei. Să deschidem și a doua fantă și să lăsăm să treacă tot ca mai înainte: electron după electron. Și în acest caz se obține figura de difracție ca în optică (a). Acest lucru este și mai de neînțeles deoarece electronul trebuie să treacă neapărat *printr-una din fante*. Atunci cum de „știe” că fanta a doua este sau nu deschisă, pentru a produce figura (a) sau (b)? Iată o problemă care este experimental verificată, dar care este deosebit de dificil de a fi înțeleasă. Nu putem să presupunem că electronul ar fi atît de extins spațial încît să treacă prin ambele fante deodată (cum se întîmplă în cazul undelor) și nici că el s-ar putea divide, fracționat deoarece nici o experiență nu a pus în evidență pînă acum acest lucru. Cum singura cale de a trage concluzii corecte este experiența, rezultă că trebuie să acceptăm că această comportare stranie este reală și, mai mult, că este *modul normal de comportare* al microparticulelor. Iată deci că microparticula reală, care posedă proprietăți duale de particulă și de undă, se comportă cu totul altfel decît ceea ce ne așteptăm noi de la o particulă sau o undă clasică. Realitatea experimentală ne cere să o acceptăm ca atare, chiar dacă depășește limita noastră de înțelegere, care este exclusiv formată pe baza unor experiențe de viață macroscopice.

Singurul lucru pe care-l putem spune este că *nu știm ce se va întîmpla cu un electron după ce trece de fantă*, încotro va pleca el iar mecanica cuantică prezice imposibilitatea acestui control riguros. Dar *putem spune* că lăsînd să treacă un mare număr de electroni, probabilitatea de a găsi un anumit număr de electroni într-o regiune dată a ecranului este calculabilă și este dată de  $|\psi|^2$ .

Microparticula nu poate fi urmărită în mișcarea ei la o scară de mărime de ordinul a  $10^{-10}$  m și nici o teorie fizică nu reușește acest lucru. Putem spune însă cu exactitate care este probabilitatea de a găsi microparticula în spațiu, rezolvând ecuația lui Schrödinger. Pe lângă faptul că nu putem cunoaște exact mișcarea electronilor se mai adaugă și faptul că toate microparticulele de același gen sînt identice între ele. Nu avem, cu alte cuvinte, nici un mijloc să deosebim un electron de altul, deoarece ei sînt identici. În acest fel nu putem ști care electron se mișcă, încotro a plecat și ce a făcut. Toate acestea ne conduc la înțelegerea inutilității noțiunii de *traiectorie a microparticulelor* deoarece nu sîntem în stare să o precizăm nu din cauza insuficienței teoriei, ci din însăși natura duală a microparticulei. Acest lucru a fost exprimat matematic de către W. Heisenberg prin așa-numita *relație de incertitudine* (1927):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad (3.10)$$

care spune că *poziția și impulsul unei microparticule nu pot fi precis definite simultan*.  $\Delta x$  și  $\Delta p_x$  măsoară incertitudinea în poziție și în impuls (pentru axa  $Ox$ ) a unei microparticule.

Cu cît precizăm mai bine poziția unei microparticule cu atît imprecizia în cunoașterea impulsului va fi mai mare și reciproc. Această imprecizie nu se simte la scară macroscopică datorită valorii mici a constantei lui Planck,  $\hbar$ . Spre exemplu o imprecizie în poziția unei bile, de  $10^{-5}$  m, este inobservabilă macroscopic și ea conduce la o imprecizie de măsură a impulsului de  $\simeq 10^{-29}$  kg · m/s, total în afara posibilităților de măsură. Deci aceste imprecizii în cunoașterea simultană a impulsului și poziției, la scară macroscopică, sînt inobservabile și deci evident nesupărătoare. La scară microscopică ea devine extrem de importantă. Să presupunem că măsurăm (fictiv, mintal) raza de mișcare a electronului pe prima orbită Bohr, cu o precizie de 1%; acest lucru înseamnă  $\Delta r = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-2} = 0,53 \cdot 10^{-12}$  m imprecizie. Pentru imprecizia în impuls vom obține:

$$\Delta p_x = 2 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Cum masa electronului este de  $9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, imprecizia în viteză va fi

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \simeq 0,2 \cdot 10^{12} \text{ m/s},$$

prea mare pentru a o putea neglija (viteza electronului pe prima orbită:  $\sim 10^{10}$  m/s).

Mai departe, putem găsi o expresie pentru imprecizia în cunoașterea energiei  $\Delta W$ . Deoarece  $W = \frac{p^2}{2m}$ ,

$$\Delta W = \frac{p \cdot \Delta p}{m} = v \cdot \Delta p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p,$$

deci

$$\Delta x \cdot \Delta p = \Delta W \cdot \Delta t$$



și deci

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (3.11)$$

Imprecizia în energie, după câte se vede, este legată de imprecizia temporară. Nu putem cunoaște cu o precizie mai mare decât cea dată de (3.11) energia unei particule (sau a unui sistem), la un moment dat. *Precizia în cunoașterea energiei este cu atât mai mare cu cât vom căuta o medie a ei pe o perioadă mai lungă de timp.* Cu alte cuvinte o particulă sau un sistem va avea o valoare cu atât mai precizată a energiei cu cât stă mai mult timp în acea stare de energie. Deci cu cât sistemul este mai stabil cu atât va avea o energie mai bine precizată. Stările excitate ale atomului, spre exemplu, au o viață medie de aproximativ  $10^{-8}$ s ( $\Delta t = \tau$ , *durata de viață*) ceea ce le conferă o imprecizie a valorii energiei  $\Delta W = \Gamma$  ( $\Gamma$  — se numește lărgimea nivelului de energie),  $\Gamma = 6,6 \cdot 10^{-8}$  eV. Acest fapt se simte experimental prin lărgirea liniei spectrale care rezultă prin tranziția atomului de pe nivelul excitat pe cel fundamental. Adică, linia spectrală nu conține o singură frecvență, ci este de fapt compusă din linii cu frecvențe extrem de apropiate între ele, în conformitate cu imprecizia energetică a nivelelor între care s-a produs tranziția.

În concluzie, mecanica cuantică arată că traiectoria este o noțiune care nu poate fi utilizată la mișcarea microparticulelor; că nu toate caracteristicile fizice (poziție, impuls, viteză, energie, timp...) pot fi simultan măsurabile cu o precizie foarte bună; că nu putem deosebi microparticulele de același fel una de alta și în concluzie ne apare evidentă imposibilitatea de a înțelege pe baza unor teorii clasice, evenimentele la scară microscopică. Descrierea mișcării la scară microscopică este mult mai săracă în detalii ca cea la scară macroscopică și se pare că acest lucru nu este determinat de insuficiențe ale teoriei, ci de natura deosebită a obiectelor care alcătuiesc microcosmosul.

### 3.5. REZOLVAREA ECUAȚIEI SCHRÖDINGER

Vom examina (în continuare) două cazuri care să exemplifice modul în care mecanica cuantică rezolvă problemele mișcării microparticulelor.

a) **Electronul într-o groapă de potențial cu pereții infiniți** (fig. V.3.3). Presupunem că un electron se poate mișca doar pe axa  $Ox$  între punctele  $0 \leq x \leq a$ , deoarece pentru  $x > a$  și  $x < 0$ , potențialul determinat de o forță repulsivă (oarecare) devine  $\infty$ . Se spune că electronul se află într-o groapă de potențial cu pereții infiniți. Presupunem că în interior, potențialul este nul. Rezultă că

$$U = \begin{cases} \infty & x < 0 & \text{(I)} \\ 0 & 0 < x < a & \text{(II)} \\ \infty & x > a & \text{(III)} \end{cases} \quad (3.12)$$

Trebuie să scriem acum ecuația Schrödinger pentru cele trei regiuni separat, date în (3.12), și să calculăm pentru fiecare regiune valorile lui  $E$  și  $\psi$ . Se vede că pentru regiunile I și III,  $U = \infty$ . Pentru ca ecuația (3.8) să poată fi egală cu zero, trebuie neapărat ca  $\psi_I = \psi_{III} = 0$  și deci  $|\psi_I|^2 = |\psi_{III}|^2 = 0$ . Deci probabilitatea de a găsi electronul în aceste două regiuni este riguros

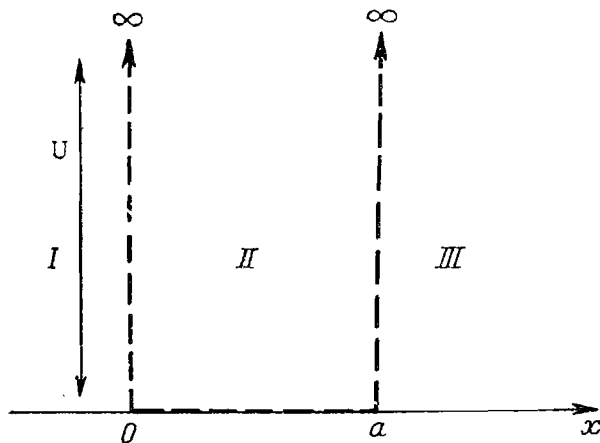


Fig. V.3.3

nulă. Vom căuta să rezolvăm ecuația Schrödinger pentru regiunea a doua, unde  $U = 0$ . Ecuația Schrödinger va fi:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0. \quad (3.13)$$

Această ecuație este satisfăcută de o soluție  $\psi$  de forma

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx, \quad (3.14)$$

unde

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad (3.15)$$

Derivând (3.14) de două ori în raport cu  $x$ , și introducând-o în (3.13) putem verifica că este într-adevăr o soluție a ecuației Schrödinger. Pentru a determina coeficienții necunoscuți  $A$ ,  $B$  și  $k$ , vom scrie condițiile pe care trebuie să le satisfacă  $\psi$  pentru a descrie corect mișcarea electronului. Din condițiile

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \psi(a) = 0 & \text{pentru } x = a, \end{cases} \quad (3.16)$$

obținem

$$\psi(0) = 0 + B = 0, \quad \text{deci } B = 0$$

$$\psi(a) = A \cdot \sin ka.$$

Ultima relație este satisfăcută când

$$ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

respectiv

$$E = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (3.17)$$

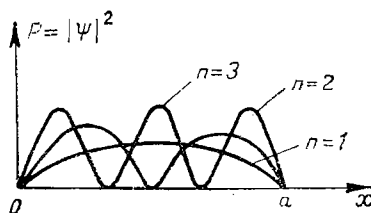


Fig. V.3.4

Electronul nu va putea lua orice valoare pentru energie, ci numai anumite valori discrete, în funcție de „numărul cuantic  $n$ ”. Rezultă astfel direct cuantificarea mișcării electronului (ca și a oricărei alte microparticule, atunci când este obligată să rămână într-o regiune finită a spațiului, de exemplu electronul în jurul nucleului, protonul și neutronul în interiorul nucleului etc. ...). Cu aceasta nu am terminat, căci mai putem determina probabilitatea de a găsi electronul în jurul unui punct oarecare în interiorul gropii. Deoarece îl cunoaștem pe  $k$ :

$$\psi = A \sin n\pi \frac{x}{a},$$

iar

$$P = |\psi|^2 = |A|^2 \sin^2 n\pi \frac{x}{a}. \quad (3.18)$$

Lăsând deocamdată pe  $A$  nedeterminat (dar constant), probabilitatea de a găsi electronul va depinde de  $x$  și de  $n$  (deci de energie) sub forma indicată în fig. V.3.4, pentru  $n = 1, 2, 3$ . Vedem că în toate cazurile probabilitatea de a găsi electronul lângă pereți este foarte mică, și mare în regiunile centrale. De asemenea se observă că cu creșterea lui  $n$ , apar  $n - 1$  locuri în interiorul gropii în care probabilitatea de a găsi electronul este nulă. Ele se numesc *noduri*, prin analogie cu situația undelor staționare (care apar de exemplu într-un tub Kundt). Analogia este ceva mai profundă deoarece și acolo ca și aici, undele staționare iau naștere ca urmare a interferenței undelor reflectate la cele două capete. Aci însă se vede clar că avem de-a face nu cu unde propriu-zise ci cu o comportare ondulatorie, exprimată sub formă de maxime și minime de probabilitatea de găsire a electronului. Se poate vedea din acest exemplu modul în care mecanica cuantică rezolvă problema. Este lipsit de sens să ne întrebăm: ce face electronul și cum se mișcă în groapă? Mecanica cuantică ne spune că nu putem primi un răspuns la această întrebare deoarece noțiunea clasică de traiectorie nu are sens pentru microcosmos.

Presupunând că avem un electron în groapă, putem să aflăm și valoarea constantei  $A$ , scriind condiția ca probabilitatea de a găsi electronul *undeva* în groapă (deci suma probabilităților de a-l găsi în toate punctele de la 0 la  $a$ ) să fie 1 (adică certitudinea):

$$1 = \int_0^a |\psi|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2 \left( n\pi \frac{x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} a A^2$$

de unde

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

și deci soluția completă a problemei puse, devine:

$$\left. \begin{aligned} \psi_I &= 0 && \text{pentru } x < 0 \\ \psi_{II} &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) && \text{,, } 0 < x < a \\ \psi_{III} &= 0 && \text{,, } x > a \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

$$E = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2}.$$

și

b) **Bariera de potențial** (fig. V.3.5). Bariera de potențial este descrisă de potențialul

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (3.20)$$

care de asemenea determină trei regiuni în spațiu și evident trei funcții de undă  $\psi_I$ ,  $\psi_{II}$  și  $\psi_{III}$  vor descrie comportarea unui electron în acest caz. Deoarece toate trei funcțiile descriu comportarea aceluiasi electron în trei regiuni diferite, condițiile matematice care se impun sînt acelea ca funcțiile de undă și derivatele lor de ordinul întâi să aibă aceleași valori pentru punctele  $x = 0$  și  $x = a$ , să fie deci continue (în sens matematic) în aceste puncte. De asemenea, deoarece nicăieri  $U$  nu ia valori infinite, ne așteptăm ca probabilitatea de găsire a unui electron în cele trei regiuni să fie diferită de zero. Din punct de vedere clasic, acest lucru nu corespunde realității pentru cazul electronilor cu  $E < U_0$ . Să analizăm această contradicție, dar numai calitativ, căci cantitativ rezolvarea ecuațiilor Schrödinger cere în acest caz un aparat matematic mai complicat. Cazul clasic se poate imagina simplu astfel: ba-

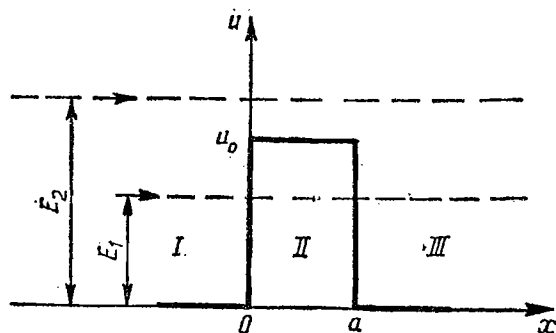


Fig. V.3.5

rieră ne-o imaginăm ca un zid de grosime  $a$  și de înălțime  $h$ . Pentru a trimite o piatră din regiunea I în II, este necesar să aruncăm piatra peste zid, deoarece zidul este compact. Acest lucru necesită însă furnizarea unei cantități de energie pietrei cel puțin egală cu energia potențială  $U_0 = mgh$  ( $m$  — masa pietrei,  $g$  — accelerația gravitației). Pentru o energie  $E < U_0 = mgh$  piatra nu poate să depășească zidul, deci nu are posibilitatea să ajungă în zona II sau III. Se poate ajunge în zona II de exemplu perforând peretele, dar acest lucru la rândul lui cere o cantitate de energie mult mai mare ca  $U_0$  (peretele este rigid) ceea ce în fond ne conduce la același rezultat: piatra nu poate să se găsească în regiunea II sau III decât dacă are o energie mai mare ca cea a barierei de potențial  $U_0 = mgh$ . Cu totul altfel se petrec lucrurile dacă înlocuim piatra cu un electron, iar peretele, de exemplu, cu un câmp electrostatic de frînare, care să nu admită clasic prezența electronului în zona II. Cuantic acest electron poate fi găsit în zona II și III (dacă inițial a fost în I) cu probabilitatea  $|\psi_{II}|^2$  și  $|\psi_{III}|^2$ . Este adevărat că pentru bariere înalte și groase, această probabilitate devine foarte mică, dar situația rămîne principial neschimbată. Se poate defini un coeficient de transmisie prin barieră, care să ne dea numărul de electroni care străbat bariera în unitate de timp, în sensul  $II \rightarrow III$ , raportat la numărul de electroni care în unitate de timp se ciocnesc de (perete) barieră:

$$D = \frac{v_3 |\psi_{III}|^2}{v_1 |\psi_I|^2}, \quad (3.21)$$

unde  $v_1$  și  $v_3$  sînt vitezele electronului în regiunile I, respectiv III. Acest fenomen pur cuantic se numește *efect tunel*. În efectul tunel, electronul străbate peretele fără consum de energie; cu alte cuvinte dacă inițial electronul se afla în regiunea I, după un timp probabilitatea de a-l găsi în regiunea a III-a este  $\neq 0$ , chiar dacă energia lui este  $E < U_0$ . Această „transparență”  $D$  a barierei este întîlnită spre exemplu la emisia particulelor  $\alpha$  din nucleu (radioactivitatea  $\alpha$ ).

Fenomenul nu poate fi deci explicat clasic, ci numai cuantic. Mișcarea particulelor elementare este descrisă corect de noua mecanică, mecanica cuantică.

## 4. Atomul de hidrogen în mecanica cuantică

### 4.1. ORBITALI ATOMICI

Vom descrie în continuare rezultatele rezolvării corecte a ecuației lui Schrödinger pentru atomul de hidrogen. Potențialul în care se mișcă electronul este potențialul coulombian:

$$V(r) = + K \frac{Ze}{r},$$

unde  $Ze$  este sarcina nucleului, iar  $r$  distanța de la nucleu la punctul în care vrem să calculăm potențialul. Energia potențială a electronului în câmpul nucleului va fi

$$U(r) = -eV(r) = -K \frac{Ze^2}{r}. \quad (4.1)$$

Ecuația Schrödinger va conține în cazul acesta cele trei coordonate sferice  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , care vor da poziția electronului (fig. V.4.1); nucleul este fixat în originea axelor de coordonate.

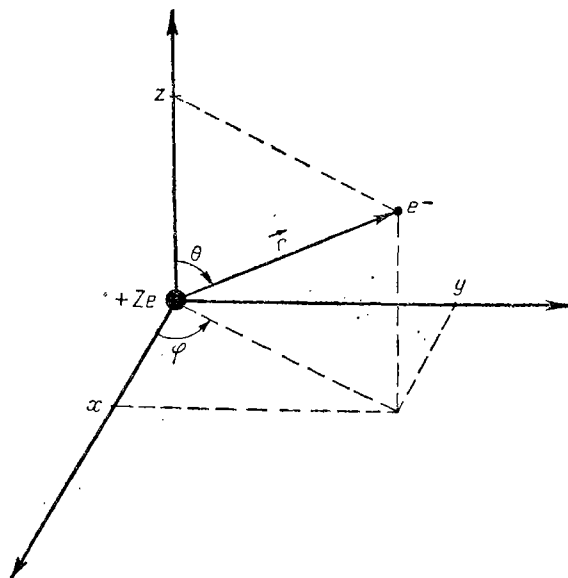


Fig. V.4.1

Funcția de undă  $\psi$  va depinde de toate cele trei coordonate  $r, \theta, \varphi$ , dar va mai depinde și de numerele cuantice  $n, l, m$  în concordanță cu observația lui Sommerfeld, că fiecărui grad de libertate îi corespunde un număr cuantic;  $n$  — se numește număr cuantic principal, ca și înainte,  $l$  se numește numărul cuantic al momentului cinetic, legat de numărul cuantic corespunzător  $n_\varphi$  din modelul Bohr-Sommerfeld prin relația

$$l = n_\varphi - 1,$$

iar  $m$  se numește număr cuantic magnetic sau număr cuantic al proiecției momentului cinetic orbital. Vom reveni asupra acestor numere cuantice. Notînd funcția de undă cu  $\psi_{nim}$ , obținem pentru atomul de hidrogen:

$$\begin{aligned}\psi_{100} &= f_1(r) & \text{cu } f_1(r) &= \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_1^3}} \cdot e^{-\frac{Z}{a_1} \cdot r} \\ \psi_{200} &= f_2(r) & f_2(r) &= \sqrt{\frac{Z^3}{8\pi a_1^3}} \cdot e^{-\frac{Z}{2a_1} \cdot r} \left(1 - \frac{Z}{2a_1} \cdot r\right) \\ \psi_{210} &= f_3(r) \cdot \cos \theta & f_3(r) &= \sqrt{\frac{Z^3}{32\pi a_1^3}} \cdot e^{-\frac{Z}{2a_1} \cdot r} \cdot r \\ \psi_{211} &= \frac{1}{\sqrt{2}} f_3(r) \cdot \sin \theta \cdot e^{i\varphi} & a_1 &= \frac{\hbar^2}{me^2 K} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m} - \\ \psi_{21-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} f_3(r) \cdot \sin \theta \cdot e^{-i\varphi} & & \text{— prima rază Bohr}\end{aligned} \quad (4.2)$$

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi,$$

iar energia electronului în una din stările caracterizate prin  $\psi_{nim}$  este exact aceea dedusă de Bohr:

$$E_n = \frac{mZ^2 e^4 K^2}{2n^2 \hbar^2}. \quad (4.3)$$

Se regăsește astfel pe o bază riguroasă că: energia electronilor în atomul de hidrogen corespunde cu cea prevăzută de modelul Bohr-Sommerfeld. De asemenea existența mai multor stări pentru aceeași valoare a energiei (aceiași  $n$ ) se confirmă și aci. Pentru simplificare, s-a acceptat o notație care să desemneze stările electronice în funcție de  $n$  și  $l$ , (tabelul V.7) asociind câte o literă fiecărei valori posibile pentru  $l$ . Pe de altă parte  $l$  poate lua toate valorile

TABELUL V.7

$n \backslash l$	0	1	2	3	4	5
1	1 s					
2	2 s	2 p				
3	3 s	3 p	3 d			
4	4 s	4 p	4 d	4 f		
5	5 s	5 p	5 d	5 f	5 g	
6	6 s	6 p	6 d	6 f	6 g	6 h

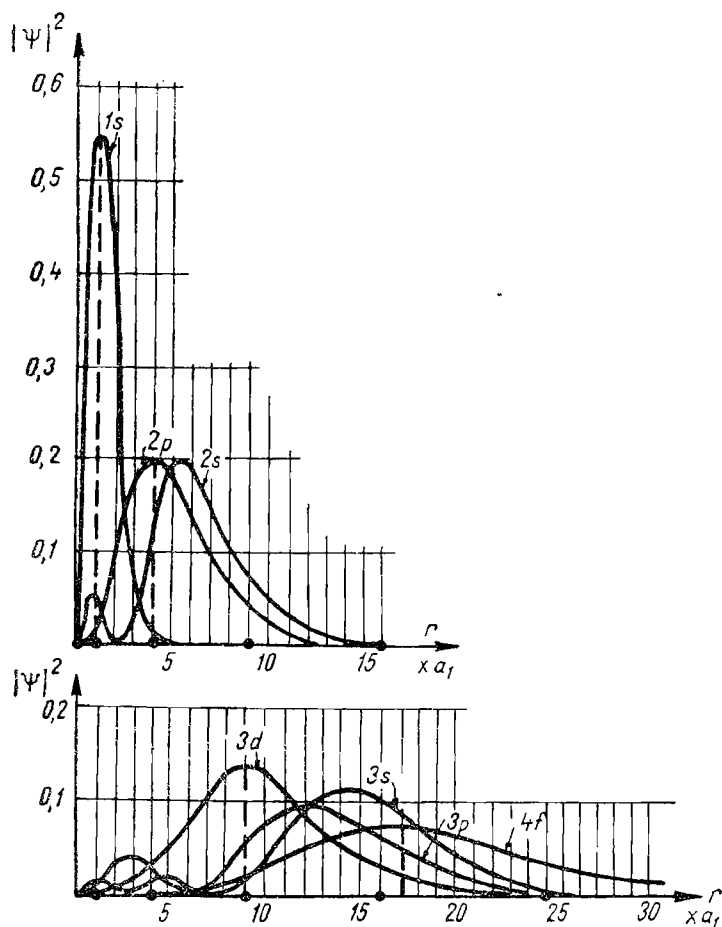


Fig. V.4.2

întregi și pozitive de la 0 la  $n - 1$ , conform cu valorile lui  $n_\varphi$  din modelul Bohr-Sommerfeld. Nu se mai regăsesc orbitele circulare sau eliptice din modelul Bohr-Sommerfeld deoarece în principiu mecanica cuantică nu cunoaște noțiunea de traiectorie. În schimb ea ne dă probabilitatea de a găsi electronul într-o anumită regiune din preajma nucleului  $|\psi_{nim}|^2$ . Graficele dependenței  $|\psi|^2$  de distanța  $r$  de la nucleu sînt date în fig. V.4.2. Se poate vedea că electronul în oricare din stările posibile se poate găsi la diverse distanțe de nucleu, și deci nu putem vorbi de o traiectorie. În schimb pot fi remarcate maximele stărilor electronice  $1s, 2p, 3d, 4f$ , care coincid cu razele orbitelor Bohr. Aceste observații ne indică atît faptul că mecanica cuantică reobține toate datele verificate experimental ale teoriei Bohr-Sommerfeld dar că nu suferă de neajunsul teoriei clasice, fiind o teorie consecventă a fenomenelor microcosmice. Deoarece mișcarea electronului nu mai poate fi reprezentată printr-o traiectorie, forma grafică, a probabilității  $|\psi|^2$ , pentru o stare dată, a fost numită *orbital electronic*. Vorbim, astfel, nu de orbitele electronice ( $R_n$ ), ci de *orbi-*



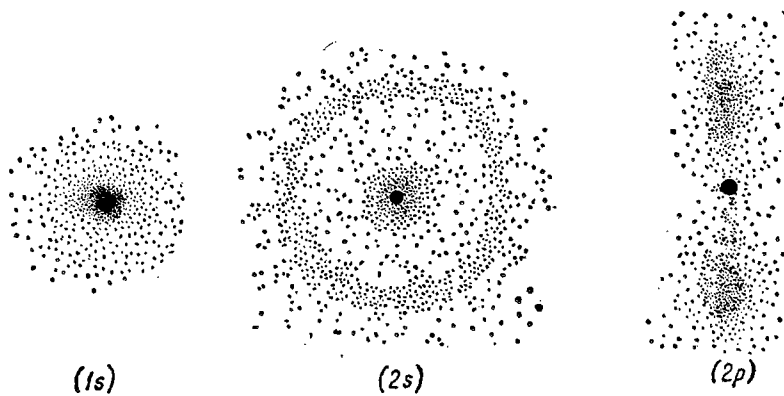


Fig. V.4.3

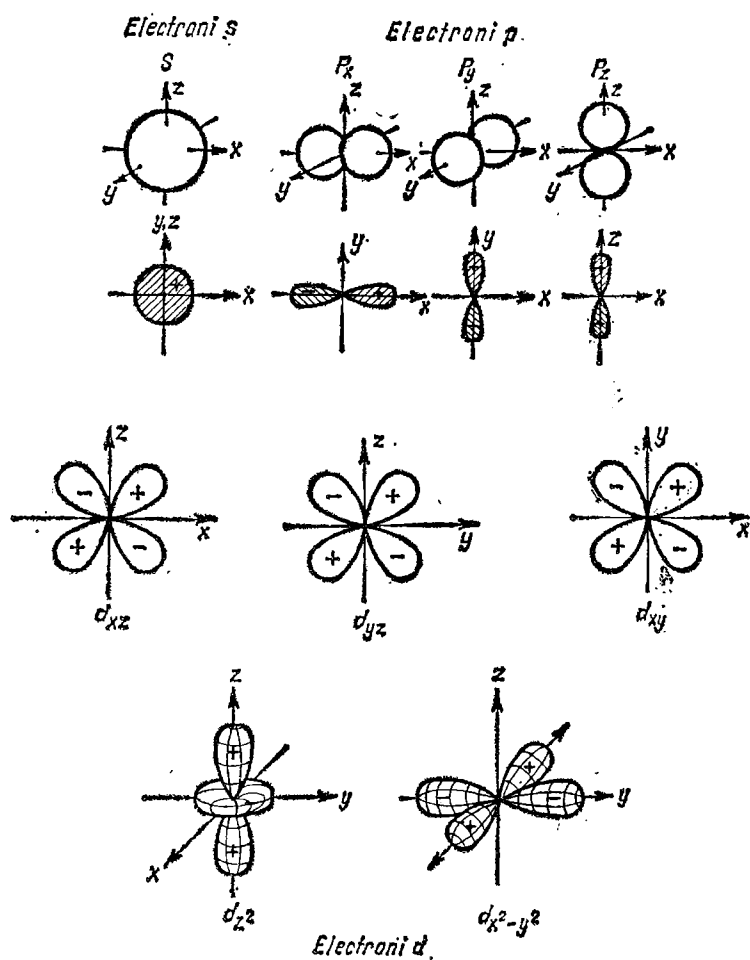


Fig. V.4.4

*talii electronici* ( $|\psi|^2$ ). Pe lângă modul în care au fost reprezentați în fig. 4.2 (care se numește *distribuție radială*), orbitalii se pot reprezenta și sub formă de „*nor electronic*” sau de figuri geometrice plane sau spațiale care să urmeze suprafețele de egală probabilitate de găsim a electronilor (fig. V.4.3, respectiv V.4.4). Din toate aceste reprezentări ale orbitalilor electronici, ca și din forma analitică a funcțiilor de undă, rezultă că stările electronice de tip  $s$  ( $1s, 2s, 3s, \dots$ ) au totdeauna o simetrie sferică, pe cînd celelalte stări posedă orbitali cu direcții preferențiate, dependente de  $\theta$  sau  $\varphi$ . Astfel orbitalii  $p$  ( $l = 1$ ) pot avea trei direcții diferite, din care cauză au fost notați  $p_x, p_y, p_z$  (fig. V.4.4). Orbitalii  $d$  ( $l = 2$ ) sînt de asemenea dirijați, după cum se vede în figură, notațiile lor ( $d_{xz}, d_{yz}, d_{xy}, d_{z^2}, d_{x^2-y^2}$ ) referindu-se la forma analitică a lor. Notațiile cu  $+$  și  $-$  se referă la semnul funcției de undă  $\psi$  pentru regiunea respectivă.

Să analizăm în continuare semnificația cuantică a numerelor  $l$  și  $m$ .

## 4.2. MOMENTUL CINETIC ȘI MOMENTUL MAGNETIC AL ATOMULUI

Momentul cinetic (sau momentul impulsului), conform modelului Bohr-Sommerfeld, poate să ia numai valori întregi ale constantei lui Planck:  $1\hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$ . Mecanica cuantică prevede o mică modificare a acestei afirmații și anume, se arată că momentul cinetic trebuie să fie dat de expresia:

$$\vec{L} = \sqrt{l(l+1)} \hbar \cdot \vec{u}_l, \quad (4.4)$$

unde  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ , numărul cuantic al momentului cinetic,  $\vec{u}_l$  — versorul momentului cinetic. În acest fel, electronii  $s, p, d, f, \dots$  vor avea momente cinetice diferite și egale cu  $0\hbar, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \sqrt{12}\hbar, \dots$ . Apar astfel două deosebiri principale față de modelul Bohr-Sommerfeld. Valorile momentelor cinetice nu sînt un număr întreg de  $\hbar$  decît pentru valori  $l \gg 1$ . A doua deosebire este extrem de importantă și anume că electronii  $s$  ( $l = 0$ ) au moment cinetic nul. Acest lucru este în contradicție totală cu imaginea clasică pe care o avem în legătură cu mișcarea electronului. Deoarece momentul cinetic clasic este dat de expresia  $rmv$ , el poate fi zero numai dacă  $r$  sau  $v$  sînt zero. Clasic nu putem accepta nici unul ca fiind zero. Încă o dată rezultă că concepțiile și noțiunile clasice nu se regăsesc la scară microcosmică. Această situație este foarte supărătoare. De aceea s-a căutat ca pe cît posibil să se găsească modele clasice care să fie însă exacte (conforme cu mecanica cuantică) în previziunile lor, într-un domeniu mai mult sau mai puțin restrîns de fenomene. Posedînd un astfel de „dicționar” clasic-cuantic, putem formula și rezolva problemele clasice, iar apoi le „traducem” cuantic cu ajutorul „dicționarului”. Unul din punctele importante ale dicționarului clasic-cuantic îl constituie relația (4.4).

Pentru a proceda corect cuantic, peste tot unde apare momentul cinetic clasic vom folosi relația (4.4). Ca exemplu vom studia momentul magnetic al atomului. Pentru început vom raționa clasic iar apoi vom traduce rezultatele în limbaj cuantic.

Să revenim la modelul planetar al atomului. Deoarece electronul este în mișcare în jurul nucleului el va crea un cîmp magnetic, deoarece orice sarcină în mișcare este echivalentă cu un curent. Mișcarea circulară a electronului

va fi asimilată cu o spiră a unei bobine, pentru care se definește momentul magnetic  $\vec{\mu}$ :

$$|\vec{\mu}| = S \cdot i = \pi r^2 \cdot i, \quad (4.5)$$

ca produs dintre aria închisă de spiră ( $S$ ) și curentul care circulă prin spiră ( $i$ );  $r$  — raza spirei. În cazul nostru  $r$  va fi raza Bohr (2.5) a orbitei electronice, curentul electric  $i$  fiind dat de:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{v}{2\pi r} e, \quad (4.6)$$

adică, un electron care se mișcă cu viteza  $v$  pe o orbită de rază  $r$  va trece, printr-un punct dat al traiectoriei, de  $v/2\pi r$  ori în unitatea de timp. Din (4.5) și (4.6) rezultă:

$$|\vec{\mu}| = \frac{evr}{2} = \frac{emvr}{2m} = \frac{e}{2m} |\vec{L}|, \quad (4.7)$$

deoarece  $|\vec{L}| = mvr$  este momentul cinetic pentru mișcarea circulară. Momentul magnetic este un vector coliniar cu momentul cinetic (paralel sau antiparalel, depinzând de semnul sarcinii) și deci perpendicular pe planul orbitei electronice:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}. \quad (4.8)$$

Acesta este rezultatul clasic pentru mișcarea de revoluție a electronului în jurul nucleului. „Dicționarul clasic-cuantic” ne dă însă expresia pentru  $\vec{L}$  în (4.4), de unde:

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} \vec{u}_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \vec{u}_l \quad (4.9)$$

care ține cont de cuantificarea momentului cinetic și care concordă perfect cu datele experimentale. Valoarea constantă  $\mu_B = e\hbar/2m$  se numește *magnetonul Bohr* și reprezintă unitatea de moment magnetic, care se dovedește, la rîndul lui, cuantificat ( $\mu_B = 9,273 \cdot 10^{-24} A \cdot m^2$ ). Această mărime a fost introdusă și de fizicianul român Șt. Procopiu, independent de N. Bohr.

Iată deci că momentul magnetic al mișcării orbitale electronice, depinde de asemenea de numărul cuantic  $l$ . Se vede ușor că electronii  $s$  ( $l = 0$ ) au moment magnetic nul conform mecanicii cuantice.

Să folosim aceeași metodă, ca mai sus, pentru a vedea ce se întâmplă cu un atom de hidrogen într-un câmp magnetic de intensitate  $\vec{H}$ .

Ca urmare a existenței momentului magnetic, întregul atom, ca un mic magnet, va căuta să se orienteze. Tot din electricitate știm că energia unui moment magnetic, în câmp magnetic este:

$$\Delta W_m = -\vec{\mu} \vec{H} = -\mu H \cos \theta, \quad (4.10)$$

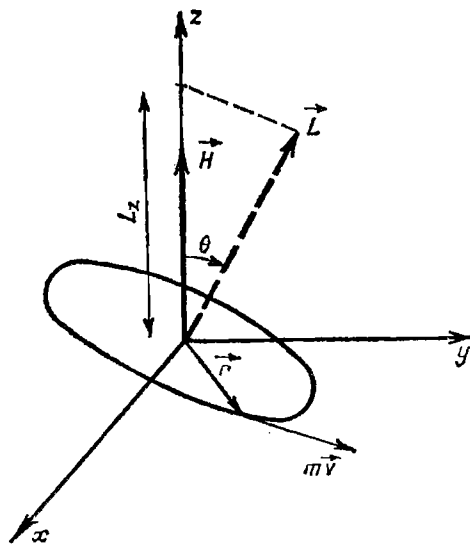


Fig. V.4.5

unde  $\theta$  este unghiul dintre direcția cîmpului magnetic și direcția momentului magnetic. Ne așteptăm ca energia atomului în cîmp să fie cuantificată în virtutea celor cunoscute pînă acum. Acest lucru se dovedește a fi corect, deoarece  $\theta$  nu poate lua orice valori, ci numai anumite valori. Deoarece  $\theta$  este al treilea grad de libertate (primele două fiind  $r$  și  $\varphi$ ) și el va trebui să fie cuantificat. *Cuantificarea spațială*, introdusă de către Sommerfeld, este astfel regăsită în mecanica cuantică. Cuantificarea spațială se exprimă prin cerința ca *proiecția momentului cinetic  $\vec{L}$  pe o direcție în spațiu să fie un număr întreg de  $\hbar$* :

$$L_z = |\vec{L}| \cos \theta = m\hbar, \quad (4.11)$$

în care am ales direcția de cuantificare axa  $Oz$ ,  $L_z$  — proiecția momentului cinetic  $\vec{L}$ , iar  $m$  — numărul cuantic al proiecției momentului cinetic (sau număr cuantic magnetic) (fig. V.4.5). Din (4.11) și (4.4) rezultă

$$\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (4.12)$$

Deoarece:  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ,  $m$  poate lua toate valorile întregi cuprinse între  $-l$  și  $l$ :  $m = l, l-1, l-2, \dots, 0, \dots, -l+1, -l$ .

Numărul de valori pe care poată să-l ia  $m$  este egal cu  $(2l+1)$  și deci vor exista  $(2l+1)$  direcții de orientare spațială pentru momentul cinetic orbital, respectiv pentru planul orbital electronic. Consecvent cuantic vom spune că există  $2l+1$  stări electronice (orbitale), pentru o valoare dată a lui  $n$  și  $l$ . Astfel pentru  $l=0$ , există numai orbitalul  $\psi_{100}$ , pentru  $l=1$  vor exista  $2l+1=3$  orbitale:  $\psi_{211}, \psi_{210}, \psi_{21-1}$  ș.a.m.d. (vezi tabelul V. 8). În fig. V.4.4

TABELUL V.8

$n$	$l$	$m$	stare electronică	orbital	$2l + 1$
1	0	0	1 s	100	1
2	0	0	2 s	200	1
	1	1	2 $p_x$	211	3
		-1	2 $p_y$	21-1	
		0	2 $p_z$	210	
3	0	0	3 s	300	1
	1	1	3 $p_x$	311	3
		-1	3 $p_y$	31-1	
		0	3 $p_z$	310	
	2	0	3 $d_{x^2-y^2}$	320	5
		1	3 $d_{xz}$	321	
		-1	3 $d_{yz}$	32-1	
		2	3 $d_{x^2}$	322	
		-2	3 $d_{y^2}$	32-2	

ele sînt reprezentate grafic. Revenind la energia unui atom de hidrogen în cîmp magnetic (4.10), vom putea scrie ținînd cont de (4.12) și de (4.9):

$$\Delta W_m = -\mu_B m H, \quad (4.13)$$

deci un atom care se găsește în cîmp magnetic va avea energia

$$E = E_n + \Delta W_m. \quad (4.14)$$

ceea ce înseamnă că în loc de un singur nivel de energie vor exista  $2l + 1$  nivele de energie. Se spune că în cîmp magnetic nivelele se despică în  $2l + 1$  subnivele magnetice, a căror energie este determinată de numărul cuantic  $m$  (de unde și denumirea de număr cuantic magnetic). Cele  $2l + 1$  subnivele sînt echidistante energetic și conduc la așa-numitul *efect Zeeman*. Acest efect constă în desfacerea liniilor spectrale emise de atomii așezați în cîmp magnetic. El este rezultatul despicării nivelelor. Ca exemplu să luăm linia spectrală care rezultă în urma trecerii electronului atomului de hidrogen de pe nivelul  $n = 2$  ( $l=1$ ) pe nivelul  $n = 1$  ( $l = 0$ ) (fig. V.4.6). Se vede că în locul unei singure linii spectrale apar trei linii spectrale corespunzător celor trei orientări posibile ale orbitelor în cîmp magnetic. În lipsa cîmpului magnetic electronul  $2p$  se poate găsi în oricare din cele trei orbitale posibile, ele nediferențiindu-se între ele energetic. Ne reamintim că acest lucru se numește degenerare. Tranziția studiată  $2p \rightarrow 1s$ , corespunde la  $13,6 - 3,4 = 10,2$  eV, adică  $= 2,47 \cdot 10^{15}$  Hz sau  $\lambda = 1,22 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ ; pentru un cîmp magnetic de  $5 \cdot 10^4 \text{ Oe}$ ,  $\Delta W = 4,64 \cdot 10^{-8}$  eV sau  $\Delta \nu = 7 \cdot 10^{10}$  Hz, ceea ce corespunde la  $\Delta \lambda = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$ .

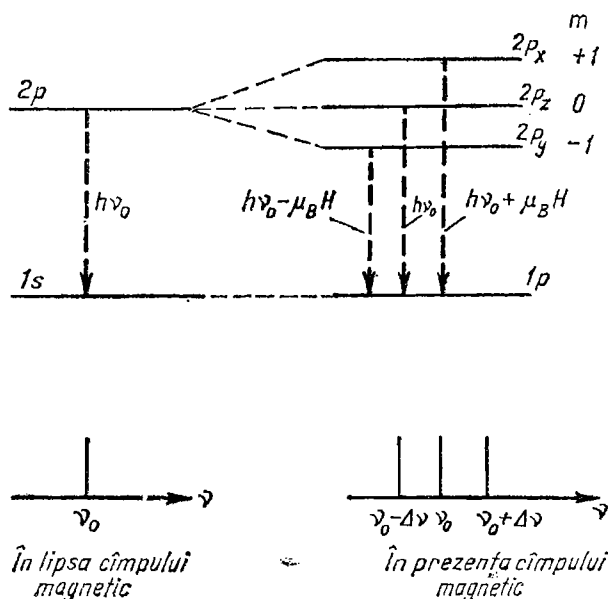


Fig. V.4.6

Experiențe executate cu spectroscopice optice de mare putere de rezoluție au arătat că previziunile despicărilor produse de câmpul magnetic sînt corecte. Deoarece  $\mu_B = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,273 \cdot 10^{-9} \text{ eV/Oe}$ , despicarea exprimată în  $\Delta \nu$  va fi  $1,4 \cdot 10^8 \text{ Hz}$  pentru fiecare oersted.

### 4.3. SPINUL ELECTRONULUI

Spectroscopia optică folosită foarte des pentru verificarea modelelor atomice inclusiv a previziunilor mecanicii cuantice, a pus în evidență faptul că liniile spectrale ale hidrogenului nu sînt în realitate simple, ci, dacă se analizează cu aparate foarte bune, se constată că sînt despicate, respectiv tranziția mai sus discutată,  $2p \rightarrow 1s$ , este compusă din două linii extrem de apropiate. Acest lucru se poate produce în principiu numai dacă asupra electronului acționează un câmp magnetic. Dar cum din exterior nu este aplicat nici un câmp, trebuie să existe câmpuri interne care să provoace despicarea. Imediat ne fuge gîndul la câmpul magnetic creat de electron în mișcarea orbitală. Dar am văzut că acest câmp provoacă o despicare numai dacă interacționează cu un alt câmp. Originea câmpului suplimentar era necunoscută. În 1925 Uhlenbeck și Goudsmit au făcut supoziția că acest câmp își are originea în însăși natura electronului. Ei au presupus că electronul se învîrtește în jurul lui (mișcare de rotație) fiind încărcat cu sarcină electrică generează un câmp magnetic propriu analog celui produs prin rotația lui în jurul nucleului. Momentul cinetic corespunzător rotației electronului în jurul axei proprii a fost denumit *spin electronic*. Spinul electronului este o proprietate intrinsecă a electronului. Ca mărime fizică, spinul este *momentul cinetic propriu al electronului*, pe care-l vom nota cu  $\vec{s}$ . Asociat lui vom avea momentul magnetic de spin  $\vec{\mu}_s$ . Acest moment magnetic

de spin interacționează cu câmpul magnetic al mișcării orbitale și duce la despicarea nivelelor de energie ale atomului. Fenomenul de *interacție spin-orbită* (cum se mai numește) joacă un rol deosebit de important în înțelegerea atomului și produce despicarea numită *structură fină*.

Deoarece este tot un moment cinetic, ne așteptăm ca el să fie descris cuantic printr-o relație analogă cu (4.4), dar în care să intervină un alt număr cuantic ( $s$ ):

$$\vec{s} = \sqrt{s(s+1)} \hbar \vec{u}_s, \quad (4.15)$$

$\vec{u}_s$  versorul spinului. Nu cunoaștem care este valoarea lui  $s$ , dar experiența arată că este invariabil. Putem determina valoarea lui deoarece, cum am discutat la efectul Zeeman, despicarea se va face în  $2s+1$  nivele energetice. Cum experiența dă o despicare dublă (dublet spectral), rezultă

$$2s + 1 = 2 \rightarrow s = \frac{1}{2}. \quad (4.16)$$

Pare de necrezut ca un număr cuantic să nu fie întreg, dar experiența este mult prea sigură pentru a avea îndoieli. Concluzia este că electronul posedă un moment cinetic intrinsec, dat de relația (4.15), în care  $s = 1/2$ . Se introduce astfel al patrulea număr cuantic, deoarece rotația electronului este un al patrulea grad de libertate în mișcarea electronului în atom.

Putem spune acum că acest moment cinetic propriu, ca și cel orbital, va avea proiecții cuantificate față de o direcție exterioară (de exemplu câmpul magnetic orbital) ceea ce conduce la  $2s + 1 = 2$  orientări posibile și deci la introducerea celui de al cincilea număr cuantic: numărul cuantic al proiecției spinului  $m_s$ ,

$$s_z = |\vec{s}| \cos \alpha = m_s \hbar \quad m_s = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$

În fine, momentul magnetic de spin, analog cu (4.7), trebuie să fie

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{2m} \vec{s}. \quad (4.18)$$

Experiența confirmă corectitudinea relațiilor (4.15), (4.16), (4.17), dar o infirmă pe (4.8) care, conform experienței, trebuie să fie:

$$|\vec{\mu}_s| = 2 \cdot \frac{e}{2m} |\vec{s}| = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)} = g_s \cdot \mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad (4.19)$$

unde  $g_s = 2$  se numește *raport giromagnetic*; momentul magnetic de spin este de două ori mai mare ca momentul magnetic orbital raportat la mărimea momentelor cinetice corespunzătoare. Această abatere de la previziunea făcută ne atrage din nou atenția că noțiunile clasice pe care le folosim nu sînt corecte la scara microscopică. De aceea fiecare afirmație trebuie verificată experimental înainte de a o folosi. Ca să dovedim încă o dată acest lucru să încer-

căm să calculăm care va trebui să fie viteza periferică a electronului pentru a produce un moment cinetic egal cu  $1/2 \hbar$ ? Scriind relațiile clasice pentru moment vom obține

$$\frac{1}{2} \hbar = mv \cdot r_0 \Rightarrow v = \frac{\hbar}{2mr_0}$$

$r_0$  = raza electronului acceptată în prezent =  $2,8 \cdot 10^{-15}$  m conduce la  $v \simeq \simeq 2 \cdot 10^{10}$  m/s, deci de circa 66 ori mai mare ca viteza luminii! Ori teoria relativității dovedește că vitezele nu pot depăși valoarea  $c$ . Iată cum ideea clasică, inițială, a electronului rotitor cade, lăsând în urma ei o mare necunoscută. Iarăși, încercarea de a înțelege un fenomen cuantic într-un mod clasic a dat greș. Spinul electronic este de origine pur cuantică și de aceea el nu are un analog clasic. Ne întrebăm fără să vrem: și cum se mișcă atunci electronul pentru a da naștere unui astfel de moment cinetic? Nu putem ști deoarece întrebarea nu este corect pusă: cunoașterea mișcării de rotație a electronului presupune o incertitudine în rază de cel mult  $\Delta x = \frac{r_0}{2}$ . Atunci, conform relației lui Heisenberg (3.19),

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x} \simeq 4 \cdot 10^{10} \text{ m/s}$$

și deci incertitudinea în cunoașterea vitezei este dublă față de viteza însăși și deci *nu putem* ști cu ce viteză se mișcă electronul în jurul lui. Cu alte cuvinte întrebarea nu poate avea un răspuns, oricât de neplăcută ar fi această situație.

#### 4.4. MOMENTUL CINETIC TOTAL AL ATOMULUI

Nu putem încheia acest capitol fără a aminti că existența momentului cinetic de spin, prin intermediul interacției spin-orbită, condiționează poziția reciprocă a spinului și a momentului cinetic orbital. Putem spune că, în câmpul magnetic orbital momentul magnetic de spin electronic nu poate avea decât două orientări: paralel sau antiparalel, ceea ce conduce la orientarea paralelă sau antiparalelă a momentelor cinetice. Din această cauză aceste momente cinetice se adună sau se scad, dând naștere unui *moment cinetic total* al ato-

mului, pe care-l notăm cu  $\vec{j}$  (adunarea se face vectorial):

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (4.20)$$

$$l = \begin{vmatrix} s & p & d & f \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$j = \begin{vmatrix} 1/2 & \frac{3}{2}; \frac{1}{2} & \frac{5}{2}; \frac{3}{2} & \frac{7}{2}; \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$



Conform regulii generale, momentul total va fi cuantificat:

$$\vec{j} = \sqrt{j(j+1)} \hbar \vec{u}_j, \quad (4.21)$$

unde  $j$  este numărul cuantic al momentului cinetic total, care depinde de numerele cuantice  $l$  și  $s$ , putînd lua doar două valori:

$$j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (4.22)$$

pentru cele două orientări reciproce ale spinului și momentului cinetic orbital.

Momentul cinetic total este fundamental pentru atom, el fiind caracteristic unui atom într-o stare oarecare. Despicarea nivelelor, determinată de interacția spin-orbită, face ca energia nivelelor să depindă atît de  $n$  cît și de  $l$ . Pentru  $l = 0$  momentul magnetic orbital este nul, interacția spin-orbită este nulă și deci electronii  $s$  au energia dată de relația Bohr (4.3). Pentru electronii aflați în alte stări,  $p, d, f, \dots$ , pe lîngă termenul (4.3) se mai adaugă o corecție datorită energiei de interacție spin-orbită, corecție care va depinde de  $l$ , respectiv de  $j$ .

Stările electronice ale atomului de hidrogen vor fi atunci astfel: fiecare stare cu un  $l$  dat va fi compusă din două nivele foarte apropiate energetic.

## 5. Atomul cu mai mulți electroni

### 5.1. MODELUL PĂTURILOR ELECTRONICE

Asupra unui electron oarecare din atom acționează simultan: cu forțe de atracție nucleul, iar cu forțe de respingere restul de electroni. O aproximație a mișcării se poate obține dacă se presupune că toți electronii care au orbite interioare orbitei electronului discutat acționează prin micșorarea forței de atracție a nucleului, cu alte cuvinte conduc la o *ecranare*. Dacă avem spre exemplu în interior  $n$  electroni, al  $(n + 1)$ -lea electron va simți o forță de atracție din partea nucleului de sarcină aproximativă  $Z'e = Ze - ne = (Z - n)e$ , unde  $Ze$  este sarcina nucleului. Electronii din exteriorul celui de al  $(n + 1)$ -lea electron, acționează cu o forță nulă (și deci nu trebuie luați în considerație) conform legilor electrostaticii (câmpul electric în interiorul unei incinte metalice este nul indiferent de sarcina de pe suprafață, presupusă uniform distribuită). În felul acesta electronul cel mai apropiat de nucleu va „simți” nucleul ca având sarcina  $Ze$ , al doilea ca având sarcina  $(Z - 1)e$ , al treilea  $(Z - 2)e$  ș.a.m.d. Pentru a vedea cum sînt distribuiți electronii într-un atom vom determina experimental energia necesară scoaterii (ionizării) rînd pe rînd a celor  $Z$  electroni începînd cu cei exteriori. Se obțin astfel potențialele de ionizare succesivă a atomului, pe care le vom nota cu  $I_1 < I_2 < I_3 < \dots < I_k < \dots < I_Z$ . Deoarece pentru un model planetar energiile electronilor sînt date de relația:

$$W = - \frac{Z'e^2 K}{2r}, \quad (5.1)$$

energiile de ionizare succesivă vor fi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = -W_1 = \frac{[Z - (Z - 1)]e^2 K}{2r_1} = \frac{e^2 K}{2r_1} \\ I_2 = -W_2 = \frac{[Z - (Z - 2)]e^2 K}{2r_2} = \frac{2e^2 K}{2r_2} \\ \dots \dots \dots \\ I_n = -W_n = \frac{[Z - (Z - n)]e^2 K}{2r_n} = \frac{ne^2 K}{2r_n} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (5.2)$$

de unde rezultă că distanțele  $r_n$  vor fi calculabile (în aproximația ecranării mai sus discutate), după relația:

$$r_n = \frac{ne^2 K}{2I_n} \sim \frac{n}{I_n}. \quad (5.3)$$

În tabelul următor (tabelul V.9) sînt date valorile experimentale ale acestor potențiale succesive de ionizare în eV pentru cîteva elemente:

TABELUL V.9

Atom	Z	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$
H	1	13,60	—						
He	2	24,47	54,14	—					
Li	3	5,36	75,26	121,84	—				
Be	4	9,28	18,12	153,11	216,63	—			
B	5	8,25	25,00	37,74	258,03	338,53	—		
C	6	11,20	24,26	47,64	64,17	390,02	487,55	—	
N	7	14,46	29,44	47,20	72,04	97,40	549,08	663,73	—
O	8	13,55	34,94	54,63	77,03	113,30	137,42	735,22	867,09

În tabelul V.10 sînt date calculele concrete pentru  $r_n$  folosind relația (5.3) cu valorile din tabelul V.9.

TABELUL V.10

	Z	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$
H	1	0,529	—						
He	2	0,284	0,272	—					
Li	3	1,340	0,191	0,177	—				
Be	4	0,775	0,795	0,141	0,133	—			
B	5	0,873	0,575	0,573	0,111	0,107	—		
C	6	0,642	0,593	0,453	0,449	0,0925	0,0886	—	
N	7	0,497	0,488	0,457	0,400	0,370	0,0787	0,0760	—
O	8	0,530	0,412	0,395	0,374	0,318	0,314	0,0685	0,0665

După cum se poate observa din tabelul V.9 există o bruscă scădere a energiei de ionizare la toate elementele, pentru al treilea electron (începînd numărarea de la nucleu). Dar mai clar rezultă din tabelul V.10 că primii doi electroni au valori foarte apropiate pentru razele orbitelor electronice.

Dacă comparăm în continuare, vedem că următorii electroni au de asemenea raze orbitale foarte apropiate ș.a.m.d. Există astfel la atomii multielelectronici tendința de împerechere a electronilor de pe o orbită dată. Razele orbitale calculate mai sus, determină acele stări staționare care sînt permise pentru electroni. Se pare deci, că într-o astfel de stare staționară, nu pot exista mai mult de doi electroni. Deoarece acest fapt experimental se regăsește la toți atomii, se trage concluzia că reprezintă un fenomen general. El a fost formulat sub

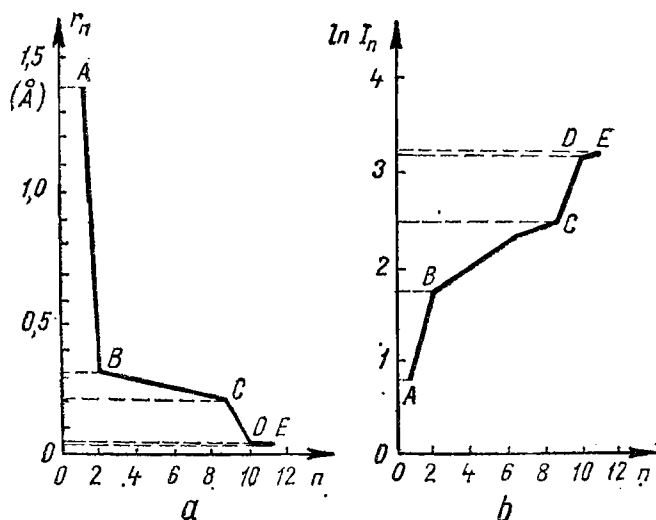


Fig. V.5.1

formă de principiu de către W. Pauli și a fost denumit *principiul de exclusiune*. Acest principiu spune că pe o orbită dată, nu pot exista mai mult de doi electroni cu spin antiparalel. Principiul acesta se poate regăsi pe cale teoretică în mecanica-cuantică. În fig. V.5.1 au fost reprezentate valorile lui  $I_n$  și  $n/I_n$  pentru atomul de sodiu ( $Z = 11$ ). Electronul cel mai îndepărtat de nucleu (A), are  $r = 1,4 \text{ Å}$ , pe cînd următorii opt electroni (de la B la C) au razele orbitale cuprinse între  $0,22$  și  $0,32 \text{ Å}$ ; cei doi electroni care urmează (D — E) au raza  $\sim 0,05 \text{ Å}$ . Se constată astfel că electronii în atom nu se aranjează în mod uniform, ci se grupează în *pături electronice*.

Spectrele optice ale atomilor cu mai mulți electroni, prezintă unele asemănări cu spectrele optice ale hidrogenului (cu toate că se complică). Astfel, se păstrează caracterul discret al liniilor spectrale, ceea ce corespunde existenței nivelelor de energie cuantificate; se pot deduce empiric pozițiile (frecvențele) liniilor spectrale folosind o relație empirică de tip Balmer, modificînd în mod corespunzător pe  $Z$  și  $n$ , ținînd cont de efectul de ecranare, respectiv de energia de interacțiune interelectronică. În acest caz însă, atît sarcina nucleară ecranată cît și numărul cuantic principal „efectiv“, nu vor mai fi numere întregi. Calculul concret și exact al nivelelor de energie devine o problemă deosebit de complicată care nu poate fi rezolvată decît în cadrul mecanicii cuantice. Dacă însă nu ne interesează valoarea precisă a nivelelor energetice, putem „construi“ atomul doar pe baza observațiilor de mai sus. Pentru aceasta, vom porni de la un nucleu de sarcină  $Ze$  (pentru concretizare vom lua cazul atomului de sodiu cu  $Z = 11$ ) și vom completa treptat învelișul electronic, cu electroni aduși de la infinit. Vom ține cont în continuare de tabelul V.8. Primul electron se va așeza pe nivelul cel mai de jos energetic. Numerele cuantice care vor descrie starea acestui electron, vor fi  $n = 1, l = 0, m = 0$ , proiecția spinului rămînd arbitrară. Al doilea electron adus, se va putea așeza tot pe starea descrisă de numerele cuantice  $n = 1, l = 0, m = 0$ , dar, obligatoriu acum, spinii celor doi electroni trebuie să fie antiparaleli, deci vor avea

$m_s = +1/2$ , respectiv  $m_s = -1/2$ . Al treilea electron, din cauza principiului lui Pauli, se va putea așeza doar pe nivelul cu  $n = 2$ . Pe acest nivel electronul va putea să aibă  $l = 0$  sau  $l = 1$ . S-a stabilit că cea mai joasă stare energetică se va obține pentru  $l = 0$ . În acest caz,  $m = 0$  și  $m_s$  rămâne arbitrar. Al patrulea electron va avea  $n = 2$ ,  $l = 0$  și va avea spinul antiparalel cu al treilea, formînd o a doua pereche. Din aproape în aproape vom putea astfel aranja toți electronii atomului. Știind că pentru fiecare  $n$  pot exista  $n$  valori pentru  $l$ , că pentru fiecare  $l$  pot exista  $2l + 1$  posibilități de orientare spațială și că pentru fiecare  $m$  există două orientări posibile pentru spin, rezultă că numărul maxim de electroni care se pot găsi pe un nivel cu un  $n$  dat va fi:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2. \quad (5.4)$$

Modul în care am procedat mai sus, se poate aplica la orice număr de electroni, obținîndu-se structurile indicate în tabelul V.11

TABELUL V.11

$n$	Pătura	Orbitalul	Numărul de valori pentru $m$ : $2l + 1$	Numărul de orientări pentru spin $2s + 1$	Numărul de electroni pentru	
					$l$ dat	$n$ dat
1	K	1s	1	2	2	2
2	L	2s	1	2	2	8
		2p	3	2	6	
3	M	3s	1	2	2	18
		3p	3	2	6	
		3d	5	2	10	
4	N	4s	1	2	2	32
		4p	3	2	6	
		4d	5	2	10	
		4f	7	2	14	

Se numește o *pătură*, totalitatea electronilor care posedă un  $n$  dat. Se numește *configurație electronică*, totalitatea electronilor unui atom, cu specificarea aranjărilor pe pături. În tabelul V.12 sînt date configurațiile electronice ale unor atomi. Numărul de electroni cu aceiași  $n$  și  $l$  din atomul respectiv, se dă printr-un indice.

Tabelul V.12

H	1s
He	(1s) <sup>2</sup>
Li	(1s) <sup>2</sup> 2s
Be	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup>
B	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> 2p
C	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>2</sup>
N	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>3</sup>
O	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>4</sup>
F	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>5</sup>
Ne	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup>
Na	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup> 3s
.....	.....

Principiul lui Pauli împiedică așezarea tuturor electronilor pe nivelul energetic cel mai scăzut, repartizîndu-i treptat pe nivele energetice tot mai ridicate.

Deoarece energia orbitalului electronic depinde nu numai de interacțiunea cu nucleul ci și de interacțiunea cu ceilalți electroni, succesiunea orbitalilor în ordinea creșterii energiei lor, nu va urmări riguros completarea s, p, d, f, ... Abaterile de la această succesiune, vor fi tot mai dese la atomii cu mulți electroni.

Din această cauză este necesară determinarea experimentală a succesiunii orbitalelor, respectiv determinarea configurației electronice reale. Acest lucru se realizează studiind spectrele optice și de radiații X ale atomilor multielectronici.

## 5.2. RADIAȚIA EMISĂ DE ATOMII MULTIELECTRONICI

Ca și în cazul hidrogenului, emisia de radiație se va petrece în momentul tranziției unui electron al atomului de pe o stare staționară pe alta. Din cauza acțiunii principiului de excluziune, pentru ca o tranziție să poată avea loc, trebuie ca nivelul pe care pleacă electronul să fie liber, cu alte cuvinte să nu aibă numărul maxim de electroni posibili.

Să presupunem că dăm treptat, tot mai multă energie unui atom, sub o formă oarecare (iluminare, încălzire, bombardare cu particule), și căutăm să excităm atomul. Atunci, vor fi excitați întâi electronii cei mai slab legați (electronii exteriori, cei mai îndepărtați de nucleu), apoi pe măsura creșterii energiei se vor putea excita nivelele energetice tot mai profunde, mai apropiate de nucleu, concomitent putându-se și ioniza atomul. Excitarea va consta în ridicarea electronului pe un nivel liber sau parțial ocupat, energetic superior. În condiții normale, excitarea prin metode termice sau luminoase, pune la dispoziție energii de ordinul electronvolților (energia medie de agitație termică pentru o temperatură de 3000 °K este doar de 0,25 eV, iar cuanta de lumină ce are  $\lambda = 3000 \text{ \AA}$ , are o energie de 4,1 eV). Aceste energii sînt suficiente pentru a excita electronii exteriori ai atomului, deoarece pentru aceștia diferențele de energie între orbite sînt de acest ordin de mărime. Din această cauză acești electroni au fost denumiți *electroni optici*. Ei sînt responsabili de emisia radiației luminoase pentru toate sursele de lumină obișnuite (luminare, bec electric, arc electric etc.). Dacă însă, furnizăm atomului o energie mult mai mare, de ordinul a  $10^3$ – $10^5$  eV, atunci pe lîngă procese de ionizare vom avea și procese de excitare a electronilor profunzi, de lîngă nucleu. Într-un astfel de caz, plecarea unui electron se va solda cu emisia mai multor linii spectrale, deoarece electronii de pe nivelele superioare vor cădea pe nivelele inferioare necomplete. Radiațiile emise în aceste cazuri, au energii foarte mari, lungimi de undă foarte mici ( $\sim 0,1 \text{ \AA}$ ) și se numesc *radiații X caracteristice*. Spectrul radiației X emis de către un atom, este compus din totalitatea tranzițiilor posibile ale electronilor interiori. Din această cauză, structura electronică internă a atomilor multielectronici poate fi studiată cu ajutorul spectrului de emisie sau de absorbție a radiației X. S-a putut astfel verifica experimental că structura internă, electronică, a tuturor atomilor este foarte asemănătoare. Studiind spectrele de radiații X, Moseley a arătat (1913) că valorile frecvențelor liniilor emise de atomi pot fi calculate după o formulă de tip Balmer:

$$\nu = R c (Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (5.5)$$

unde  $\nu$  este frecvența liniei spectrale,  $R$  — constanta lui Rydberg,  $c$  — viteza luminii,  $Z$  — sarcina nucleului,  $\sigma$  — constanta de ecranare,  $n$ ,  $m$  — numere întregi ( $n < m$ ).

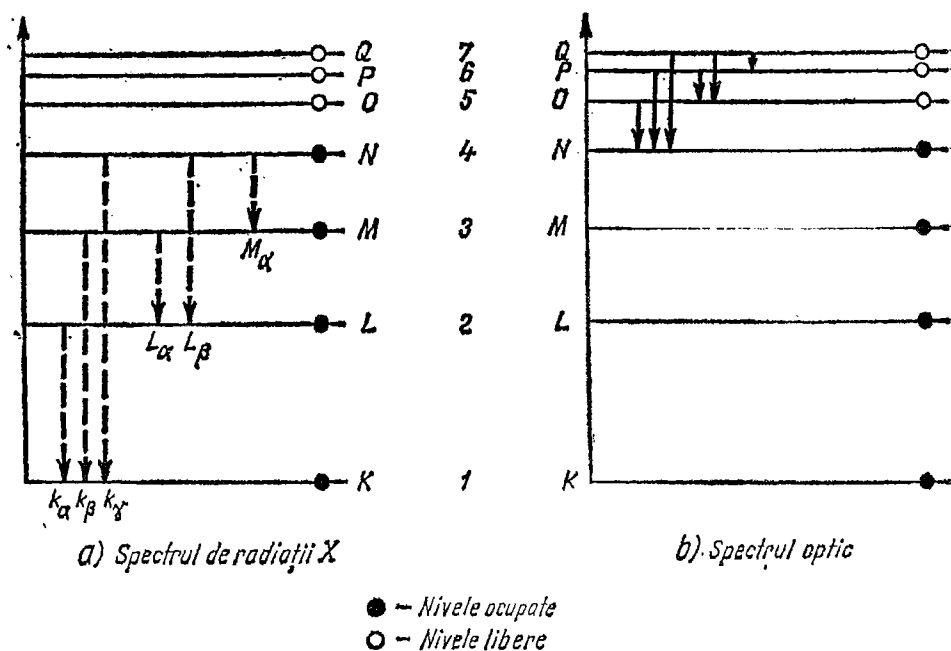


Fig. V.5.2

În fig. V.5.2 *a* și *b* sînt reprezentate comparativ, mecanismele de obținere a spectrelor luminoase și de radiații X. Diferențele apar în primul rînd în valorile frecvențelor emise, iar în al doilea rînd în electronul care este excitat.

Practic, excitarea atomilor, pentru a produce radiații X caracteristice, se face în tuburi speciale, vidate, în care electronii emiși de un filament incandescent, sînt accelerați la o diferență mare de potențial (10–100 keV) și cad pe anod (anticatod) unde este depusă substanța studiată.

Datorită energiei mari, radiațiile X pot străbate grosimi mari de substanță, deci au o mare putere de penetrație.

Pe lîngă radiațiile X caracteristice, se mai emit de către tuburile de radiații X și alte radiații de aceeași natură, dar care posedă un spectru energetic continuu. Ele poartă numele de *radiații X de frînare* deoarece au ca mecanism de emisie, radiația electromagnetică emisă de către orice sarcină în mișcare accelerată (sau frînată) conform prevederilor teoriei lui Maxwell. Dacă particulele frîmate sînt electroni accelerați la energia  $eV$ , atunci frecvența maximă a radiației X de frînare va fi dată de relația:

$$\nu_{\max} = eV/h \quad (5.6)$$

unde  $h$  este constanta lui Planck.

Radiațiile X produc diverse efecte la trecerea lor prin substanță. Astfel de efecte sînt: înnegrirea filmelor sau plăcilor fotografice, producerea de ioni ca urmare a ionizării atomilor mediului străbătut, provocarea luminescenței unor substanțe etc. Inobservabile cu ochiul liber, radiațiile X pot fi detectate cu ajutorul unuia din efectele mai sus amintite. În radiografiile

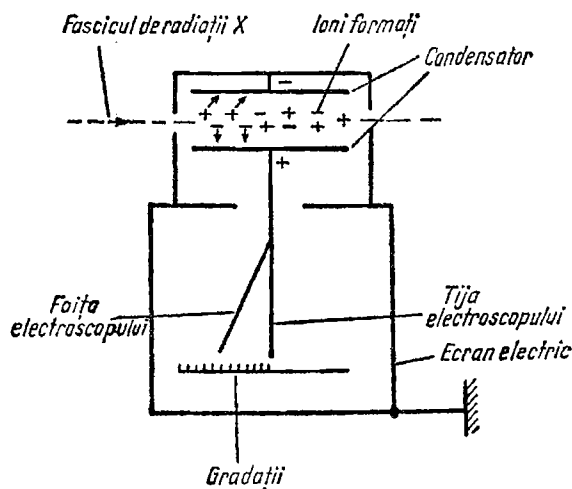


Fig. V.5.3

medicale sau industriale, se folosesc filme fotografice, sau ecrane luminescente. Ionizarea provocată de trecerea radiațiilor X prin materie, poate fi folosită pentru detectarea lor. Astfel un electroscoap cu foițe, dotat cu un condensator, va înregistra trecerea radiațiilor X deoarece ionii formați se vor deplasa către armăturile condensatorului (în prealabil încărcat), neutralizînd sarcina sa electrică, ceea ce va determina apropierea foițelor electroscoapului. Acest dispozitiv simplu de detectare se numește *cameră de ionizare* cu electroscoap (fig. V.5.3).

### 5.3. BAZELE FIZICE ALE SISTEMULUI PERIODIC AL ELEMENTELOR

Se poate observa din tabelul V.8 că imediat ce o pătură (toți electronii cu același  $n$ ) sau o subpătură (toți electronii cu același  $l$ ) se completează, sistemul capătă o stabilitate excepțional de ridicată, marcată printr-un maxim al energiei de ionizare. În acest tabel, s-a pus în evidență acest lucru, delimitînd completarea orbitalului  $1s$ . Se vede de exemplu că pentru heliu este nevoie de o energie de 24,47 eV pentru a scoate electronul de pe ultima orbită, pe cînd la litiu, ultimul electron poate fi scos numai cu 5,36 eV. Proprietățile atomilor vor fi asemănătoare, dacă numărul de electroni de pe pătura externă este același, deoarece atomii se deosebesc în principal prin configurația electronică a păturilor exterioare. Cum păturile se completează conform relației (5.4), rezultă că atomii cu număr de electroni egal cu 2, 10, 28, 60, ... vor avea pături complete, vor prezenta un maxim de stabilitate și vor avea proprietăți asemănătoare. Cei cu 1, 3, 11, 29, 61, ... electroni vor avea cîte un electron în plus față de o pătură completă și vor avea proprietăți asemănătoare ș.a.m.d. Rezultă de aci că trebuie să existe o periodicitate a proprietăților atomilor în funcție de numărul de electroni pe care-l conțin. Acest fapt a fost observat experimental și sistematizat de către D.I. Mendeleev (1869) sub forma tabelului sistemului periodic al elementelor. În acest tabel,



atomii au fost trecuți în ordinea crescândă a greutăților atomice relative, scoțându-se în evidență această proprietate de periodicitate. Sistemul periodic al elementelor (tabelul V.13) a jucat un rol însemnat în dezvoltarea fizicii și chimiei și a condus la descoperirea multor elemente, dând posibilitatea prevederii proprietăților lor fizico-chimice. Grupele din sistemul periodic conțin atomi cu același număr de electroni pe ultima orbită. Astfel grupa 1-a cuprinde toate elementele care posedă un electron pe ultima orbită: H, Li, Na, K, ... , grupa a 2-a cuprinde atomii care au doi electroni pe ultima orbită: Be, Mg, Ca, ... etc. Completarea păturilor se realizează la elementele din grupa a 8-a: He, Ne, Ar, Kr, Xe și Rn (gazele inerte). Perioadele cuprind, în serie, atomii care își completează treptat pătura externă. Începutul unei perioade noi corespunde începutului completării unei noi pături sau subpături. Din cele discutate anterior, începutul completării păturilor trebuie să corespundă atomilor cu  $Z = 1, 3, 11, 29, 60, \dots$  (completarea păturilor cu  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ). În realitate, cum arată tabloul periodic, completarea păturilor noi se face la atomii cu  $Z = 1, 3, 11, 19, 37, 55, 87, \dots$ . Această neconcordanță observată nu este greu de explicat și corespunde faptului că gruparea în pături se face după valorile energiilor nivelelor. Relația (5.4), folosită pentru determinarea atomilor cu pături complete, exprimă cazul simplificat în care se neglijează energia de interacțiune a electronilor între ei. Aceasta însă devine tot mai importantă pe măsură ce numărul de electroni crește, din care cauză, la atomii grei, formarea unei pături se face mai repede. Calculele efectuate pe baza mecanicii cuantice, concordă cu experiența și în acest caz.

O caracteristică chimică deosebit de importantă a atomilor este valența. Ea poate fi explicată satisfăcător numai pe baza teoriei cuantice a atomilor. Astfel, se știe că grupa 1-a conține atomi monovalenți, că grupa a 2-a conține atomi bivalenți etc. Cunoscând interpretarea atomică a grupelor tabloului periodic, putem trage concluzia că valența trebuie să fie legată de numărul de electroni care se găsesc pe ultima orbită atomică. Valența se manifestă prin cedarea sau captarea de electroni, de către un atom care vine în contact cu alt atom. Deoarece cel mai stabil atom, va fi cel care va conține pături complete, cedarea sau captarea de electroni în procesul de formare a moleculelor are ca scop alcătuirea unei configurații de pătură completă. Elementele grupelor 1, 2, 3, vor pierde ușor 1, 2, respectiv 3 electroni, pentru a rămâne cu o configurație de pătură completă. Din această cauză, ele se numesc *electropozitive*. În mod asemănător, elementele din grupele 5, 6, 7, câștigă (captează) cu multă ușurință 3, 2, respectiv un electron, pentru același motiv. Ele se numesc *electronegative*. Elementele din grupa a 8-a având configurația de pătură completă, posedă o stabilitate maximă și nici nu pierd, nici nu captează cu ușurință electroni. Ei sînt astfel inactivi chimic. Elementele din grupa a patra formează compuși cu caracter deosebit, punînd în comun cei patru electroni. Grupa a 4-a este grupă elementelor cu caracter semiconductor.

O reacție chimică se înțelege atunci ca un proces de ciocnire între atomi, în care are loc un transfer de electroni cu scopul formării configurațiilor de maximă stabilitate, în urma căreia atomii rămîn legați în formațiuni mai complexe denumite *molecule*.

Să luăm ca exemplu oxigenul care are configurația electronică  $(1s)^2(2s)^2(2p)^4$ . Pentru a forma configurația de maximă stabilitate  $(2p)^6$  el trebuie să capteze doi electroni. Să presupunem că aceștia provin de la doi atomi de hidrogen.

TABELUL V.13 Sistemul periodic al elementelor

Perioada	Grupa 1		Grupa 2		Grupa 3		Grupa 4		Grupa 5		Grupa 6		Grupa 7		Grupa 8		Grupa 0	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B				
1		H 1															He 2	
2		Li 3		Be 4		B 5		C 6		N 7		O 8		F 9			Ne 10	
3		Na 11		Mg 12		Al 13		Si 14		P 15		S 16		Cl 17			Ar 18	
4		K 19		Ca 20		Sc 21		Ti 22		V 23		Cr 24		Mn 25		Fe 26	Kr 36	
5		Rb 37		Sr 38		Y 39		Zr 40		Nb 41		Mo 42		Tc 43		Ru 44	Xe 54	
6		Cs 55		Ba 56		La-Lu 57-71		Hf 72		Ta 73		W 74		Re 75		Os 76	Rn 86	
7		Fr 87		Ra 88		Ac-Lw 89-103												

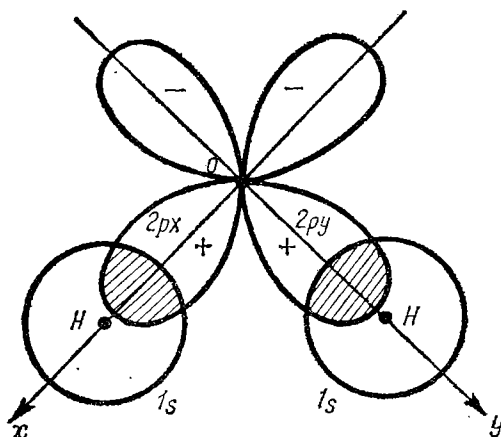


Fig. V.5.4

Se formează atunci molecula de apă, în care oxigenul are configurația  $(2p)^6$ , este încărcat negativ (ion negativ) și atrage puternic cei doi ioni de hidrogen, încărcăți pozitiv, prin pierderea electronilor lor. Putem spune însă și mai mult. Deoarece electronii  $2p$  ai oxigenului sînt orbitali puternic direcționați spațial (vezi fig. V.4.4) rezultă că cei doi electroni  $1s$  ai hidrogenului, se vor lega de oxigen doar pe direcțiile orbitalilor  $2p$ . Rezultă că molecula triatomică de apă nu va fi o moleculă liniară, ci va avea forma din fig. V.5.4.

Iată foarte pe scurt cum teoria cuantică a atomilor este capabilă să explice nu numai proprietățile fizice, ci și cele chimice ale substanțelor.

## 6. Fizica nucleului

### 6.1. STRUCTURA NUCLEULUI

Se poate vorbi despre o fizică a nucleului deoarece s-a dovedit că el are o structură, cu alte cuvinte este la rîndul lui compus din alte particule. Acest lucru a fost admis de către M. Curie (1899) imediat după descoperirea fenomenului de radioactivitate de către H. Becquerel (1896). Experiențele au dovedit că emisia de particule de către substanțele radioactive nu poate fi influențată din exterior prin nici un fel de cîmpuri ceea ce conduce la ipoteza originii nucleare a fenomenului de radioactivitate și deci implicit la admiterea unei structuri nucleare.

În cele ce urmează vom trece în revistă o serie de proprietăți ale nucleelor așa cum rezultă din experiență, urmînd ca pe baza lor să se găsească un model nuclear, care să explice, eventual să prevadă, proprietăți nucleare noi. Fizica nucleară trebuie să explice de ce există două feluri de nuclee: *stabile* și *instabile* (radioactive), cum se va comporta nucleul dacă va fi bombardat cu alte particule ș.a.m.d.

Analiza radiațiilor emise de substanțele radioactive, a arătat că ele sînt de trei feluri: radiațiile alfa care sînt puternic deviate din calea lor de cîmpuri electrice sau magnetice, radiațiile beta care sînt mai slab deviate și în sens contrar celor alfa și în fine radiațiile gamma care nu sînt deviate în cîmpuri aplicate, oricît de mari. Analizîndu-se masa și sarcina acestor radiații, prin metode de deviere a particulelor în cîmpuri, s-au obținut următoarele concluzii relativ la natura lor: radiația alfa este constituită din particule de masă aproximativ egală cu cea a atomului de heliu și cu sarcină pozitivă, egală cu două sarcini elementare. Astfel, particulele alfa au fost identificate cu nucleele de heliu complet ionizate. Particulele beta au fost identificate ca fiind electroni cu totul asemănători celor obținuți prin efect fotoelectric etc. Radiația gamma reprezintă o radiație electromagnetică de natură cu totul asemănătoare luminii sau undelor radio, dar de o frecvență mult superioară. Energiile particulelor emise din nucleu variază între aproximativ 0,1 și 10 MeV.

Din cele discutate anterior am văzut că pentru a păstra neutralitatea electrică a atomului, trebuie ca atomul care posedă  $Z$  electroni să fie încărcat cu o sarcină electrică egală cu  $+Ze$ . Măsurătorile de masă atomică efectuate de chimiști au permis cunoașterea aproximativă a maselor relative ale atomilor. Folosindu-se mijloace experimentale de deviație a particulelor în cîmpuri, s-au putut determina masele relative și absolute, exacte, ale atomilor. Pe baza acestora s-a tras concluzia că masele atomice sînt aproximativ multipli

întregi (cu mici excepții) ai masei atomului de hidrogen, ceea ce a condus pe E. Rutherford (1920) să propună o denumire specială pentru masa atomului de hidrogen: *proton*. Protonul ar fi astfel o particulă elementară, pozitiv încărcată cu o singură sarcină elementară și de masă  $m = 1836,6 m_e$ . Din cauza masei mari a protonului față de cea a electronului, protonii din nucleu determină practic valoarea masei nucleare. Luînd ca exemplu nucleul de heliu, care posedă o sarcină electrică  $+2e$  și masa de 4 unități relative, ajungem la concluzia că nucleul acesta ar trebui să conțină patru protoni. În acest caz însă ar posedea o sarcină electrică  $+4e$  ceea ce nu corespunde realității. Pentru a remedia această deficiență, presupunem că nucleul de heliu mai conține doi electroni care nu contează la masă, dar conduc în total la sarcina electrică  $+2e$ , în conformitate cu experiența. Această presupunere pare a fi confirmată și de emisia de electroni de către substanțele radioactive. S-a dovedit însă că această imagine nu corespunde cu realitatea. Astfel, pentru ca un electron să existe în nucleu, conform proprietăților ondulatorii ale particulelor, trebuie ca el să posedă o lungime de undă asociată egală sau mai mică decît dimensiunile nucleului. Această afirmație corespunde cererii ca electronul să fie localizat în interiorul nucleului. Ținînd cont că electronul din nucleu va trebui să aibă o energie aproximativ egală cu cea observată în fenomenele de radioactivitate, și luînd în considerație relația energie-impuls, putem calcula lungimea de undă asociată

$$\lambda_a = \frac{h}{p} = \frac{h}{\frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}} = \frac{h}{\frac{1}{c} \sqrt{E_c(E_c + 2m_e c^2)}} \approx 10^{-12} \text{ m},$$

luînd pentru energia cinetică a electronului 1 MeV și pentru energia totală expresia  $E = E_c + m_e c^2$ . Valoarea de  $10^{-12} \text{ m}$ , pentru unda asociată este prea mare pentru nucleu care are dimensiunile de aproximativ  $10^{-14} \text{ m}$ . Această concluzie împreună cu alte consecințe prevăzute de modelul electrono-protonic, care nu conduc la rezultate corecte, au condus la abandonarea acestui model.

Rezolvarea corectă a problemei constituției nucleare a fost posibilă numai în momentul în care a fost descoperit neutronul (1932 — J. Chadwick). Neutronul ca particulă elementară, se caracterizează printr-o masă aproape egală cu cea a protonului, dar de sarcină electrică nulă. W. Heisenberg, pe de o parte, și I. Tamm și D. Ivanenko, pe de alta, au fost cei care au înțeles (1932) că în constituția nucleului trebuie să existe și neutronul. Astfel nucleul este constituit din  $Z$  protoni și din  $N$  neutroni, care dau valoarea masei nucleare corecte.

## 6.2. CARACTERISTICILE FUNDAMENTALE ALE NUCLEELOR

a) **Sarcina nucleară ( $Z$ ).** Am văzut că nucleul posedă o sarcină nucleară egală cu  $+Ze$  datorită celor  $Z$  protoni conținuți de nucleu. Cum este însă distribuită această sarcină în interiorul nucleului? Răspunsul la această întrebare îl pot da experiențele de împrăștiere a particulelor încărcate (electroni, particule alfa), de mare energie, pe nuclee. Particulele cu care se bombardează nucleele vor fi împrăștiate (deviate de la traiectoria rectilinie) în funcție de energia lor, de sarcina totală nucleară, precum și în funcție de distribuția sarcini-

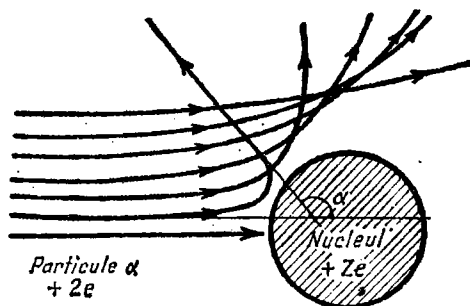


Fig. V.6.1

lor din interiorul nucleului (fig. V.6.1). În fig. V.6.2 este reprezentată distribuția unghiulară a particulelor alfa, calculată în ipoteza unei sarcini nucleare punctiforme (curba *a*) și a unei distribuții continue a sarcinii electrice pînă la marginea nucleului (curba *b*). Datele experimentale conduc la concluzia distribuției uniforme a sarcinii în interiorul nucleului după cum se vede din figura V.6.3 (pentru nucleele de oxigen  $Z = 8$ , cobalt  $Z = 27$ , indiu  $Z = 49$ , bismut  $Z = 83$ ). Se pot trage cîteva concluzii interesante din datele experimentale prezentate: a) protonii sînt distribuiți relativ omogen pe întregul volum al nucleului, ceea ce exclude posibilitatea de a aplica un model planetar pentru mișcarea particulelor nucleare; b) dimensiunile nucleului cresc proporțional cu sarcina ( $Z$ ); c) nucleul are o rază care, din cauza scăderii treptate a densității materiei nucleare spre marginea nucleului, poate fi definită doar aproximativ.

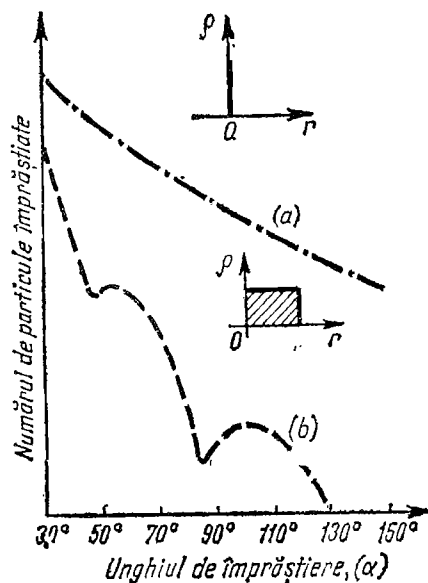


Fig. V.6.2

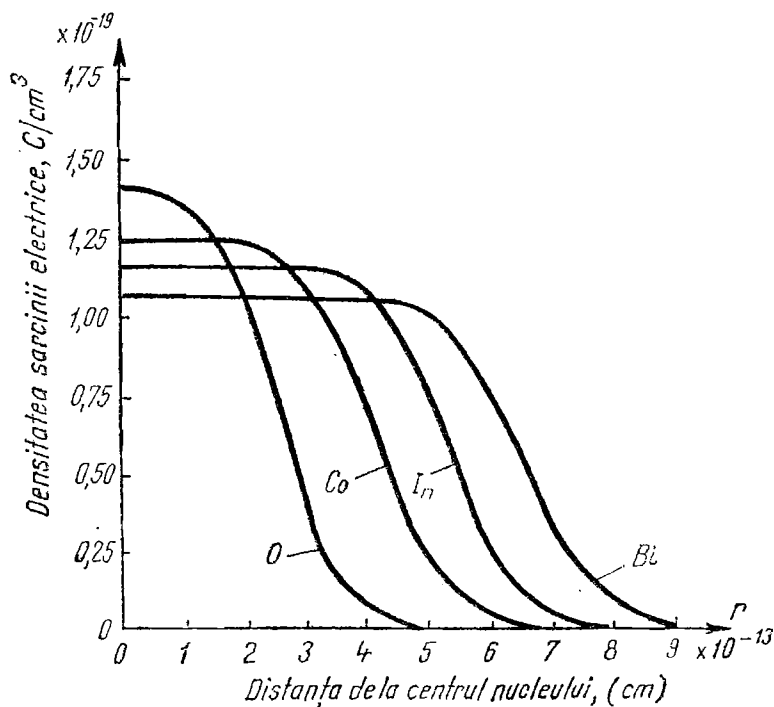


Fig. V.6.3

b) **Masa nucleului.** Măsurătorile de masă nucleară se fac astăzi cu o precizie foarte mare, ceea ce ne furnizează informații prețioase asupra structurii nucleelor. Masele relative se măsoară în prezent față de o unitate atomică de masă (a.m.u.) care reprezintă  $1/12$  din masa atomului de carbon și are valoarea  $1,66032 \cdot 10^{-27}$  kg. Masa atomică relativă se mai numește și *greutate atomică*. Masa atomică relativă, rotunjită la numărul întreg cel mai apropiat se numește *număr de masă* și reprezintă în același timp numărul de particule existente în nucleu. Masa exactă a nucleelor diferă de masa exactă atomică, în ultima fiind înglobată și masa electronilor atomici. Măsurătorile foarte exacte de mase nucleare au permis descoperirea fenomenului de *izotopie*. Izotopii sînt nuclee care posedă același număr atomic  $Z$  dar care au numere de masă diferite. Izotopii sînt, astfel, atomi care ocupă aceeași casuță în tabloul periodic, deci au aceleași proprietăți chimice, dar diferă prin masa lor. Astfel s-a descoperit că izotopia este un fenomen foarte răspîndit în natură și că elementele ce se găsesc în natură sînt în marea lor majoritate amestecuri de izotopi. Astfel oxigenul posedă trei izotopi, cu  $A = 16, 17$  și  $18$ . S-a descoperit astfel una din cauzele care fac ca masele atomice relative să nu fie numere întregi. Să luăm ca exemplu clorul ( $Z = 17$ ) care în natură se găsește sub forma unui amestec de doi izotopi cu  $A = 35$ , respectiv  $37$ . Abundența relativă a celor doi izotopi fiind  $75,4\%$  și  $24,6\%$  iar masele izotopice exacte fiind  $34,9800$ , respectiv  $36,9776$  a.m.u. masa atomică a amestecului izotopic natural va fi  $34,9800 \cdot 0,754 + 36,9776 \cdot 0,246 = 35,457$ , exact valoarea obținută expe-

rimental și care reprezintă masa chimică a clorului (care se folosește de exemplu la calculul maselor molare). Se poate pune aci problema cauzelor pentru care izotopii sînt reprezentați în natură prin valori diferite ale abundenței lor. Această problemă este deosebit de complexă și depășește cadrul discuției de față. Se poate aminti doar că sînt implicate în această problemă, atît aspecte legate de stabilitatea în timp (față de dezintegrare) a diferiților izotopi, ca și probleme legate de sinteza pe scară cosmică a elementelor. În orice caz, nu ne așteptăm ca abundența izotopică să fie aceeași pe Pămînt și pe alte planete sau corpuri cerești (lucru confirmat și de analiza eșantioanelor lunare).

Nucleele cu  $Z$  diferit dar cu același  $A$ , se numesc nuclee *izobare*. Ca exemplu se pot da: zirconiu cu  $Z = 40$  și  $N = 56$ , molibdenul cu  $Z = 42$  și  $N = 54$ , ruteniu cu  $Z = 44$  și  $N = 52$ , care au toți același număr de masă  $A = 96$ . În fine amintim existența unor nuclee numite *izomere* ce posedă același  $Z$  și  $A$  dar se deosebesc prin alte proprietăți fizice (stabilitate etc.).

S-a convenit ca nucleele să se noteze prescurtat astfel:

numărul de masă  $\rightarrow {}^{23}\text{Na}^+ \leftarrow$  starea de ionizare a izotopului  
 numărul atomic  $\rightarrow {}_{11}\text{Na}_{12} \leftarrow$  numărul de neutroni  
 $\uparrow$  simbolul chimic

Nu este obligatorie scrierea tuturor acestor caracteristici lîngă simbolul chimic, ci doar pe cele care interesează în problema dată. De exemplu:  ${}^{24}\text{Na}$  prin care se înțelege izotopul cu  $A = 24$  al nucleului de sodiu.

S-ar părea că cunoscînd masele exacte ale protonului, și neutronului precum și numărul lor dintr-un nucleu dat, să putem prezice masa exactă a nucleului. De exemplu izotopii hidrogenului ar trebui să aibă masele 2,017124; 3,036104. În realitate masele măsurate ale acestor izotopi sînt: 2,014708, respectiv 3,01700. Diferențele care se constată nu corespund unor erori experimentale din cauza preciziei deosebite în măsurarea maselor. Diferențele corespund unui fenomen mai profund și mai general legat de energia de legătură a nucleului pe care îl vom discuta mai jos. Se definește *defectul de masă* ca mărimea diferenței dintre masa exactă a nucleului și numărul de masă corespunzător:  $\Delta m = M - A$ . Importanța și semnificația acestui defect de masă va rezulta în cele ce urmează. Variația defectului de masă pentru nucleele existente în tabloul periodic este reprezentată în fig. V.6.4.

c) **Energia de legătură.** Nucleele, în afară de cele radioactive, prezintă o stabilitate excepțional de mare. Se poate exprima gradul de stabilitate al unui izotop dat în modul următor: se face diferența între energia totală a celor  $Z$  protoni și  $N = A - Z$  neutroni din nucleu, și energia totală a nucleului. Această diferență este cu atît mai mare cu cît nucleul este mai stabil. Pentru a obține energia nucleului nu este nevoie să cunoaștem în amănunt structura nucleului, ci ne putem folosi de legea de conservare a energiei. Particulele constitutive ale nucleului, rămîn legate în nucleu, deoarece ele au nevoie de o anumită energie pentru a fi scoase din nucleu, energie care poartă denumirea de *energie de legătură*. Energia totală de legătură a nucleului este atunci egală cu energia necesară eliberării tuturor particulelor din nucleu. Conform teoriei relativității, între energia și masa unei particule există o relație de corespondență  $E = mc^2$ . În consecință, energia totală a nucleului ar trebui să fie:



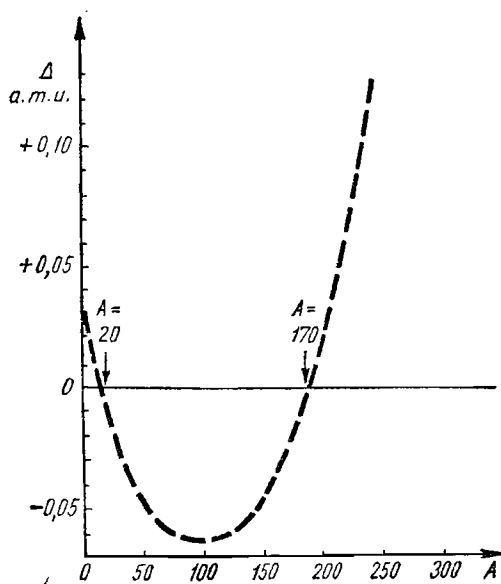


Fig. V.6.4

$Zm_p c^2 + (A-Z)m_n c^2$ . În realitate ea este  $Mc^2$ , unde  $M$  este masa experimentală, exactă, a nucleului. Diferența:

$$E_l = [Zm_p c^2 + (A-Z)m_n c^2] - Mc^2 = \Delta m c^2 \quad (6.1)$$

reprezintă energia de legătură totală a nucleului. Împărțind această energie de legătură, la numărul de particule din nucleu ( $A$ ) obținem *energia de legătură pe nucleon*  $E_l/A$ , reprezentată în fig. V.6.5 pentru elementele întregului sistem periodic. Rezultă de aci că nucleele cele mai stabile sînt cele din mij-

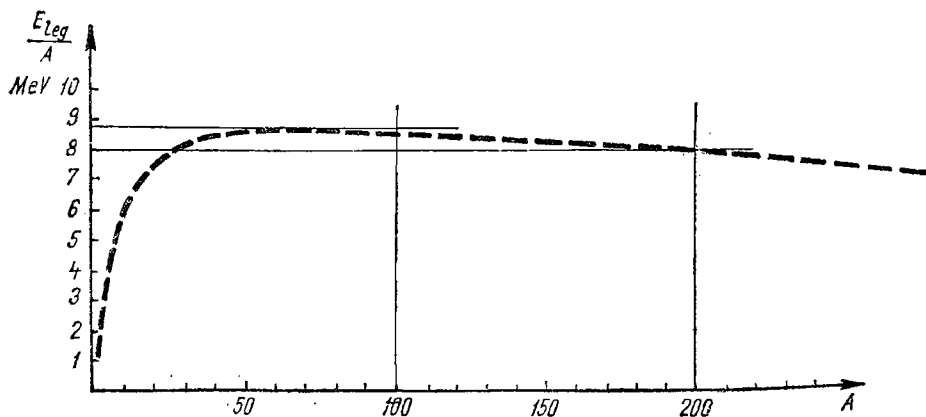


Fig. V.6.5

locul tabloului periodic, pentru care energia de legătură este cuprinsă între 7,5 și 8,6 MeV pe particulă.

d) **Dimensiunile nucleelor.** Nucleul se poate reprezenta aproximativ ca fiind o formație sferică, compusă din neutroni și protoni, strâns legați unul de altul. Tot aproximativ vom putea vorbi deci de raza nucleului despre care am mai amintit. Este însă bine să se amintească că toate mijloacele experimentale permit aprecierea razei „electrice”, adică conduc la estimarea distribuției protonice din nucleu. Raza nucleară propriu-zisă este cea corespunzătoare distribuției neutronilor și protonilor. Deoarece nu se presupune o repartizare diferențiată a protonilor și neutronilor în nucleu, se admite că raza „electrică” este de fapt raza reală a nucleului. Dacă mai ținem cont și de faptul că particulele din nucleu sînt de natură cuantică, vom înțelege că raza nucleară este o mărime destul de imprecisă și greu de definit exact.

e) **Alte mărimi caracteristice nucleelor.** Pe lângă mărimile caracteristice nucleelor mai sus discutate, nucleele mai posedă și altele ca: spin, momente electrice și magnetice etc. care sînt de o mare importanță în înțelegerea proprietăților nucleelor dar care depășesc cadrul acestei cărți. Din această cauză ele nu vor fi studiate.

### 6.3. FORȚELE NUCLEARE

Avînd acum o privire de ansamblu asupra constituției și caracteristicilor nucleelor, putem trece la problema mai complicată a cauzelor care determină stabilitatea excepțională a nucleelor. Pentru aceasta, să analizăm care sînt forțele ce acționează în interiorul nucleelor. Cele mai importante forțe par a fi cele coulombiene, din cauza distanțelor extrem de mici între protoni. Astfel într-un nucleu de heliu, cei doi protoni care se găsesc la distanță de aproximativ  $10^{-14}$  m se resping cu o forță de  $F_e = K_e \frac{2}{r^2} = 2,3$  N. Aceste forțe devin tot mai puternice pe măsura creșterii numărului de protoni, deoarece toți protonii interacționează unii cu alții. Care pot fi forțele care să contrabalanseze aceste forțe de respingere? Forțele gravitaționale, datorită constantei atracției universale extrem de mici, conduc la forțe de atracție pentru cazul amintit, de  $1,9 \cdot 10^{-36}$  N, deci total neglijabile. De asemenea, forțele centrifuge, care în cazul atomului asigurau echilibrul pe traiectorie, nu mai pot fi luate în considerație deocamdată aici, deoarece nu mai putem vorbi de un sistem planetar. (Amintim că forțele centrifuge joacă totuși un rol destul de important în cazul nucleului dar nu pot asigura stabilitatea nucleară.) Rezultă că în nucleu trebuie să existe alte forțe, necunoscute încă, care să asigure nucleului stabilitatea observată experimental. Aceste forțe au fost denumite *forțe nucleare*. Vom căuta ca pe baza observațiilor experimentale, să deducem proprietățile acestor forțe nucleare. În primul rînd ele trebuie să scadă mult mai repede cu distanța dintre particule (deoarece nu se „sînt” la scara atomică) ca forțele electrostatice. În al doilea rînd, ele trebuie să aibă numai caracter atractiv, analog forțelor gravitaționale. În al treilea rînd, ele trebuie să se manifeste atît între protoni, între neutroni, cît și între neutroni și protoni. Se verifică experimental că intensitatea acestor forțe nu depinde de sarcinile particulelor care interacționează. Această proprietate, împreună cu egalitatea maselor protonului și neutronului, fac ca cele două particule să fie privite ca două stări ale unei singure particule numită *nucleon*.

Vom putea să exprimăm cantitativ acțiunea acestor forțe scriind energia potențială a unei particule în preajma nucleului:

$$E_p = -\frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^n}, \quad (6.2)$$

unde  $A_1$  și  $A_2$  sînt constante iar  $n$  — puterea cu care scade, cu distanța, energia potențială datorită forțelor nucleare, care este  $> 2$ . Primul termen, electrostatic, fiind repulsiv este negativ, pe cînd al doilea, nuclear, fiind atractiv este pozitiv. Reprezentînd grafic această relație obținem fig. V.6.6. Să analizăm pe această figură ce se întîmplă cînd o particulă ( $P_1$ ), de sarcină  $+e$  și de energie cinetică  $E_c$  se apropie de nucleu venind de la infinit. Pe măsură ce se apropie de nucleu, forțele de respingere cresc și deci și energia sa potențială crește. În consecință, pe măsura apropierii de nucleu, energia cinetică scade pînă cînd la distanța  $r_3$  energia cinetică a particulei devine nulă. Întreaga ei energie s-a transformat în energie potențială. Energia cinetică fiind nulă, particula este pentru o fracțiune de timp în repaus. Din cauza forțelor de respingere, particula, în momentele ulterioare, se va îndepărta treptat de nucleu, cu viteză mereu crescătoare pe măsura micșorării energiei potențiale și a creșterii celei cinetice. Rezultă că o particulă, va putea să atingă nucleul, dacă are o energie suficientă ca să atingă punctul  $r_4 =$  suma razelor nucleului și particulei incidente. Pentru orice energie mai mică ca aceasta, distanța minimă de apropiere va fi mai mare și deci particula nu va ajunge în contact cu nucleul. Se spune că ea a fost împrăștiată de către nucleu. Din contra, pentru orice energie mai mare ca cea necesară atingerii punctului  $r_4$ , particula va putea pătrunde în interiorul nucleului și deci se va putea găsi și sub influența forțelor nucleare. Se poate astfel defini o energie potențială de prag, numită *bariera de potențial coulombiană*, necesară pentru ca o particulă să intre în nucleu și care este dată de relația simplă:

$$B = \frac{Z_n Z_p e^2}{R_n + r_p}, \quad (6.3)$$

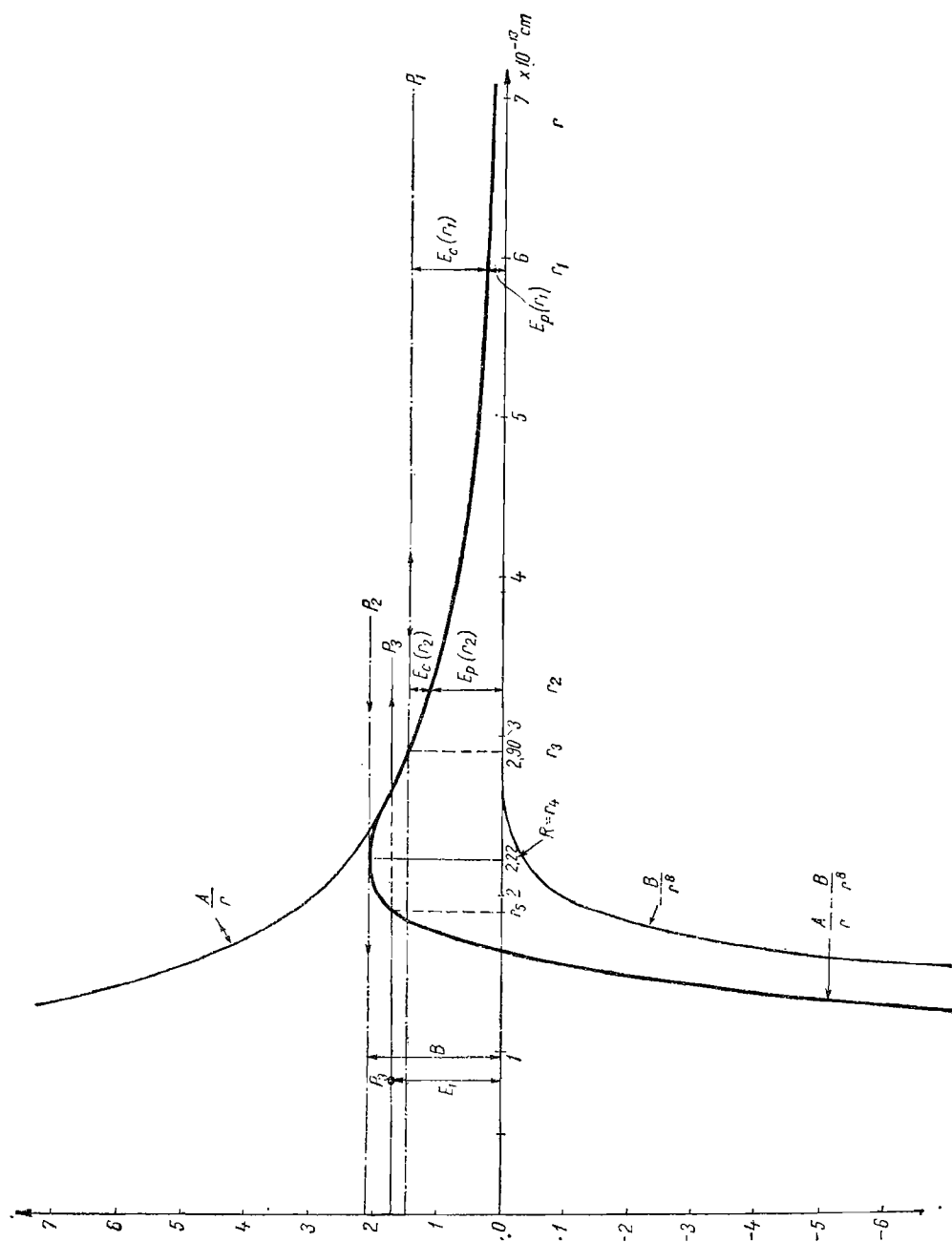
unde  $Z_n$  și  $Z_p$  reprezintă numerele atomice ale nucleului și particulei incidente, iar  $R_n$  și  $r_p$ , razele nucleului și a particulei incidente. Condiția ca o particulă să intre în nucleu, se va putea scrie atunci sub forma  $E_c \geq B$ .

Cea mai convenabilă particulă din punct de vedere al energiei necesare pentru pătrunderea în nucleu, este neutronul, care datorită lipsei sarcinii electrice, posedă o barieră  $B = 0$ . Acestui fapt i se datorează marea răspîndire a experiențelor de bombardare a nucleelor cu neutroni în zilele noastre.

În apropierea nucleului, curba energiei potențiale prezintă o scădere foarte rapidă, ce marchează regiunea în care forțele nucleare devin dominante. În ceea ce privește originea forțelor nucleare nu putem spune nimic pentru moment deoarece ele sînt indisolubil legate de proprietățile particulelor elementare.

## 6.4. MODELE NUCLEARE

a) **Modelul picăturii.** Ca și în cazul atomului, vom căuta acum să vedem cum este construit nucleul, cunoscînd componenții și forțele ce sînt în joc. În interiorul nucleului, forțele nucleare sînt cele predominante și deci ele vor



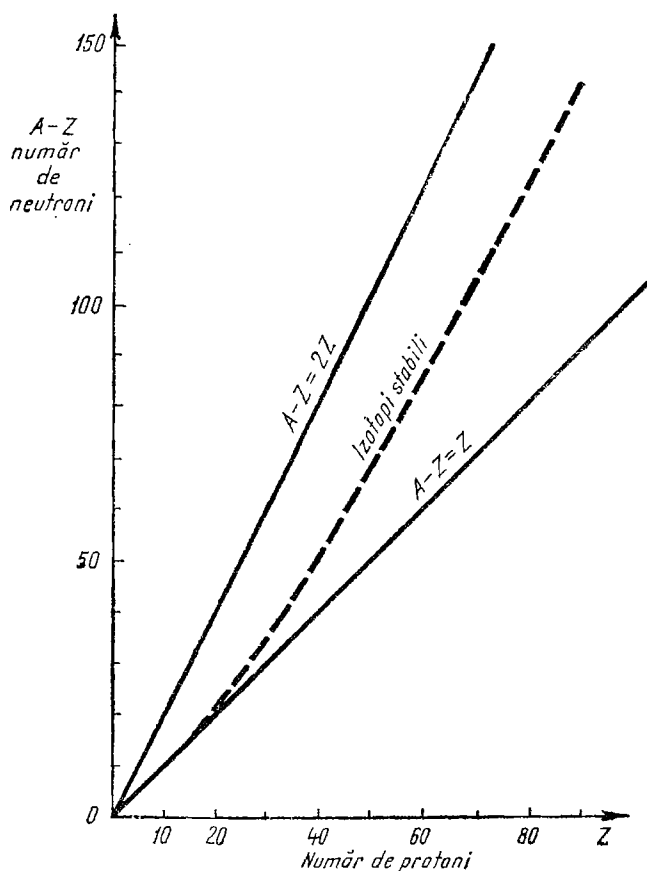


Fig. V.6.7

determina în primă aproximație modul de aranjare a nucleonilor în nucleu. Fiind forțe de distanță scurtă de acțiune, forțele nucleare vor acționa practic numai asupra primilor vecini, pe când forțele electrostatice vor acționa asupra totalității protonilor din nucleu. Aceste deosebiri vor conduce la o creștere mai rapidă a numărului de neutroni decât de protoni pentru nucleele stabile (fig. V.6.7). Cu alte cuvinte neutronii joacă un rol de „ciment” în edificiul nuclear. Din cauza forțelor nucleare puternice, de atracție, particulele din nucleu sînt strîns unite, astfel încît formează un sistem compact. Se poate spune de asemenea că nucleonii de la periferia nucleului vor fi sub acțiunea unor forțe îndreptate spre centrul nucleului asemănătoare forțelor de tensiune superficială. Toate aceste observații ne permit să aproximăm nucleul cu o picătură de lichid, în care fiecare particulă participă la volumul total nuclear cu volumul său propriu, care este aproximativ constant ( $v_0$ ). În acest caz putem scrie:

$$v_0 A = 4R^3/3, \text{ de unde:} \\ R = r_0(A)^{1/3}, \text{ cu } r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ cm,} \quad (6.4)$$

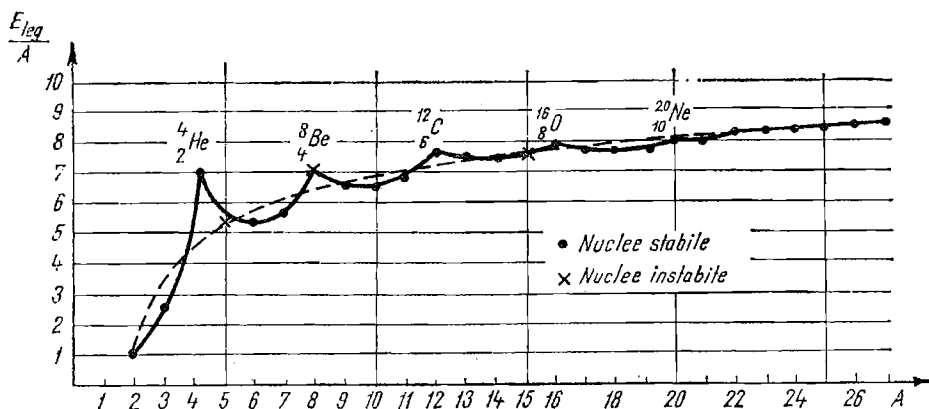


Fig. V.6.8

unde  $A$  este numărul de masă,  $R$  — raza medie a nucleului sferic,  $r_0$  — o constantă care este determinată experimental. Această formulă semi-empirică, se verifică bine experimental și dovedește astfel corectitudinea acestei imagini simple asupra nucleului. Folosindu-ne de această relație, putem calcula densitatea „materiei nucleare” care este:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1,672 \cdot 10^{-27} A}{\frac{4\pi}{3} r_0^3 A} \simeq 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

Rezultă de aci o valoare enorm de mare pentru densitatea „materiei nucleare”, cît și faptul că densitatea nu depinde de tipul nucleului. Toate aceste concluzii, concordante cu experiența, ca și altele pe care nu le vom discuta, fac din modelul picăturii un ajutor prețios în înțelegerea fenomenelor nucleare.

b) **Modelul păturilor nucleare.** Asemănător cu periodicitatea proprietăților fizico-chimice ale elementelor, și în cazul nucleelor au fost descoperite unele proprietăți de periodicitate (fig. V.6.8). Se constată astfel, că nucleele cu un număr de 2, 8, 20, 50, 82, 126, ... protoni, au o energie de legătură mai mare ca celelalte nuclee și deci sînt mai stabile. Această observație, ca și multe altele, nu pot fi explicate prin modelul picăturii.

Periodicitatea unor proprietăți nucleare, funcție de numărul de protoni sau de neutroni, indică existența în interiorul nucleului a unor pături nucleare. Din cauza împachetării strînse a nucleonilor, existența acestor pături nu mai este legată și de o grupare spațială corespunzătoare a nucleonilor. Pe baza acestui model de pături, se pot determina stările de energie ale nucleonilor din nucleu, care se dovedesc a fi cuantificate. Modelul păturilor nucleare pune în evidență astfel caracterul individual al mișcării particulelor în nucleu, spre deosebire de modelul picăturii care scoate în evidență comportarea colectivă a nucleonilor în nucleu.

Pe lîngă aceste două modele nucleare, au mai fost dezvoltate și alte modele mai mult sau mai puțin complete. Dintre toate, cel care în momentul de față pare a descrie cel mai bine comportarea nucleonilor în nucleu, ca și proprietă-

țile nucleelor, este *modelul generalizat*, care reunește atât caracterul colectiv al mișcării nucleonilor, dat de modelul picăturii, cât și aspectele individuale ale mișcării lor, descrise în cadrul modelului păturilor nucleare.

## 6.5. RADIOACTIVITATEA

Radioactivitatea este partea fizicii nucleare care se ocupă de studiul nucleelor instabile. Prima lege cantitativă a fenomenelor radioactive a fost dată de către J. Elster și H. F. Geitel (1899) și se referă la legea dezintegrării radioactive. Să presupunem că la momentul inițial avem  $N_0$  nuclee de specie  $A$ . Experiența arată că după un interval de timp, cantitatea de nuclee de specie  $A$  se micșorează, apărând în schimb o cantitate corespunzătoare de nuclee de altă specie, să zicem  $B$ . Spunem că a avut loc o dezintegrare spontană, o transformare nucleară, care se poate scrie simbolic prin ecuația:



unde  $b, c, \dots$  sînt particule emise în urma acestei transformări nucleare.

Experiența arată de asemenea că nici o acțiune exterioară nucleelor, **nu** este capabilă să influențeze desfășurarea acestui fenomen de dezintegrare. Rezultă că el este determinat doar de condițiile interne, nucleare. De aceea se poate presupune că numărul de nuclee care se dezintegrează în unitatea de timp, este proporțional cu numărul de nuclee existente la momentul inițial:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (6.6)$$

$\lambda$  fiind o constantă caracteristică fiecărei specii nucleare. Integrînd această ecuație, obținem legea dezintegrării radioactive (fig. V.6.9):

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (6.7)$$

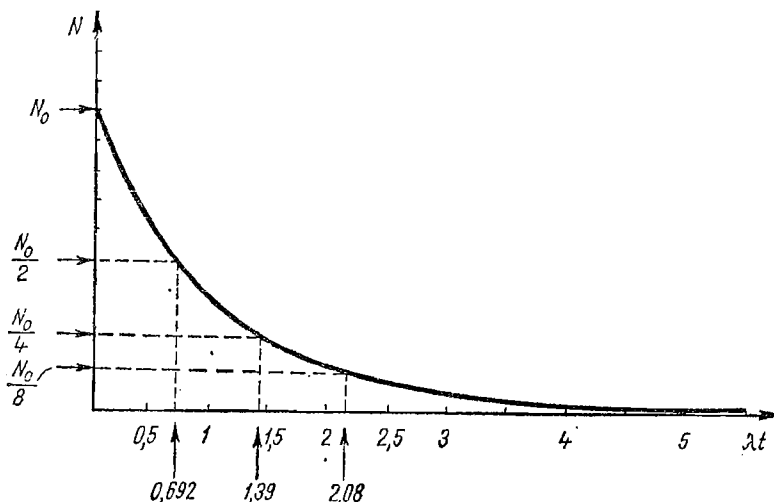


Fig. V.6.9

Această lege ascunde în spatele ei, caracterul statistic al dezintegrării radioactive, și este foarte bine verificată experimental. Caracterul statistic al dezintegrării radioactive, se manifestă prin aceea că nimeni, nici chiar nucleele vecine nu „cunosc” momentul dezintegrării unui nucleu. Acest lucru mai înseamnă, că pot exista nuclee care să nu se dezintegreze decît foarte tîrziu. Ca măsură a vitezei de dezintegrare, se ia timpul după care numărul de nuclee de specie dată scade la jumătate. Acest interval de timp poartă numele de *timp de înjumătățire*, și se poate deduce punînd condiția  $N = N_0/2$ :

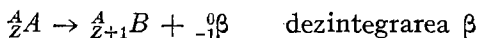
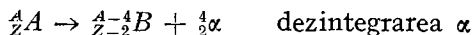
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (6.8)$$

O altă mărime care poate să caracterizeze viteza de dezintegrare, și care este des întrebuitată în practică este *activitatea*. Ea se definește ca număr de nuclee ce se dezintegrează în unitate de timp. Astfel, activitatea se exprimă prin relația:

$$A = \lambda N. \quad (6.9)$$

Unitatea de măsură pentru activitate este *dezintegrarea pe secundă*, iar ca multiplu: (micro-, mili-) *curie*, care are valoarea 1 curie =  $3,7 \cdot 10^{10}$  dez/s. Curie-ul reprezintă aproximativ activitatea unui gram de radiu.

A doua lege fundamentală a radioactivității este legea de deplasare dată de Fajans și F. Soddy (1912). Ea reprezintă recunoașterea faptului că dezintegrarea este un fenomen de transformare nucleară cu alte cuvinte o *transmutație*. Această lege este o consecință a legilor de conservare a sarcinilor și a numărului de nucleoni la o dezintegrare. Astfel, pentru dezintegrările  $\alpha$ ,  $\beta$ , sau  $\gamma$  se pot scrie simbolic următoarele ecuații, care să exprime legea de deplasare:



Se poate observa că emisia de radiații gamma este impropriu numită dezintegrare, deoarece în cursul acestui proces nucleul nu suferă o transformare structurală, ci doar o trecere de pe o stare energetică pe alta. În acest fel emisia de radiații gamma coexistă cu celelalte două tipuri de dezintegrări. Nucleele inițial și final în cazul dezexcitării cu emisie de radiații  $\gamma$ , posedă aceeași compoziție de particule, dar au grade diferite de stabilitate. Ele se numesc *izomere*.

Cauza fenomenelor radioactive trebuie căutată în proprietățile de stabilitate sau instabilitate nucleară. Dezintegrarea nucleară este o expresie a tendinței sistemelor fizice de a trece spre stări de energie cît mai joasă. În acest fel vom putea spune că o dezintegrare va fi posibilă dacă este îndeplinită condiția ca energia nucleului înainte de dezintegrare să fie mai mare ca suma energiilor nucleului rezultat și a particulei emise. Deci, condiția necesară, pentru ca o dezintegrare să aibă loc este ca

$$(M' + m)c^2 - Mc^2 < 0, \quad (6.10)$$

unde  $M$  și  $M'$  sînt masele nucleelor inițial și respectiv final, iar  $m$  masa particulei emise. Pe baza acestei relații se pot prezice tipurile de dezintegrări pe care le



pot suferi nucleele. Rezultă că dezintegrările cu emisie de protoni sau de neutroni, sînt foarte puțin probabile, deoarece diferența mai sus arătată nu satisface condiția de dezintegrare, pentru nici o pereche de nuclee care să difere printr-un proton sau neutron\*. Analizînd situația pentru cazul emisiei de particule  $\alpha$ , se constată că condiția începe să fie îndeplinită pentru nucleele cu  $A \geq 209$ . Din această cauză, nuclee alfa emițătoare, sînt numai nucleele grele. Să analizăm ceva mai îndeaproape dezintegrarea  $\alpha$ . Pentru ca o particulă alfa să poată părăsi nucleul, trebuie să aibă o energie suficient de mare pentru a învinge bariera de potențial nuclear (în sens invers acum, față de cazul discutat anterior — fig. V.6.6). Să luăm un exemplu concret:  $^{210}\text{Po}$  care emite particule  $\alpha$  cu energia de 5,3 MeV. Ținînd cont de relația semi-empirică care ne dă razele nucleare (6.4), putem calcula bariera de potențial pentru emisia  $\alpha$  a poloniului—210,

$$B = \frac{Z_\alpha (Z_{Po} - 2)e^2}{R_{Po}} = 25,8 \text{ MeV.} \quad (6.11)$$

Se vede că bariera este mult mai mare ca energia particulei emise. Acest paradox nu a putut fi lămurit decît, prin așa-numitul *efect tunel*, de către G. Gamow (1929). Dacă ne amintim de cele spuse la capitolul de mecanică cuantică, înțelegem că o particulă are o probabilitate diferită de zero de a depăși o barieră de potențial, chiar dacă are o energie mai mică ca înălțimea barierei, deoarece bariera din punct de vedere cuantic posedă o anumită transparență. În felul acesta, particula alfa va putea ieși din nucleu (e drept destul de greu, destul de puțin probabil) ducînd la dezintegrarea nucleului. Probabilitatea de tunelare se poate calcula cuantic, și astfel se poate calcula perioada de dezintegrare a nucleului  $\alpha$  activ. Poloniul—210 avînd o perioadă de dezintegrare (de înjumătățire) de 138 de zile, are o constantă radioactivă  $\lambda$  corespunzătoare, de  $5,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ . Din legea fundamentală a dezintegrării se poate vedea că această constantă are semnificația unei probabilități de dezintegrare (6.6). Se vede astfel că probabilitatea de dezintegrare este foarte mică pentru  $^{210}\text{Po}$ . Putem aprecia transparența barierei nucleare, printr-un raționament simplu. Ne putem imagina că particula alfa efectuează în nucleu, mișcări oscilatorii, deoarece este mereu respinsă de pereții barierei de potențial. Astfel frecvența de ciocnire cu pereții barierei va putea fi apreciată conform relației evidente:  $f = v/2R$  unde  $v$  — viteza medie a particulei în nucleu;  $R$  — raza nucleului. Pe de altă parte, din ipoteza unei asociații obținem că  $2R = \hbar/mv$ , de unde  $f = \hbar/4mR^2$ . Punînd pentru  $m$  valoarea masei particulei alfa, și înlocuind toate celelalte date, obținem pentru cazul poloniului—210 o frecvență de  $3 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$ . Dacă notăm transparența barierei de potențial cu  $D$ , atunci probabilitatea ca particula să străbată bariera va fi egală cu  $\lambda = fD$ . De aci cunoscînd pe  $\lambda$  și pe  $f$  putem calcula direct transparența, care rezultă  $D = 1,9 \cdot 10^{-28}$ . Rezultă astfel o valoare extrem de mică pentru transparența barierei, totuși suficientă pentru a determina o dezintegrare cu o perioadă de înjumătățire de 138 zile. Dacă considerăm că perioada de înjumătățire este o măsură a vieții medii pentru nucleele instabile, vedem că în acest timp particula alfa se ciocnește de pereți de  $\sim 4 \cdot 10^{39}$  ori, și numai o dată în medie reușește să scape prin transparență.

O altă caracteristică a emisiei prin efect tunel, este faptul că particula are în afara nucleului aceeași energie ca cea pe care a avut-o în interiorul nucleu-

\* Recent, dezintegrarea protonică a fost totuși observată.

lui. Deoarece stările energetice din nucleu sînt cuantificate, particulele alfa emise vor avea energii bine determinate.

Am discutat pînă acum cauzele emisiei de particule alfa. Să trecem acum la dezintegrarea  $\beta$ . Aci problema este pentru început foarte complicată deoarece electronii emiși din nucleu, nu pot exista în el. Deoarece s-a demonstrat experimental că acești electroni nu provin nici din învelișul electronic al atomului, originea lor pare a fi necunoscută. În realitate dezintegrarea  $\beta$  este mai mult o consecință a proprietății particulelor elementare decît a nucleelor. S-a dovedit că electronii apar ca urmare a transformării neutronilor în protoni după schema



Această transformare are loc în momentul în care are loc dezintegrarea. Accentuăm că aceasta este o transformare veritabilă și că nu putem spune că neutronul este format dintr-un proton și un electron. Această transformare s-a dovedit a fi spontană și dacă ținem cont de faptul că neutronul posedă o masă puțin mai mare ca cea a protonului, putem înțelege procesul ca o trecere spre o stare mai convenabilă energetic. Astfel ea se conformează regulii amintite pentru dezintegrări, putînd fi considerată încă o dovadă a afirmației că neutronul și protonul sînt două stări ale unei particule unice numită *nucleon*. Această transformare se poate pune în evidență direct, experimental, și s-a putut determina viața medie a neutronului liber (18 minute). Deoarece la dezintegrarea  $\beta$  numărul de nucleoni ai nucleului nu se modifică, nucleul rezultat este un izobar al nucleului radioactiv.

Putem completa tabloul fenomenelor de dezintegrare beta adăugînd că în 1932 Anderson descoperă existența unei particule de masă egală cu cea a electronului, dar de sarcină pozitivă. El a denumit această particulă *electron pozitiv* sau *pozitron*. În curînd s-a constatat că pozitronul poate fi găsit și ca urmare a dezintegrărilor radioactive care se numesc astfel, *pozitronice* (dezintegrare  $\beta^+$ ). Emisia de pozitroni poate fi explicată printr-un mecanism asemănător emisiei de electroni și corespunde schemei de transformare:



Și în acest caz se obține un nucleu izobar cu cel inițial.

Datorită faptului că la o transformare cu emisie de electroni sau de pozitroni variația masei este mică în comparație cu dezintegrarea alfa, condiția de dezintegrare nu se limitează doar la regiunea nucleelor grele. Nuclee  $\beta$  active se cunosc și printre nucleele ușoare.

Dezintegrarea fiind o consecință a instabilității nucleare vom putea spune că ea se poate observa la acele nucleee la care protonii și neutronii nu sînt într-un raport convenabil care să confere maximum de stabilitate. Astfel, un număr disproporționat de mare de protoni față de neutroni, va duce la dezintegrarea pozitronică prin transformarea unui proton într-un neutron, obținîndu-se în felul acesta o compoziție neutrono-protonică mai favorabilă energetic. În cazul unui exces de neutroni se observă o dezintegrare electronică în urma căreia numărul de protoni crește obținîndu-se o compoziție nucleară de o mai mare stabilitate.

În fine, amintim aci o transformare nucleară care are asupra nucleului un efect identic cu dezintegrarea pozitronică, dar care nu conduce la emisia de

particule din nucleu. Această dezintegrare se numește *captură electronică*, și constă în captarea de către nucleu a unui electron de pe o orbită atomică (de obicei de pe pătura cea mai apropiată de nucleu, pătura  $K$ ). În acest proces nucleul suferă o transformare care poate fi descrisă prin ecuația:

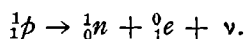


Putem suma astfel toate datele despre dezintegrările radioactive sub forma unui tabel, care să conțină tipul de dezintegrare, legea de deplasare corespunzătoare, condiția necesară pentru apariția dezintegrării respective, spectrul energetic al particulelor emise și în fine exemple caracteristice pentru acea dezintegrare (tabelul V.14).

TABELUL V.14

Tipul de dezintegrare:	Legea de deplasare:	Condiția de apariție:	Spectrul energetic al particulei emise:	Exemplu
$\alpha$	$(A, Z) \rightarrow (A-4, Z-2)$	${}_Z^A M \geq {}_{Z-2}^{A-4} M + m_{He}$	discret	${}_{84}^{210}Po \rightarrow {}_{82}^{206}Pb + \alpha$
$\beta^-$	$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1)$	${}_Z^A M \geq {}_{Z+1}^A M$	continuu	${}_{16}^{32}P \rightarrow {}_{16}^{32}S + \beta^-$
$\beta^+$	$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1)$	${}_Z^A M \geq {}_{Z-1}^A M + 2m_e$	continuu	${}_{6}^{10}C \rightarrow {}_{5}^{10}B + \beta^+$
Captura $K$	$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1)$	${}_Z^A M \geq {}_{Z-1}^A M + m_e$	—	${}_4^7Be \rightarrow {}_3^7Li$

Din acest tabel se poate constata că la dezintegrarea beta energia particulelor emise prezintă un spectru energetic continuu spre deosebire de dezintegrarea alfa, și în opoziție cu caracterul cuantic al stărilor energetice din nucleu. Această inconsecvență nu se datorează faptului că nucleul nu are stări energetice cuantificate ci, după cum a arătat W. Pauli (1931), la transformarea reciprocă a neutronilor și protonilor mai apare încă o particulă ce nu posedă sarcină electrică și are o masă de repaus nulă. În acest fel, energia transformării se împarte între electron și această particulă, denumită *neutrino*. Energia care revine electronului va putea astfel să varieze între zero și valoarea maximă disponibilă. Din această cauză electronii din dezintegrarea beta prezintă un spectru continuu de energii, dar care are o limită maximă de energie, care corespunde unei energii bine determinate, caracteristice speciei nucleare date. Transformările neutron-proton se vor putea scrie în mod corect astfel:



Să trecem acum la emisia de radiații gamma de către nucleu. Aceste radiații sînt emise, după cum am mai amintit, în procesele de dezexcitare a nucleelor. Din această cauză, emisia gamma este o însoțitoare a majorității dezintegrărilor alfa și beta, în cazul în care nucleul rezultat se găsește pe o stare energetică superioară stării fundamentale. Timpul mediu pe care nucleul îl petrece în starea

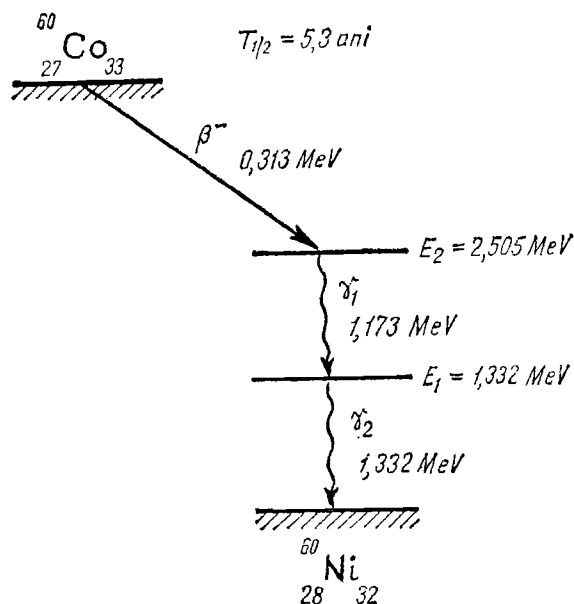


Fig. V.6.10

excitată este în general foarte scurt (de ordinul a  $10^{-7}$  s). Există cazuri în care acest timp este de ordinul orelor sau chiar zilelor. Se spune în acest caz că nucleul prezintă o *stare izomeră*. Energia radiației gamma emise este egală cu diferența energetică între cele două nivele, excitat și fundamental. Din această cauză spectrul energetic al radiației gamma este un spectru discret, cum era de așteptat. Unele nuclee pot emite mai multe particule la un act de dezintegrare. Din această cauză este necesară cunoașterea, pentru fiecare nucleu în parte, a *schemei de dezintegrare*. În fig. V.6.10, se dă o astfel de schemă de dezintegrare pentru un radioizotop foarte răspândit ca aplicații practice:  ${}^{60}\text{Co}$ . Schema de dezintegrare cuprinde pe axa verticală energiile nivelelor nucleare, iar pe orizontală Z-ul, conform legii de deplasare. În urma dezintegrării electronice a cobaltului—60, ia naștere izotopul 60 al nichelului, care avînd  $Z=28$  va fi reprezentat în dreapta nucleului de cobalt. Nucleul de nichel rezultat din dezintegrare se va afla pe o stare excitată, de unde va trece pe starea fundamentală prin emisia a două cuante gamma de energiile 1,17 și 1,33 MeV. Radiația beta de energie 0,31 MeV este reprezentată printr-o săgeată la dreapta, iar radiația gamma prin săgeată verticală. În acest fel schema de dezintegrare conține toate datele necesare pentru a descrie dezintegrarea considerată.

Descoperirea *radioactivității artificiale* (1933) a condus la lărgirea aplicațiilor pașnice ale izotopilor radioactivi și a condus la înțelegerea mai profundă a fenomenelor nucleare. Substanțele radioactive artificiale nu se deosebesc principial de cele naturale, deosebirea constînd în faptul că ele, din diverse motive, nu se găsesc în natură. Izotopii radioactivi artificiali se obțin prin așa-numitele *reacții nucleare* pe care le vom studia în capitolul următor. Așa cum se poate

vedea din tabelul V.15, este posibil ca nucleul rezultat din dezintegrare, să fie la rândul lui instabil și să se dezintegreze, prin emisie de particule, în alt nucleu. În acest fel iau naștere seriile radioactive, care leagă genetic un număr mare de izotopi radioactivi. În natură există trei astfel de serii radioactive care încep cu nuclee grele și se termină cu nuclee stabile de la mijlocul sistemului periodic.

TABELUL V.15 Seria uraniu-radiu ( $A = 4n + 2$ )

$A \backslash Z$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
238											U
234									Th	$\xrightarrow{\beta}$ Pa	$\xrightarrow{\beta}$ U
230								Th			
226								Ra			
222								Rn			
218								Po			
214	Pb	$\xrightarrow{\beta}$ Bi	$\xrightarrow{\beta}$ Po								
210	Pb	$\xrightarrow{\beta}$ Bi	$\xrightarrow{\beta}$ Po								
206	Pb										

Seria toriului ( $A = 4n$ )

$A \backslash Z$	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
232											Th
228								Ra	$\xrightarrow{\beta}$ Ac	$\xrightarrow{\beta}$ Th	
224								Ra			
220								Rn			
216								Po			
212		Pb	$\xrightarrow{\beta}$ Bi	$\xrightarrow{\beta}$ Po							
208	Tl	$\xrightarrow{\beta}$ Pb									

TABELUL V.15 (continuare). Seria actiniului ( $A = 4n + 3$ )

$\begin{matrix} Z \\ A \end{matrix}$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
235											U
231									Th	Pa	
227								Ac	Th		
223							Ra				
219						Rn					
215				Po							
211	Pb	Bi	Po								
207	Pb										

Seria neptuniului (artificială) ( $A = 4n + 1$ )

$\begin{matrix} Z \\ A \end{matrix}$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
241													Am	Cm	
237												Np			
233										Pa	U				
229									Th						
225							Ra	Ac							
221							Fr								
217								At							
213				Bi	Po										
209	Pb	Bi													

## 6.6. REACȚII NUCLEARE

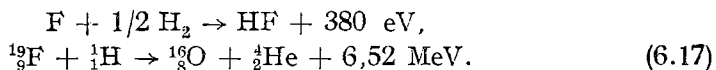
Reacția nucleară este o transformare nucleară, ca rezultat al ciocnirii unei particule de energie suficient de mare cu un nucleu. Prima reacție nucleară a fost produsă de E. Rutherford (1919) și constă în transformarea azotului

în oxigen ca urmare a bombardării cu particule alfa. Această reacție se poate scrie astfel:

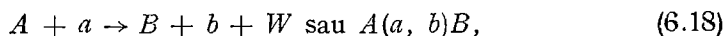


Realizarea acestei reacții nucleare a deschis epoca „alchimiei moderne” deoarece a realizat vechiul vis al transformării elementelor.

Putem înțelege mai bine ce reprezintă o reacție nucleară, dacă o comparăm cu o reacție chimică obișnuită:



În urma reacției chimice, între fluor și hidrogen, ia naștere o moleculă de acid fluorhidric, pe cînd dintr-o reacție nucleară între aceleași nuclee rezultă oxigen și heliu. Se observă că în ambele cazuri se degajează o cantitate de energie, motiv pentru care ambele reacții se numesc *exoterme* sau *exoenergetice*. În cazul în care producerea reacției necesită consumul unei energii din exterior, reacția se numește *endotermă* sau *endoenergetică*. Comparînd valorile energiilor în cele două cazuri mai sus prezentate, se vede că în reacția nucleară se pune în libertate o cantitate mult mai mare de energie, decît în oricare reacție chimică cunoscută. În general o reacție nucleară se poate scrie simbolic:



unde  $A$  și  $B$  sînt nucleul țintă și cel rezultat;  $a$  și  $b$  sînt particula bombardantă și particula emisă, iar  $W$  este energia de reacție, care dacă este  $< 0$  reacția este numită endoenergetică, iar dacă este  $> 0$  exoenergetică. Energia de reacție se prezintă sub formă de energie cinetică, ce se obține pe seama reacției sau care trebuie cedată particulei pentru a putea pătrunde în nucleu și a produce transformarea dorită.

Într-o reacție nucleară se conservă: a) energia totală, b) impulsul total, c) sarcina electrică totală, d) suma numerelor de masă.

Să discutăm pe rînd consecințele acestor legi de conservare. Legea de conservare a energiei ne va conduce la expresia:

$$(m_1c^2 + E_1) + (m_2c^2 + E_2) = (m_3c^2 + E_3) + (m_4c^2 + E_4), \quad (6.19)$$

unde  $E_1, E_2, E_3, E_4$  sînt energiile cinetice ale nucleelor și particulelor participante la reacție, în ordinea  $a(A, B)b$ , iar  $mc^2$  sînt energiile proprii ale nucleelor și particulelor, conform teoriei relativității. De aci:

$$W = E_3 + E_4 - E_1 - E_2 = [m_1 + m_2 - m_3 - m_4]c^2. \quad (6.20)$$

De aci se vede că energia de reacție se poate calcula direct, cunoscînd doar masele exacte ale componentilor care intră în reacție. Ca exemplu, putem calcula energia de reacție pentru transformarea azotului în oxigen prin bombardare cu particule alfa:

$$\begin{aligned} W &= 931 \cdot (14,0075256 + 4,0038761 - 17,0045374 - 1,0081451) = \\ &= -1,188 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Deoarece  $W < 0$  reacția este endotermă și deci necesită o energie inițială pentru particulele alfa bombardante, de cel puțin 1,188 MeV. Se poate spune că reacțiile endoterme au un *prag de reacție*, dat de valoarea lui  $W$ .

Legea de conservare a impulsului pentru o reacție nucleară se va scrie:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_3 \vec{v}_3 + m_4 \vec{v}_4, \quad (6.21)$$

unde  $\vec{v}$  este viteza unui component al reacției. Legea de conservare a impulsului ne conduce la concluzia că energia de prag pentru o reacție nucleară este mai mare decât  $W$ . Pentru a demonstra acest lucru să aplicăm legea de conservare a impulsului pentru cazul particular al nucleului țintă în repaus ( $E_2 = 0$ ). În momentul în care nucleul este lovit de particulă, nucleul se va pune în mișcare în virtutea legii de conservare a impulsului. Rezultă că o parte din energia cinetică a particulei incidente se va cheltui transformându-se în energie cinetică de mișcare a nucleului și numai restul de energie este folosit pentru reacția propriu-zisă. Astfel pragul de reacție va fi dat de

$$E_{\text{prag}} = |W| + E_{nc}, \quad (6.22)$$

unde  $E_{nc}$  este energia cinetică preluată de nucleul compus prin alăturarea nucleului țintă și a particulei incidente. Conservarea impulsului ne va da atunci:

$$m_2 v_2 = (m_2 + m_1) \cdot v_{nc} \text{ de unde } v_{nc} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2, \quad (6.23)$$

unde  $m_2$  este masa particulei,  $m_1$  — masa nucleului țintă,  $v_2$  — viteza particulei,  $v_{nc}$  — viteza nucleului compus. Atunci:

$$E_{nc} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot v_{nc}^2 = \frac{m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot E_{\text{prag}},$$

de unde:

$$E_{\text{prag}} = |W| \frac{m_1 + m_2}{m_1}. \quad (6.24)$$

Pentru reacția descrisă anterior  $W = 1,188$  MeV și deci  $E_{\text{prag}} = 1,286$  MeV.

Am folosit în raționamentul anterior noțiunea de *nucleu compus*. În concepția actuală pe care o avem asupra majorității tipurilor de reacții nucleare la joasă energie, nucleul compus este un stadiu intermediar al reacției nucleare, reacție ce decurge în trei etape: stadiul de particulă și nucleu țintă independente, stadiul de nucleu compus (sau intermediar) și stadiul de dezintegrare a nucleului compus (model N. Bohr de reacție nucleară). Experiențele arată că acest model corespunde realității (pentru energii nu prea mari ale particulei incidente), formarea nucleului compus fiind o realitate fizică dovedită.

Pe lângă legea de conservare a energiei și a impulsului, la o reacție nucleară se conservă și sarcina totală, și suma numerelor de masă, cele două legi putînd fi scrise astfel:

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4; \quad A_1 + A_2 = A_3 + A_4. \quad (6.25)$$

Aceste două legi au fost folosite deja la scrierea ecuațiilor simbolice ce descriu reacțiile nucleare.

Nu întotdeauna energia de prag a reacției nucleare determină și valoarea minimă a energiei particulei incidente pentru ca o reacție nucleară să aibă



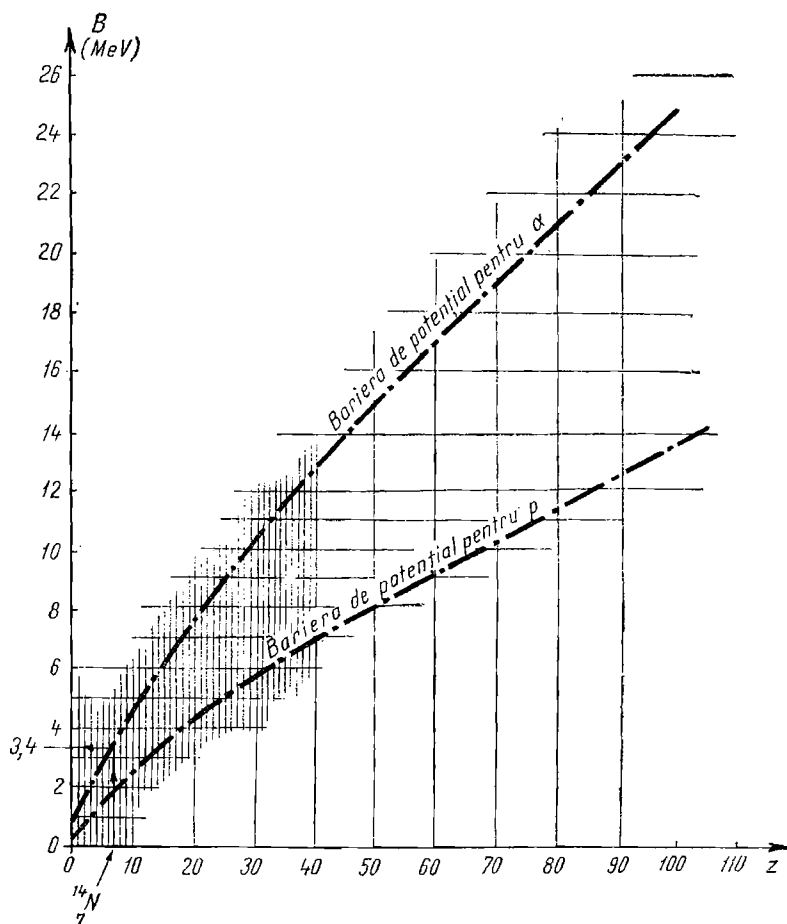
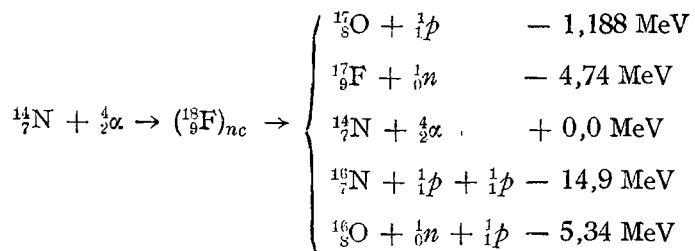


Fig. V.6.11

loc. Energia de prag mai sus discutată se referă doar la energia minimă necesară pentru ca o reacție nucleară să aibă loc, dar nu spune nimic în legătură cu energia necesară ca particula să intre în nucleu. Într-adevăr, am văzut că pentru ca o particulă să atingă nucleul este nevoie de o energie mai mare sau cel puțin egală cu cea a barierei de potențial coulombiene ( $B$ ). În acest fel condiția  $E_2 \geq E_{\text{prag}}$  este o condiție necesară dar nu și suficientă pentru ca o reacție nucleară să aibă loc. Se mai cere îndeplinită și condiția  $E_2 \geq B$ . În acest caz, particula va putea pătrunde în nucleu și va avea suficientă energie pentru a efectua transformarea nucleară. În fig. V.6.11 se dă graficul dependenței înălțimii barierei de potențial,  $B$ , pentru reacții cu particule  $\alpha$  și  $p$ .

Deoarece reacția nucleară are ca etapă intermediară formarea unui nucleu compus sînt posibile, principial, mai multe căi de desăvîrșire a reacției. Astfel, revenind la cazul bombardării azotului cu particule alfa, în care caz nucleul

intermediar este un izotop al fluorului, putem să ne așteptăm în principiu la următoarele reacții:



Cum știm dinainte care este probabilitatea realizării unei căi oarecare, din cele posibile? Pentru aceasta, un indiciu important îl obținem calculând energiile de reacție, din bilanțul maselor. Din analiza valorilor obținute (trecute în dreptul fiecărei reacții), rezultă că cel mai probabil proces este al treilea. În realitate acest proces nu este o reacție nucleară deoarece nu conduce la modificarea structurii nucleare și se numește *împrăștiere*. Toate celelalte procese sînt reacții nucleare propriu-zise, care necesită pentru producere o energie cinetică a particulei alfa de minimum energia de prag calculată din energiile de reacție respective. Din cele arătate rezultă că nu la orice ciocnire a particulei alfa cu nucleul se va produce o reacție nucleară. O măsură a numărului actelor de ciocnire cu nucleul se poate obține calculînd suprafața de ciocnire, care reprezintă aria cercului de rază egală cu suma razelor nucleului ciocnit și a particulei incidente (în aproximația nucleelor sferice) fig. V.6.12:  $\pi(R_p + R_n)^2$ . Ne așteptăm ca probabilitatea de a se efectua o reacție nucleară dată, să fie proporțională cu această arie. Această probabilitate se numește *secțiune eficace de reacție*. Ca unitate de măsură pentru secțiunea eficace s-a ales aria aproximativă pe care o prezintă un nucleu cu raza de  $10^{-12}$  cm:

$$1 \text{ barn (b)} = 10^{-28} \text{ cm}^2. \quad (6.26)$$

Revenind la exemplul ciocnirii  $\alpha - N$ , putem spune de exemplu că pentru energii ale particulelor  $\alpha$  mai mici de 6 MeV secțiunile eficace vor fi  $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_5$ ,  $\sigma_4 = 0$ . Se observă că reacția nucleară descoperită de Rutherford este cea mai probabilă reacție din acest caz. Dacă în întreaga probă ce este iradiată cu particule alfa, avem  $N$  nuclee pe  $\text{cm}^2$ , atunci putem vorbi de o *secțiune (totală) macroscopică de reacție* dată de relația:

$$\Sigma = N\sigma. \quad (6.27)$$

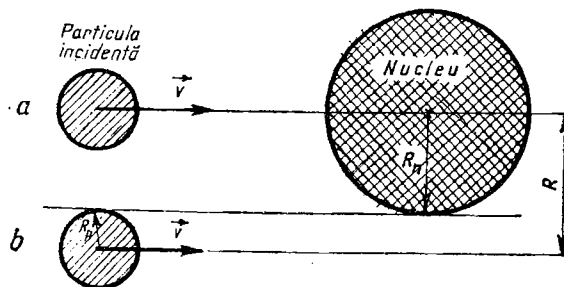


Fig. V.6.12

Deoarece secțiunea eficace se măsoară în  $\text{cm}^2$ , iar densitatea de nuclee în  $\text{cm}^{-3}$  rezultă că secțiunea eficace macroscopică se va măsura în  $\text{cm}^{-1}$ .

Dacă analizăm nucleele, ce rezultă din reacția mai sus discutată din punct de vedere al numărului de protoni și de neutroni pe care îl conțin, vom observa că nucleele  ${}^{17}_9\text{F}$  și  ${}^{16}_7\text{N}$  nu pot fi stabile deoarece nu conțin numărul optim de protoni și de neutroni. Ca urmare, nucleul de  ${}^{17}_9\text{F}$  este radioactiv  $\beta^+$  (cu  $T_{1/2} = 7,4$  s) iar nucleul de  ${}^{16}_7\text{N}$  este radioactiv  $\beta^-$  (cu  $T_{1/2} = 68$  s). În acest fel, ca urmare a reacției nucleare s-au obținut substanțe radioactive care nu sînt găsite în natură. Acest fenomen se numește *radioactivitate artificială*. Reacții de acest fel pot fi obținute și cu particule de alt tip cum ar fi neutronii sau protonii. Datorită faptului că neutronii nu posedă sarcină electrică, nu sînt împiedicați să se apropie de nucleu (de către bariera coulombiană de potențial). În acest fel, reacțiile cu neutroni pot avea loc chiar la energii apropiate de zero, ceea ce explică răspîndirea lor ca metodă de obținere a transformărilor nucleare. Ca exemplu de astfel de ciocnire neutron-nucleu să luăm cazul:



Dacă rezultatul reacției este înglobarea neutronului în nucleu, și singura particulă emisă este o cuantă gamma, reacția se numește de *captură radiativă*. Dacă ca urmare a reacției rezultă un nucleu radioactiv, reacția se numește de *activare*; dacă reacția are ca rezultat reemisia unui neutron, procesul se numește *împrăștiere*. Cu toate că bariera coulombiană de potențial, în cazul reacțiilor cu neutroni nu joacă un rol direct, ea afectează totuși rezultatul posibil al reacției prin faptul că ieșirea unei particule încărcate din nucleu, în urma reacției, este condiționată de ea. Acest lucru se poate vedea din tabelul V.16, care sumează posibilitățile și caracteristicile corespunzătoare ale reacției borului cu neutroni.

TABELUL V.16

Tipul reacției	Nucleul rezultat	Secțiunea microscopică (barni)	Caracteristicile nucleului rezultat	$W$ MeV	$B$ MeV
B ( $n, \gamma$ ) captură	${}^{11}_5\text{B}$	0,5	stabil	+ 8,65	—
B ( $n, p$ ) activare	${}^{10}_4\text{Be}$	0,1	instabil $\beta$	+ 0,74	1,21
B ( $n, \alpha$ )	${}^7_3\text{Li}$	4 017	stabil	+ 2,79	1,82
B ( $n, n'$ ) împrăștiere	${}^{10}_5\text{B}$	0,88	stabil	—	—

Se poate spune că în general secțiunile eficace, pentru reacțiile cu neutroni, cu emisie de particule încărcate, sînt foarte mici datorită barierei coulombiene de potențial. De aceea doar la nucleele cu  $Z$  mic (la care bariera coulombiană este relativ mică) reacția cu emisie de particule încărcate produse de cioc-

nirea cu neutronii incidenți de mică energie, este probabilă. Astfel de cazuri sînt reacțiile:

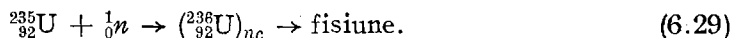
$$^{17}\text{N}(n,p)^{14}\text{C} \quad W = + 1,14 \text{ MeV}; \quad B \cong 1,8 \text{ MeV} \quad \sigma = 1,75 \text{ bn.}$$

$$^{35}\text{Cl}(n,p)^{35}\text{S} \quad W = + 1,44 \text{ MeV}; \quad B \cong 3,6 \text{ MeV} \quad \sigma = 0,19 \text{ bn.}$$

$$^{10}\text{B}(n,\alpha)^7\text{Li} \quad W = + 2,79 \text{ MeV}; \quad B \cong 2,7 \text{ MeV} \quad \sigma = 4017 \text{ bn.}$$

Ultima reacție, avînd o secțiune mare de captură a neutronilor, este foarte des folosită pentru ecranarea surselor de neutroni.

Printre reacțiile cu neutroni, care prezintă o deosebită importanță practică se află și un tip deosebit de reacție numită *fisiune*. Reacția de fisiune, notată prescurtat  $(n,f)$ , se caracterizează prin aceea că nucleul țintă se dezintegrează în două sau mai multe nuclee de mase apropiate. Ele se numesc *fragmente de fisiune*. Pe lîngă fragmente de fisiune se mai emit, în urma reacției, o mulțime de particule ușoare ca  $\alpha$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $\gamma$  etc. Fisiunea este o proprietate a nucleelor grele care prezintă un grad mare de instabilitate, determinat de numărul mare de protoni pe care îi conțin. Astfel  $^{235}\text{U}$  se fisionează cu neutroni de energie foarte mică. Ca în cazul oricărei reacții, și reacția de fisiune are nevoie pentru a se produce, de o anumită energie de activare (fig. V.6.13). Energia de activare, deci de desfacere a nucleului în fragmente de fisiune, este de aproximativ 6 MeV. Să vedem care este situația în cazul fisionării  $^{235}\text{U}$  cu neutroni. Reacția merge după schema



La formarea nucleului compus, bilanțul energetic este:  $W = 931 (236, 12603 - 236, 11912) = 6,45 \text{ MeV}$  (masa exactă a izotopului  $^{235}\text{U}$  este  $= 236, 11912 \text{ a.m.u.}$ ). Rezultă că prin formarea nucleului compus se degajează o cantitate de energie atît de mare, încît chiar dacă neutronul nu aduce nici o contribuție energetică (posedă energie cinetică nulă), reacția de fisiune poate avea loc.

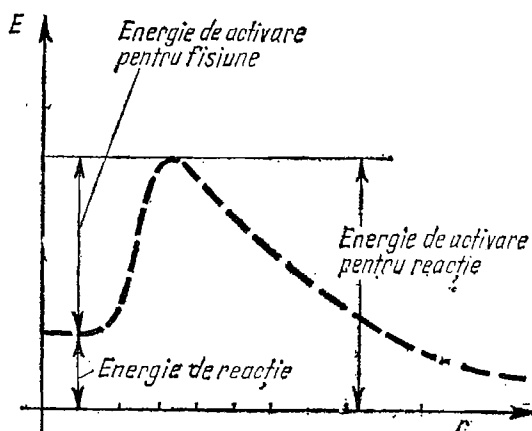


Fig. V.6.13

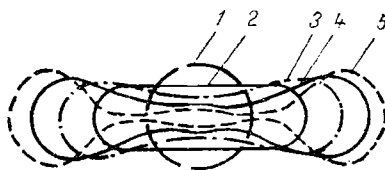
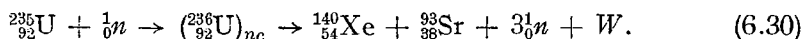


Fig. V.6.14

Reacția de fisiune poate fi ușor înțeleasă pe baza modelului picăturii. În acest model, fisiunea corespunde procesului de rupere a picăturii nucleare ca urmare a înglobării neutronului și a modificării condițiilor interne de echilibru. Fazele diferite ale procesului de fisiune, numerotate în ordinea scurgerii timpului și calculate conform modelului picăturii, sînt arătate în fig. V.6.14. Deoarece ruperea are loc după formarea nucleului compus, se pot obține o varietate de produse de fisiune. Din această varietate, cu titlu ilustrativ, vom indica reacția



Acest exemplu ilustrează afirmația că nucleele rezultate din procesul de fisiune au mase apropiate. O altă caracteristică deosebit de importantă a reacției de fisiune este emiterea unui număr relativ mare de neutroni (în medie 2—3 neutroni pentru un act de fisiune la  ${}^{235}_{92}\text{U}$ ). Acest aspect se poate explica foarte simplu. Raportul neutroni/protoni la nuclee grele este mult mai mare ca cel corespunzător nucleeor de masă medie, rezultate din fisiune. În consecință, fragmentele de fisiune prezintă un exces de neutroni față de cel optim (pentru stabilitate nucleară maximă) ceea ce va determina o radioactivitate  $\beta^-$  a fragmentelor. În același timp excesul de neutroni va conduce la eliberarea și expulzarea unui număr relativ mare de neutroni liberi în urma actului de fisiune. În fine, o analiză din punct de vedere a energiilor de legătură, scoate în evidență energia mare care se eliberează la un act de fisiune. Într-adevăr, fragmentele de fisiune care se formează au o energie de legătură pe nucleon mai mare decît a nucleului care a fisionat. Acest lucru înseamnă, pe de o parte, că fisiunea conduce la sisteme mai stabile, iar pe de altă parte, că diferența energiilor de legătură se va emite în exterior. Astfel, la  ${}^{235}\text{U}$ , energia de legătură pe nucleon este de  $\approx 7,5$  MeV, pe cînd la fragmentul de fisiune de masă medie ea este de  $\approx 8,5$  MeV, ceea ce conduce la emisia unei energii de aproximativ 1 MeV pe nucleon, deci aproximativ 230 MeV de fiecare act de fisiune. Această energie enormă se repartizează între fragmentele de fisiune și particulele emise, sub formă de energie cinetică. Prin ciocniri cu atomii această energie se transferă treptat mediului străbătut de fragmente și particule, determinînd creșterea puternică a temperaturii. Ca urmare, reacția de fisiune poate, principial, să fie folosită ca sursă de energie (fisionarea unui gram de  ${}^{235}\text{U}$  conduce la cedarea unei cantități de energie de  $3 \cdot 10^4$  kWh). Pentru a realiza acest lucru, este necesară fisionarea tuturor nucleeor, respectiv întreținerea procesului de fisiune pe o perioadă dată de timp, ceea ce s-a dovedit posibil datorită numărului mare de neutroni care se emit în urma procesului de fisiune și care, astfel, pot fi folosiți pentru întreținerea reacției. Fenomenul a fost înțeles de E. Fermi, care în 1942 a realizat prima instalație în care reacția de fisiune se autoîntreține. Acest proces a fost numit *reacție în lanț*, iar dispozitivul experimental a fost denumit *pilă nucleară* sau *reactor*.

*nuclear*. Primul reactor nuclear a fost construit folosind drept „combustibil” nuclear uraniul—235 care, după cum am văzut, fisionează sub influența neutronilor de foarte joasă energie. Se știe că  $^{235}\text{U}$  prezintă o secțiune de fisiune foarte mare pentru neutronii de joasă energie și o secțiune neglijabil de mică pentru fisiunea cu neutroni de mare energie. Din această cauză, întreținerea reacției în lanț se poate realiza numai dacă neutronii de mare energie, emiși la fisiune, sînt „încetiniți” pînă ajung la o energie suficient de mică încît reacția de fisiune să se poată produce. În acest caz reacția în lanț va reprezenta procesul în care în urma unui act de fisiune s-au născut mai mulți neutroni, care, încetiniți, produc la rîndul lor alte reacții de fisiune din care iau naștere alți neutroni care încetiniți vor fi capabili să fisioneze alte nuclee de uraniu ș.a.m.d. Procesul de creștere în avalanșă a numărului de neutroni, a numărului de acte de fisiune, a energiei cedate mediului înconjurător, merge pînă la o limită determinată de condițiile experimentale din fiecare reactor. Menținerea reacției în lanț la un nivel constant, convenabil, se realizează prin captarea unei părți a neutronilor rezultați din fisiune prin procese care nu conduc la fisiune (reacții de captură, de activare etc.), astfel încît numărul mediu de neutroni care produc fisiunea să fie egal cu numărul mediu de neutroni care rezultă din fisiune. Acest regim se numește *regim critic*. Orice depășire a acestui regim poate conduce la creșterea necontrolabilă a reacției în lanț, care astfel poate să cuprindă, cu o mare rapiditate, întreaga masă de „combustibil” nuclear disponibil. Acest mod de dezvoltare necontrolată a reacției în lanț se realizează în „bombele atomice” (de fapt nucleare!). Degajarea instantanee a unei cantități foarte mari de energie în acest caz, conduce la un caracter exploziv al reacției în lanț, cu urmări distrugătoare pentru mediul înconjurător și pentru oameni. Pentru a preîntîmpina astfel de accidente, reactoarele nucleare sînt prevăzute cu dispozitive automate de securitate (bare de siguranță) care permit în orice moment să se preîntîmpine creșterea fluxului de neutroni din reactor și deci să se preîntîmpine transformarea reacției în lanț controlată într-una necontrolată.

Părțile componente ale unui reactor nuclear (în mare) sînt următoarele: (a) *Zona activă*, care reprezintă regiunea în care se desfășoară reacția în lanț; ea conține combustibilul nuclear, moderatorul, barele de reglaj și de siguranță și sistemul de răcire. Zona activă de obicei nu este mai mare de aproximativ 1—2 m<sup>3</sup>. (b) *Moderatorul* este un material care asigură încetinirea neutronilor rezultați din fisiunea nucleelor. Încetinirea se realizează prin ciocnirea neutronilor cu atomii moderatorului. În urma acestui proces, neutronii posedă o energie mai mică, iar moderatorul, preluînd energia, se va încălzi. După modul în care moderatorul este așezat în interiorul zonei active, se pot deosebi două categorii de reactoare: *omogene* (amestec omogen moderator-combustibil) sau *eterogene* (regiuni de moderator între care există regiuni cu combustibil). Cel mai des, ca material moderator se folosește apa, apa grea, grafitul. (c) *Combustibilul nuclear* utilizat de obicei este uraniul natural sau îmbogățit în izotopul 235. În reactoarele omogene se amestecă cu moderatorul în mod omogen, iar în reactoarele eterogene se găsește așezat în cilindri de oțel (bare), introduși în zona activă. Dacă reacția în lanț se realizează cu alte tipuri de combustibil, atunci este posibil ca ea să se petreacă și sub influența neutronilor rapizi. Acest tip de reactori *cu neutroni rapizi*, sînt mai greu de condus și de menținut în regim critic, din care cauză, în prezent, sînt mai puțin răspîndiți. (d) *Barele de reglaj și de siguranță* se construiesc din material cu o

secțiune mare de captură pentru neutroni. Astfel de materiale sînt cadmiul și borul. Prin introducerea (manual sau automat) mai mult sau mai puțin adînc în zona activă, se poate regla numărul de acte de fisiune care se produc în unitatea de timp și deci puterea reactorului. (e) *Sistemul de răcire* este compus dintr-o serie de tuburi care străbat zona activă și prin care trece un lichid ce preia căldura degajată în această zonă, menținînd temperatura zonei în limite rezonabile. În același timp, răcirea lichidului încălzit se efectuează în afara zonei active, energia corespunzătoare fiind folosită la generarea curentului electric printr-un procedeu oarecare (cazan cu aburi, turbină, generator de curent electric.) La reactoarele în care zona activă este mică, cantitatea de energie degajată este de asemenea mică, deci ele se folosesc pentru scopuri de cercetare. Celelalte poartă denumirea de *centrale atomoelectrice* sau, mai corect, *nucleareoelectrice*.

Ca sursă de energie, pe lîngă reacția de fisiune, se poate folosi și un alt tip de reacție: *reacția de fuziune*. Cu toate că acest tip de reacție este de mult timp cunoscut și cu toate că s-a dovedit și mai rentabil, pînă în momentul de față nu a putut fi folosit pentru obținerea de energie într-un proces controlat. Procesele necontrolate de fuziune au fost realizate în bombele cu hidrogen (termo-nucleare), mult mai distrugătoare ca cele atomice. Ca și în cazul reacțiilor de fisiune problema constă în a găsi o metodă care să permită autoîntreținerea, controlată, a reacției de fuziune. Reacția de fuziune constă în unirea a două nuclee ușoare pentru a forma un nucleu mai greu. Energia care se degajează în acest proces își are originea, la fel ca în cazul fisiunii, în faptul că nucleele cu masă atomică medie au o energie de legătură mai mare ca cele ușoare. Într-o reacție de fuziune energia cedată se poate calcula făcînd bilanțul masic, la fel ca în cazul reacțiilor obișnuite. Cantitatea de energie degajată cu această ocazie este enormă. Cu titlu ilustrativ se poate spune că la sinteza unui kilogram de heliu se eliberează o cantitate de energie egală cu  $1,5 \cdot 10^8$  kWh. Din păcate această sinteză se poate produce doar în cazul în care se învinge forța de respingere electrostatică între cei doi protoni (bariera electrostatică de potențial.) Cum această barieră este mare, deocamdată este imposibil să se realizeze o autoîntreținere pe timp îndelungat a reacției de fuziune. În tabelul V.17 sînt date caracteristicile principale ale celor mai importante reacții de fuziune posibile.

TABELUL V.17

Reacția de fuziune	Energia de reacție IV MeV	Înălțimea barierei de potențial exprimată în	
		MeV	°K
$^1\text{H} + ^1\text{H} = ^2\text{D} + \beta$	1,53	0,48	$5,56 \cdot 10^9$
$^2\text{D} + ^1\text{H} = ^3\text{He}$	5,9	0,42	$4,9 \cdot 10^9$
$^3\text{H} + ^1\text{H} = ^4\text{He}$	21,3	0,395	$4,6 \cdot 10^9$
$^6\text{Li} + ^1\text{H} = ^4\text{He} + ^3\text{He}$	4,1	1,03	$1,2 \cdot 10^{10}$
$^{12}\text{C} + ^1\text{H} = ^{13}\text{N}$	2,0	1,72	$2,0 \cdot 10^{10}$
$^{13}\text{C} + ^1\text{H} = ^{14}\text{N}$	8,2	1,75	$2,04 \cdot 10^{10}$
$^{15}\text{N} + ^1\text{H} = ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$	5,2	1,95	$2,26 \cdot 10^{10}$
$^3\text{He} + ^4\text{He} = ^7\text{Be}$	1,6	0,76	$8,8 \cdot 10^9$

Din punct de vedere istoric reacția de fuziune a fost găsită ca singurul izvor de energie care să poată întreține strălucirea Soarelui și a stelelor. În stele se

presupune că reacția termonucleară se realizează continuu, întreținerea ei fiind obținută prin temperatura ridicată a gazelor care realizează la scara atomică reacția de fuziune. Temperatura ridicată a atomilor gazelor presupune o energie cinetică de agitație termică foarte mare. Echivalentul energiei medii de agitație termică se poate obține din relația  $1 \text{ MeV} = 1,16 \cdot 10^{10} \text{ }^\circ\text{K}$ . Exprimiind energia barierei de potențial în  $^\circ\text{K}$ , echivalente energiei agitației termice, putem vedea care trebuie să fie temperatura mediului gazos în care energia cinetică medie a atomilor să fie egală cu energia barierei și deci la care reacția de fuziune să poată avea loc. Dar acest lucru nu este suficient, deoarece cantitatea de nuclee fuzionabile s-ar consuma rapid, iar reacția s-ar opri. Faptul că în stele aceste reacții țin de milioane de ani, ne duce la concluzia că procesul de fuziune se autoîntreține, prin refacerea atomilor inițiali. Se cunosc astăzi câteva astfel de cicluri de reacții de fuziune care se pot întreține. Încercările de obținere a reacțiilor de fuziune în laborator au mers pe aceeași cale ca în stele: ridicarea temperaturii gazului ai cărui atomi trebuie să fuzioneze. Aceste reacții, din acest motiv, se numesc *reacții termonucleare*. Cu toate eforturile, pînă în momentul de față astfel de reacții nu au putut fi întreținute în condiții de laborator.

În concluzie, reacțiile nucleare reprezintă un domeniu deosebit de dezvoltat și de interesant al fizicii nucleare. Se poate spune că cele mai multe aplicații ale fizicii nucleare în știință, tehnică și în viața de toate zilele sînt legate mai mult sau mai puțin de acest capitol. În legătură cu reacțiile nucleare la energii foarte mari, amintim doar că ele sînt în momentul de față foarte bine studiate, deoarece se speră că cu ajutorul lor se vor putea dezlega multe necunoscute care astăzi stau în fața fizicii particulelor elementare.

## 6.7 METODE EXPERIMENTALE ÎN FIZICA NUCLEARĂ

Vom face o trecere în revistă a două probleme experimentale specifice fizicii nucleare: detectorii și acceleratorii.

Radiațiile și particulele emise de substanțele radioactive nu pot fi detectate și identificate direct prin intermediul simțurilor noastre, ci doar indirect, prin efectele lor. Există o gamă largă de efecte ale trecerii radiației prin materie. Toate efectele presupun un transfer de energie din partea particulei către mediu, în acest proces particula micșorîndu-și energia. Se poate vorbi, în acest fel, de *procese primare* legate de interacțiunea directă a particulei incidente cu moleculele, atomii sau nucleele mediului; se poate vorbi apoi de *procese secundare* ale acestor interacțiuni și, în sfîrșit, de *procese* sau *efecte globale*, vizibile macroscopic, ale acestor interacțiuni. În cadrul proceselor primare, *ciocnirea* reprezintă fenomenul cel mai important. Din acest punct de vedere particulele cu sarcină electrică se deosebesc net de cele neutre. Cele neutre interacționează prin ciocniri, în sensul mecanic al cuvîntului. Cele care posedă sarcină electrică nu efectuează ciocniri de tip mecanic căci nu ajung în contact direct cu particula ciocnită din cauza puternicei interacțiuni coulombiene ce modifică traiectoria. Această modificare este esența ciocnirii. Prin intermediul cîmpului particula cedează energie, determinînd excitări sau ionizări ale atomilor sau moleculelor mediului. În gama radiațiilor electromagnetice interacțiunea poate fi: un *efect fotoelectric*, un *efect Compton* sau un *efect de generare de perechi electron-pozitron*. Neutronul interacționează doar



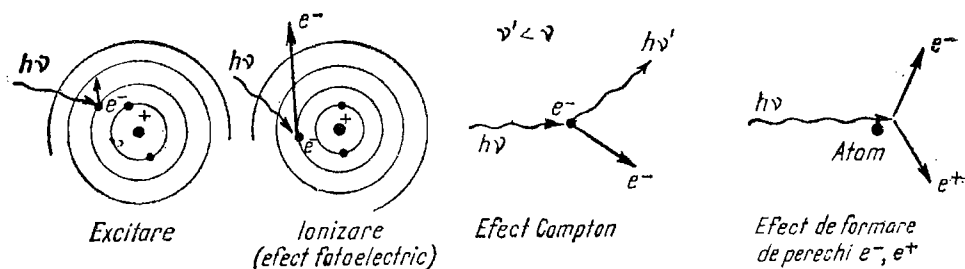


Fig. V.6.15

prin ciocniri directe cu nucleele. Efectul fotoelectric constă în emisia unui electron dintr-un atom sau dintr-o moleculă, ca urmare a ciocnirii cu o cuantă de radiație ultravioletă, X sau  $\gamma$ . În acest proces, întreaga energie a cuantei de radiație este cheltuită, fapt care se soldează cu dispariția ei. În efectul Compton nu toată energia se cedează electronului. În consecință, radiația își schimbă direcția de propagare purtând în continuare o energie mai mică, deci o frecvență mai mică. Generarea de perechi este un efect caracteristic radiațiilor  $\gamma$  de mare energie ( $> 1$  MeV) și constă în transformarea unei cuante  $\gamma$  într-un electron negativ și un electron pozitiv, transformare ce reprezintă un fenomen tipic în lumea particulelor elementare. Electronii ce rezultă din aceste efecte pot produce efectele secundare amintite, deoarece posedă o fracțiune considerabilă din energia cuantei incidente. Aceste efecte primare sînt redată schematic în fig. V.6.15.

Particulele încărcate vor excita atomii sau moleculele. Ca urmare, se vor naște radiații de dezexcitare (fluorescență, scintilație). Dacă particula cedează o energie mai mare, atomul sau molecula pot fi ionizate. Se produc astfel perechi de ioni, proces primar pentru foarte multe efecte macroscopice.

În fine, se pot produce disocieri și ruperi ale moleculelor, ce reprezintă procesele elementare pentru efectele chimice, fotochimice și biologice ale radiațiilor.

Principalele efecte ale radiațiilor sînt: efectele termice, chimice, fotografice, electrice, luminoase, biologice, de colorare, de condensare, de evaporare etc. Efectele termice sînt cele mai generale, deoarece ele reprezintă un final pentru toate procesele primare și secundare, în sensul că pînă la urmă energia cinetică adusă de particula incidentă este cedată parțial mediului sub formă de agitație termică. Pe baza acestor efecte (a căror dezvoltare nu o putem face aici) se construiesc detectoarele de radiații. În acest sens, tabelul V.18 dă o imagine de ansamblu a tipurilor de detectori. Acestea se pot împărți în trei mari categorii: a) *detectori în regim continuu* care înregistrează în ansamblu fluxul de particule ce cad pe detector, b) *detectori de impulsuri* care înregistrează trecerea fiecărei particule și c) detectori care permit *vizualizarea traiectoriei* individuale a particulelor.

Să discutăm ceva mai amănunțit despre detectori cei mai importanți. — *Placa nucleară* sau emulsia nucleară se deosebește în principiu de cea fotografică, obișnuită, prin grosimea emulsiei: de  $\sim 50 \mu\text{m}$  (față de  $5\ldots 20 \mu\text{m}$  normal). Ea se folosește, sau pentru determinarea fluxurilor globale de particule încărcate — prin măsurarea gradului de înnegrire a plăcii — (detector tip (a)), sau pentru urmărirea traiectoriilor particulelor ce au străbătut emulsia.

și au determinat disocierea halogenurii de argint din emulsie (cu microscopul optic de mărire medie:  $40 \times \dots 150 \times$ ). Cum halogenura se găsește în emulsie sub formă de granule, trecerea particulei se va materializa printr-un șir de granule negre. În felul acesta placa reține urma trecerii particulei (detector de tip (c)). Tot datorită acestor efecte placa fotografică se folosește la radiografii cu radiații X sau  $\gamma$ -grafii.

— Detectorii bazați pe *metode calorimetrice* — au fost folosiți la începutul dezvoltării radioactivității. Se bazează pe observația că un preparat radioactiv are întotdeauna o temperatură ceva mai ridicată decât mediul înconjurător, din cauză că energia particulelor emise de substanța radioactivă se pierde prin ciocniri cu mediul, producând creșterea temperaturii preparatului. Astfel de măsurători au permis cunoașterea și măsurarea energiei particulelor emise. Măsurătorile se efectuează în calorimetre.

— Detectarea prin *metode electrice* se bazează pe procesul de formare a perechilor de ioni de către radiațiile incidente. Mișcarea dirijată a sarcinilor create reprezintă un curent electric care, măsurat cu dispozitive adecvate, permite determinarea fluxului integral de particule. Astfel, *cilindrul Faraday* cuplat cu un electroscoap a servit lui J. Perrin în 1895 la determinarea semnului sarcinii electronului. Aceeași metodă se folosește azi la măsurarea fluxului de particule extrase din acceleratoarele de particule. În afară de măsurarea directă a fluxului prin sarcina purtată de particule, se mai cunoaște o metodă de o deosebită importanță: *colectarea ionilor produși în gaze* (camere de ionizare, contori Geiger—Müller, contori cu scînteii), *în cristale dielectrice* — diamant de exemplu (contori cu cristal) sau în *semiconductori* (detectorii cu semiconductori). Un exemplu concret de cameră de ionizare este redat în fig. V.5.3. Tot acolo s-a explicat funcționarea concretă a acestor camere, ce diferă unele de altele doar prin forma lor constructivă. Variantele moderne ale camerelor de ionizare măsoară curenții de ionizare nu cu electroscoapul ci cu dispozitive electronice de amplificare, numite *electrometre*. Dezavantajul mare al camerelor de ionizare constă în valoarea mică a intensității curentului de ioni care ia naștere. Dintre metodele cele mai bune, propuse pentru creșterea acestui curent, (pentru ușurarea măsurării lui), amintim metoda *amplificării în gaz* propusă de H.A. Geiger și E. Rutherford și îmbunătățită de Müller, sub denumirea actuală de *contor Geiger-Müller* (G.M.). Amplificarea în gaz are loc în modul următor: între electrozii unei camere cilindrice de ionizare (fig. V.6.16) se

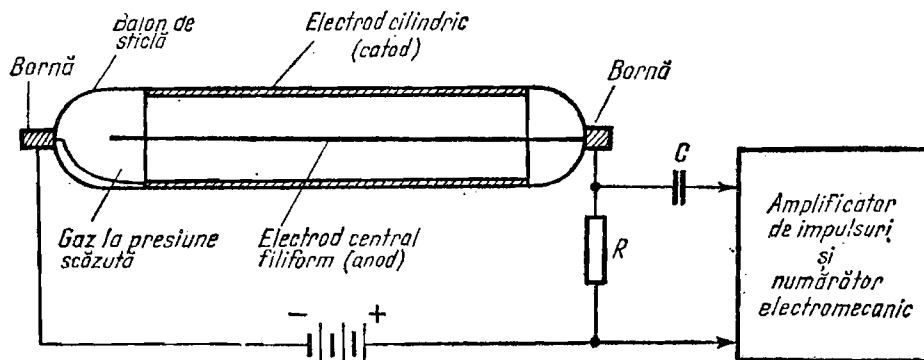


Fig. V.6.16

aplică un potențial suficient de ridicat pentru ca ionii colectați (în particular electronii) să primească energie suficient de mare pentru a crea la rîndul lor ionizări secundare, fenomenul avînd astfel un caracter de avalanșă. Un alt avantaj al contorilor G.M. este posibilitatea punerii în evidență a trecerii individuale a particulelor prin contor, deoarece trecerea fiecărei particule se materializează prin apariția unui curent de ionizare de durată mică, numit puls (sau impuls electric), care amplificat permite înregistrarea trecerii particulei pe un contor electromecanic (telefonice de exemplu). Pe rezistența  $R$ , impulsul de curent se transformă în impuls de tensiune ce ajunge la amplificator prin capacitatea  $C$ . Pentru ca detectorul să funcționeze este necesară legarea firului central la borna pozitivă a bateriei de alimentare. Tensiunea necesară este cuprinsă între 300 și 2000 V.

— *Detectorii cu semiconductori*. Dintre detectorii cu colectare de sarcini care în momentul de față au căpătat o mare aplicabilitate sînt detectorii cu semiconductori. Ei au marele avantaj că pot determina cu o deosebit de mare precizie ( $\sim 0,1\%$ ) energia particulelor incidente, inaccesibilă multor detectori cunoscuți.

În principiu, acest detector constă dintr-un dispozitiv semiconductor (juncțiune) căruia i se aplică o diferență de potențial adecvată. La trecerea particulelor prin regiunea joncțiunii, ionii și electronii produși vor aduce un aport suplimentar la curentul electric care circulă în regim normal. Astfel, apare un impuls scurt de curent, care, amplificat, poate să fie înregistrat, permițînd măsurarea numărului și energiei particulelor detectate.

— *Detectorii cu scintilație* reprezintă varianta modernizată și sensibil îmbunătățită a spintariscopului lui Crooks. Acesta se baza pe observația din 1903 a fizicienilor Elster și Geitel că sulfura de zinc prezintă un fenomen de luminescență cînd este bombardată cu particule  $\alpha$ . Privită la microscop, această luminescență se dovedește a fi o însumare a unor scînteieri, scintilații la impactul particulei  $\alpha$  cu stratul de sulfură de zinc. Scintilația este în realitate radiația de dezexcitare a atomilor excitați în urma ciocnirii cu particula incidentă. Cu un astfel de dispozitiv a fost verificată experimental împrăștierea particulelor  $\alpha$  pe nuclee, s-a măsurat  $Z$ -ul elementelor, a fost detectată prima reacție nucleară, etc. Modernizarea spintariscopului a mers pe două căi: înlocuirea ochiului pentru detectarea scintilațiilor cu un aparat electric bazat pe efectul fotoelectric (fotomultiplicatorul) și găsirea unor scintilatori care să fie cît mai eficienți (cu randament cît mai mare).

— *Camera cu ceață* sau camera Wilson se bazează pe faptul că ionii creați într-o atmosferă suprasaturată cu vapori, sînt centrii de condensare, în jurul cărora se formează picături fine ale lichidului vaporizat. Aceste picături formează, „ceață“. Astfel C.T.R. Wilson a creat în 1911 camera ce-i poartă numele. Ea permite vizualizarea traiectoriei particulelor ionizante sub forma unei dîre fine de ceață de-a lungul traiectoriei particulei. Pentru a putea obține aceste imagini camera este iluminată lateral cu o lumină puternică; traiectoria de ceață, difuzînd puternic lumina, apare luminoasă pe un fond întunecat. Camera cu ceață nu lucrează în mod continuu, ci numai în anumite momente cînd se creează condițiile optime de saturare și formare a ceții. În acele momente un aparat fotografic „îmortalizează“ traiectoriile particulelor. Un exemplu al rolului deosebit de important jucat în dezvoltarea fizicii nucleare este faptul că pozitronul a fost descoperit studiîndu-se traiectoriile electronilor în camera Wilson plasată în cîmp magnetic.

TABELUL V.18

Efectul	Denumirea detectorului	Sensibil la	Construcția detectorului	Tipul de detector
Fotochimic	ochiul	$h\nu$ ; 3.700—7.600 Å	—	(a)
	placa fotografică	$h\nu$ ; 0 — 13.500 Å	1839 L. J. Daguerre	(a)
	placa nucleară	$\alpha, \beta, p$ , ioni, mezoni	1919 L. M. Misovski	(a) (c)
Electric	cilindrul Faraday	$\alpha, \beta$ ioni, $p$	1895 J. Perrin	(a)
	camera de ionizare	$\alpha, \beta, \gamma, X, \dots$	1896 M. și P. Curie	(a) (b)
	control G.M.	$\alpha, \beta, \gamma, X$	1924 H.A. Geiger, G. Müller	(b)
	contorul cu scintei	$\alpha$	1936 H. Greinacher	(b)
	contorul cu cristal	$\alpha, \beta$	1941 G. Stetter	(b)
	detectorul cu semiconductori	$\alpha, \beta, \gamma, p$ , ioni,	1949 K. G. McKay	(b)
Termic	calorimetrul	$\alpha, \beta, \gamma, p$	1903 P. Curie, A. Laborde	(a)
Luminescență	spintariscopul	$\alpha$	1903 W. Crookes	(b)
	detectorul cu scintilație	$\alpha, \beta, \gamma, X, n, p$ , ioni	1947 I. Broser, H. Kallman	(a) (b)
	detectorul Cerenkov	$\beta, p$ de mare energie	1947 I. A. Getting	(a) (b)
Camere (efecte de condensare și de evaporare)	camera cu ceață	$\alpha, \beta, p$	1911 C. T. R. Wilson	(c)
	camera cu difuzie	$\alpha, \beta, p$	1950 E. W. Cowan	(c)
	camera cu bule	$\beta, p$ , mezoni	1960 D. Glaser	(c)

TABELUL V.18 (continuare)

Efectul	Denumirea detectorului	Sensibil la	Construcția detectorului	Tipul de detector
Reacții nucleare	detector de activare	$(\alpha, \beta, p), n, (d)$	1933	(a)
	detectors cu bor	"	1938	(b)
	detectors cu protoni de recul	"	1930	(b)

— *Camera cu bule* este asemănătoare cu camera Wilson, dar este umplută cu un lichid (de exemplu cu propan). Aci fenomenul este de evaporare locală, determinată de energia cedată de particule pe parcursul traiectoriei. În acele locuri, lichidul se evaporă formînd bule de gaz, care iluminate lateral, ca și în cazul camerei Wilson, pot fi fotografiate. Ele sînt folosite azi foarte intens la studiul proprietăților și interacțiunilor particulelor elementare.

— *Detectorii de activare* se bazează pe reacțiile nucleare produse de particulele incidente de mare energie, în urma cărora se produc nuclee radioactive  $\alpha$ ,  $\beta$  sau  $\gamma$ . Acești detectori se folosesc mai ales pentru detectarea neutronului, deoarece el, neavînd sarcină electrică, nu produce ionizări. Cîteva exemple: a) folosirea reacției  $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$ . Izotopul 198 al aurului este radioactiv cu perioada de 2,7 zile, emițînd radiații  $\beta$  cu o energie maximă de 0,97 MeV și radiații  $\gamma$  cu o energie de 0,41 MeV. Secțiunea eficace a reacției pentru neutroni termici este mare ( $\sim 100$  b). Detectorul se construiește sub forma unor foițe subțiri de argint puse în fața unor detectori G.M. pentru radiații  $\beta$ . În felul acesta neutronii sînt detectați prin radioactivitatea  $\beta$  indusă. b) detectori cu bor bazați pe reacția  $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ . Particula  $\alpha$  este expulzată cu o energie de  $\sim 1,9$  MeV, iar secțiunea eficace este  $\sim 600$  b pentru neutroni termici. Deci se efectuează o conversie, în locul neutronului se cere înregistrată radiația  $\alpha$ . Constructiv, o sare de bor ( $\text{BF}_3$ ) se depune pe pereții unui contor G.M., transformîndu-l în acest fel în contor G.M. pentru neutroni. Să trecem acum la studiul acceleratoarelor. Menționăm de la început că pot fi accelerate doar particule ce posedă sarcină electrică, deoarece procesul de accelerare se efectuează în mod universal numai cu ajutorul cîmpului electric sau magnetic (variabil). Cîmpurile magnetice statice nu pot accelera, avînd astfel un rol secundar în accelerare (curbează traiectoria particulei). Dezvoltarea intensă a metodelor de accelerare începe cam de prin 1926, ca urmare directă a descompunerii reacțiilor nucleare. Pînă în 1926 reacțiile nucleare erau produse cu particule  $\alpha$  emise de izotopii radioactivi naturali. În curînd ele s-au dovedit a fi insuficient de energice pentru experiențele propuse. În tabelul V.19 sînt cuprinse principalele date relative la acceleratori.

Primul tip de accelerator este *acceleratorul electrostatic* sau *acceleratorul direct*. El se compune din următoarele părți: a) generatorul de înaltă tensiune (continuă), b) sursa de particule, c) tubul de accelerare, d) ținta. În principiu aceste părți componente se găsesc la toate tipurile de acceleratori. La acceleratorii direcți generatorul de înaltă tensiune poate fi orice tip de generator de înaltă

TABELUL V.19

Tipul	Denumirea	Construit în... de...	Cîmp magnetic	Frecvența cîmpului electric	Raza de rotație	Particulele accelerate	Performanțe în prezent
Acceleratori electrostatici (directi)	transformator de înaltă tensiune	1926 G. Breit	—	—	liniar	orice particulă încărcată cu sarcină	5MeV
	tip Cockroft-Walton	1932 J. D. Cockroft E. I. S. Walton	—	—	liniar		
	tip Van de Graaff	1929 Van de Graaff	—	—	liniar		~18MeV
Acceleratori liniari	liniar	1931 D. H. Sloane	—	const.	liniar	particule grele	20GeV
Acceleratori de rezonanță	ciclotronul	1934 E. O. Lawrence	const.	const.	variabil	$p, d, \alpha$ ioni	~20MeV
	sinerociclotron (fazotron)	1946 J. R. Richardson	const.	variabil	variabil	$p, d, \alpha$	—10GeV
	sincrotron	1946 F. K. Goward, D. E. Barnes	variabil	const.	const.	$e$	~680MeV
	sinerofazotron (cosmotron) (bevatron) (sincrotron de protoni)	1947 M. L. Oliphant	variabil	variabil	const.	$p, \alpha$	10GeV protoni
Acceleratori prin inducție	betatronul	1945 M. Kerst	variabil	—	const.	$e$	~300MeV

tensiune: mașină electrostatică, transformator de înaltă tensiune urmat de un redresor sau instalații mai speciale ca generatorul Van de Graaff sau generatorul în cascadă de tip Cockroft-Walton. Tensiunea constantă pe care o furnizează generatorul se aplică unor electrozi ce formează un condensator. Pe unul din electrozi se așază sursa de particule (pentru electroni sursa este un filament încălzit, pentru protoni, particule  $\alpha$  sau ioni, sursa este de obicei un tub de descărcare în gaz la presiune joasă umplut cu hidrogen, heliu sau gazul a cărui ioni dorim să-i accelerăm), iar pe celălalt electrod se pune ținta

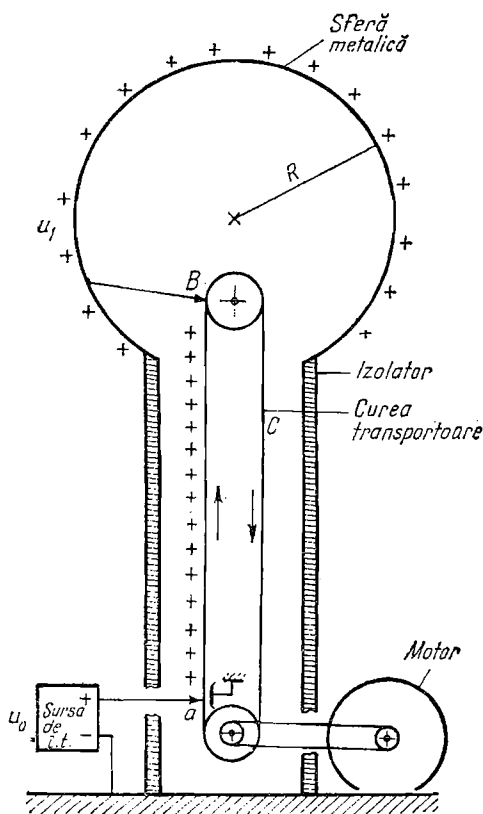


Fig. V.6.17

pe care dorim s-o bombardăm cu particulele accelerate. Pentru ca particulele accelerate să poată ajunge de la sursă la țintă, trebuie să treacă printr-o regiune cu vid înaintat numit *tub de accelerare*. În acest tub sînt dispuși electrozi care focalizează fasciculul de particule pe țintă. În caz contrar fasciculul este divergent, o parte din particule cad pe pereții tubului de accelerare și nu pe țintă, micșorînd intensitatea fasciculului de particule. Pentru o tensiune  $V$ , energia particulelor accelerate este  $E_c = qV$  unde  $q$  este sarcina particulei. Se vede că este convenabilă accelerarea particulelor cu sarcină cît mai mare pentru ca la aceeași tensiune, energia lor să fie mai mare (particule  $\alpha$ , ioni grei multiplu ionizați). Intensitatea fasciculului de particule accelerate se măsoară în majoritatea cazurilor prin curentul electric corespunzător. Cunoșcînd sarcina electronului, rezultă de exemplu că un curent de protoni de 1 mA corespunde unui flux de  $6 \cdot 10^{16}$  particule/s.

Să descriem principalele tipuri de acceleratori.

(1) *Generatorul Van de Graaff* este o mașină electrostatică prin influență ce permite producerea a milioane de volți. În fig. V. 6.17 se poate vedea schema unui astfel de generator. Este format dintr-o sferă metalică de rază  $R$  ce formează cușca Faraday și care prin intermediul collectorului (B) culege sarcinile de pe banda transportoare (C). Banda transportoare primește la rîndul ei sarcina

de la un generator de înaltă tensiune obișnuit (de 10–20 kV) prin intermediul unor vîrfuri ascuțite (a). Pentru realizarea transportului banda se confecționează dintr-un material izolant (cauciuc, hîrtie,...) și este pusă în mișcare în sensul indicat în figură de un motor electric cu o viteză constantă  $v$ . Să analizăm acum mai pe larg fiecare porțiune căci numai în acest fel vom înțelege modul de funcționare. Sursa de înaltă tensiune ( $U_0$ ) se aplică (borna pozitivă) pe un sistem de vîrfuri ascuțite plasate în fața benzii transportoare. Pentru a mări intensitatea cîmpului, în spatele benzii se așază o placă legată la borna negativă (pămîntul) a sursei de înaltă tensiune. În dreptul acestor vîrfuri se produce un fenomen de ionizare ca urmare a cîmpului electric intens. Deoarece la vîrfurile ascuțite se produce o acumulare de sarcini superficiale cu o densitate foarte mare ( $\sigma$ ), cîmpul în imediata vecinătate ( $E = 2\pi\sigma$ ) va fi foarte mare. Ca urmare a ionizării, electronii și ionii negativi vor merge spre vîrf iar ionii pozitivi vor fi respinși și vor fi proiectați pe banda transportoare. Astfel banda va transporta cu viteza  $v$  o sarcină cu o densitate superficială  $\sigma$ , respectiv un curent de încărcare al sferei egal cu  $I = \sigma lv$  unde  $l$  — lățimea benzii transportoare. Sarcina de pe bandă va fi transportată integral deoarece banda este izolatoare. Ajungînd în punctul (B) în interiorul sferei, sarcina va fi colectată printr-un sistem de perii electrice legate de sferă. Sarcina culeasă în acest fel, se va răspîndi pe suprafața sferei, de unde nu mai poate reveni, din cauza efectului de cilindru Faraday. Sfera fiind un condensator sferic de capacitate  $C = R$ , potențialul la care se încarcă este  $U = Q/C$ . S-ar părea că potențialul sferei poate crește oricît de mult cu condiția de a se aduce cît mai multă sarcină pe ea. Din păcate există cauze ce limitează această creștere, una din cele mai importante fiind legată de rigiditatea dielectrică limitată a aerului sau a mediului gazos din jurul sferei. Din această cauză peste o valoare a cîmpului electric apar efluvii, scînteii, descărcări ce limitează valoarea maximă a sarcinii ce poate fi acumulată pe sferă. Pentru aer, valoarea maximă a cîmpului electric, în condiții normale este de  $E_d \simeq 30$  kV/cm. Deoarece legătura dintre potențial și cîmpul la suprafața sferei este cunoscută

$E = \frac{U}{R}$ , rezultă că valoarea maximă a tensiunii va fi

$$U_{max} = E_d R, \quad (6.31)$$

deci crește proporțional cu raza sferei. Pentru a crește tensiunea maximă se poate merge fie pe calea mării razei sferei, fie pe cea a creșterii rigidității dielectrice. În ultimul caz generatorul se introduce într-o atmosferă de gaz la presiune ridicată (de exemplu  $N_2$ ,  $CO_2$ , la presiuni între 8–28 atmosfere). Tot pentru mărirea tensiunii acceleratoare se pot cupla două generatoare Van de Graaff încărcate cu sarcini opuse, dublîndu-se astfel tensiunea. Acest ansamblu se numește *tandem*. În fine curentul maxim, pe care-l poate debita, un astfel de generator se găsește ușor din relația  $I = \sigma lv$ , în care introducem valoarea  $\sigma_{max} = \frac{E_d}{2}$  pentru densitatea maximă de sarcină transportată,

$$I_{max} = \frac{E_d lv}{2}. \quad (6.32)$$

Ca exemplu putem lua un generator Van de Graaff cu raza sferei de 1 m, cu o bandă de 50 cm lățime, antrenată cu o viteză de 20 m/s. Tensiunea și curentul maxim (teoretic) vor fi  $U_{max} = 3$  MV și  $I_{max} = 0,5$  mA. Această limită este



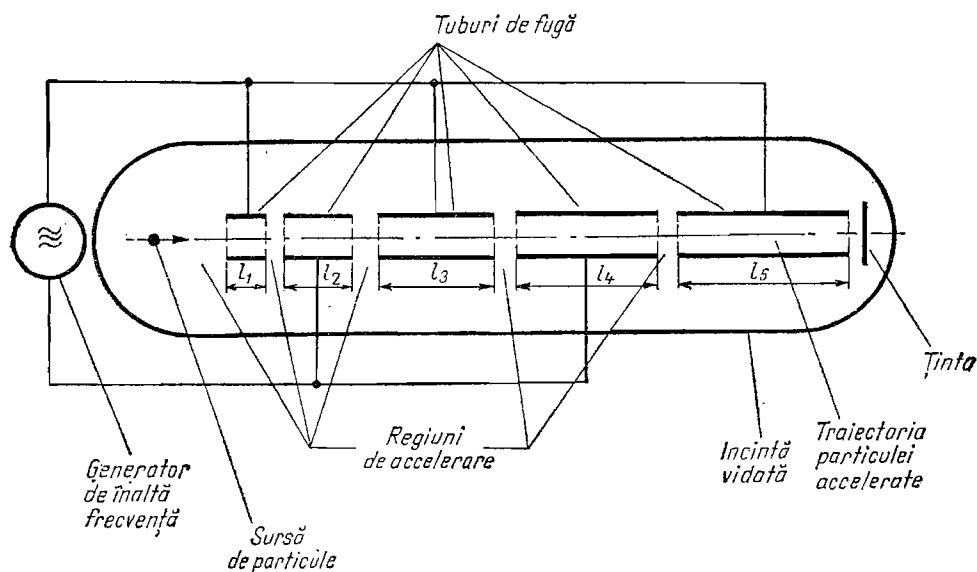


Fig. V.6.18

însă foarte greu de realizat practic. Din punct de vedere energetic, lucrul mecanic ce se depune pentru încărcarea sferei, este determinat de învingerea forței electrostatice de respingere dintre sarcinile pozitive de pe bandă și sarcina pozitivă mereu crescândă a sferei. Se poate ajunge la situația în care forța de respingere literalmente „suflă” sarcinile de pe banda transportoare, la sferă nemaiajungând decât o cantitate infimă de sarcini.

(2) *Acceleratorul liniar* face parte din grupa de *acceleratori de rezonanță sau ciclici* deoarece accelerarea se face prin trecerea repetată (ciclică) a particulelor printr-o zonă acceleratoare. Existența unui astfel de ciclu va cere după cum se va vedea, respectarea unei condiții de sincronism. Acceleratorul liniar este construit (fig. V. 6.18) dintr-o incintă vidată în care este plasată o sursă de ioni și o serie de cilindrii metalici (tuburi de fugă) așezați unul după altul, centrați și de lungime crescândă. La capătul lor se așază ținta ce va fi bombardată. Alimentarea tuburilor se face (ca în figură) de la o sursă de înaltă frecvență și înaltă tensiune. Accelerarea se petrece în zona dintre tuburi, iar în interiorul tuburilor particulele se mișcă liber (inercial). Condiția de sincronism (de rezonanță sau de ciclicitate) se pune astfel: pentru a fi accelerată particula trebuie să găsească la ieșirea din tub un potențial accelerator (tubul să aibă o polaritate inversă particulei accelerate). Cum viteza va crește la fiecare treaptă de accelerare, rezultă că lungimea acestor tuburi va trebui să crească în mod proporțional, deoarece frecvența tensiunii aplicate este constantă ( $f$ ). Dacă tensiunea generatorului este  $U_0$ , la fiecare regiune de accelerare, energia particulei va crește cu  $qU_0$ , iar dacă avem  $n$  tuburi energia totală va fi

$$E = nqU_0, \quad (6.33)$$

$q$  fiind sarcina particulei accelerate. La prima accelerare particula își va crește energia de la zero la  $qU_0$ . În mod corespunzător, viteza particulei va fi dată

de relația de conservare a energiei:  $v_1 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$  presupunînd particula nerelativistă ( $E \ll mc^2 - m$  este masa particulei și în consecință variația masei cu viteza este neglijabilă). În intervalul de timp  $\frac{T}{2} = \frac{1}{2f}$  ea va tre-

bui să se miște în interiorul tubului, timp în care se va petrece schimbarea polarității tubului astfel că la ieșirea din primul tub, să-l găsească pe cel de al doilea cu o polaritate convenabilă pentru accelerare. De aici rezultă

$$l_1 = v_1 \cdot \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} \cdot \frac{1}{2f}.$$

În următoarea zonă de accelerare ea își va crește energia de la  $qU_0$  la  $2qU_0$ , iar viteza ei va deveni

$$qU_0 + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \frac{qU_0}{m}} = \sqrt{4 \frac{qU_0}{m}}.$$

Generalizînd această relație, vedem că la ieșirea din cel de al  $n$ -lea tub, particula va avea viteza  $v_n = \sqrt{2 \frac{nqU_0}{m}}$ , de unde rezultă relația ce ne dă lungimea necesară pentru al  $n$ -lea tub:

$$l_n = \sqrt{\frac{2nqU_0}{m}} \frac{1}{2f} = \sqrt{n} l_1. \quad (6.34)$$

În acest fel se vede că lungimea tuburilor crește cu  $\sqrt{n}$ , din care cauză obținerea energiilor mari necesită lungimi de kilometri. Relația (6.34) dă condiția de sincronism între parametrii geometrici (constructivi) ai acceleratorului și frecvența tensiunii de alimentare. O caracteristică deosebită a tuturor acceleratorilor ciclici este faptul că ținta este bombardată nu continuu cu un fascicul de particule, ci în impulsuri, cu frecvența dată de frecvența generatorului de alimentare. Se vede că pentru o energie dată, lungimea tuburilor scade cu creșterea frecvenței motiv pentru care actualmente, acceleratoarele liniare se alimentează cu frecvențe de ordinul a 1 000 — 10 000 MHz. Dacă particula accelerată este electronul, atunci ea devine repede relativistă și condiția de sincronism calculată din (6.34) nu mai este valabilă din cauza variației masei cu viteza. Această variație poate fi urmărită pe graficele  $a$  și  $b$  din fig. V.6.19. Se vede că electronul pe la o energie de  $\sim 1$  MeV are aproape viteza luminii ( $\frac{v}{c} = 0,93$ ) iar masa lui crește de aproape 4 ori față de masa

de repaus. Condiția de sincronism va trebui să țină cont de acest lucru. În prezent cel mai mare accelerator liniar de electroni dă o energie de 20 GeV și are o lungime de peste 3,5 km (Universitatea Stanford, S.U.A.). Centrarea tuturor tuburilor de fugă s-a făcut cu ajutorul unui laser.

(3) *Ciclotronul* este tot un accelerator ciclic, de rezonanță, dar la care problema lungimii acceleratorului a fost rezolvată folosind un câmp magnetic care curbează traiectoria. În acest fel dimensiunile acceleratorului sînt mult reduse. În fig. V.6.20 este reprezentat schematic un ciclotron. În centrul sistemului și în câmp magnetic se găsește o sursă de particule. Tot în acest câmp se găsesc

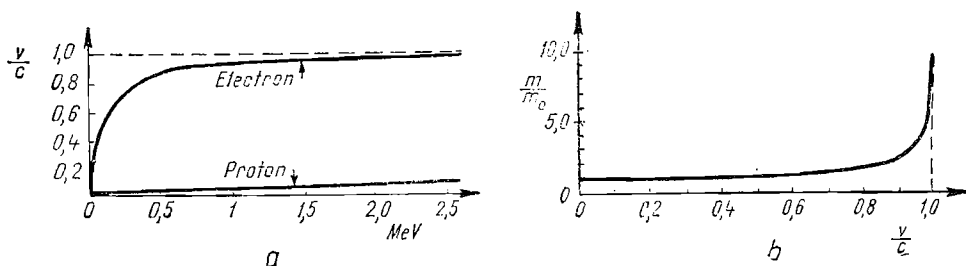


Fig. V.6.19

doi electrozi de o formă specială numiți *duanți*, deoarece au forma literei D. Particulele sînt accelerate la trecerea între duanți, iar în interiorul lor se mișcă liber ca și în tuburile de fugă ale acceleratorului liniar. Aci există deci doar două regiuni de accelerare în care sînt aduse periodic particulele. Condiția de sincronism cere ca frecvența tensiunii de înaltă frecvență să fie astfel aleasă încît întotdeauna la ieșirea dintr-un duant tensiunea pe celălalt să fie acceleratoare. Această condiție se găsește scriind mișcarea particulei în cîmp. În această mișcare orbita de echilibru la o energie dată (o viteză dată) se va găsi prin egalarea forței centrifuge cu cea centripetă

$$r = \frac{mv}{eB},$$

iar perioada și pulsația acestei mișcări vor fi

$$T = 2\pi \frac{m}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}.$$

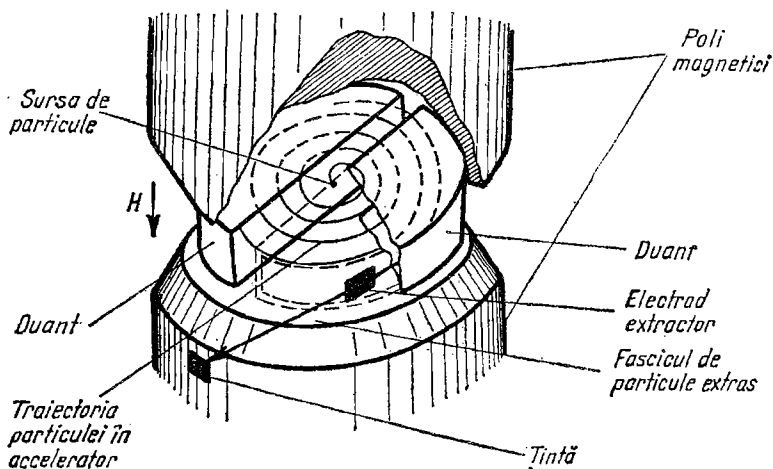


Fig. V.6.20

Este remarcabil că această perioadă este *independentă* de viteza particulei și deci condiția de sincronism,  $\frac{T}{2} = \frac{1}{f}$ , rămîne valabilă pe întreaga traiectorie. În acest fel traiectoria constă dintr-o serie de semicercuri cu raze progresiv crescătoare. În momentul în care particula ajunge pe ultima traiectorie, de rază maximă, ea va fi scoasă din accelerator prin aplicarea unei tensiuni corespunzătoare pe o electrodă, care să anuleze forța magnetică ce curbează traiectoria. În acest fel fasciculul este îndreptat către țintă. Energia maximă a particulelor extrase va fi dată de energia pe traiectoria de rază cea mai mare. Dacă raza maximă este  $R$ , atunci rezultă

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{(eBR)^2}{2m}. \quad (6.35)$$

Deci cu cît raza este mai mare cu atît energia maximă este mai mare. Cum atît cîmpul magnetic cît și raza sînt limitate constructiv, energia maximă a particulei nu va putea depăși  $\sim 20 - 30$  MeV. Condiția de sincronism se scrie explicit astfel:

$$\frac{\pi m f}{e B} = 1. \quad (6.36)$$

Este interesant de remarcat că energia maximă a particulelor accelerate nu depinde de tensiunea de accelerare cu toate că la fiecare trecere prin regiunea de accelerare energia particulei crește cu  $qU_0$  ( $U_0$  este tensiunea maximă pe duanți). Acest lucru se explică astfel: dacă folosim o tensiune mare atunci numărul de rotații ale particulei pentru a atinge energia maximă este mic, pe cînd folosind o tensiune mică numărul acestor rotații este mare. Condiția de sincronism cere o frecvență constantă deoarece  $m$ ,  $e$ ,  $B$  sînt constante. Acest lucru, ce rezultă și din fig. V.6.19, este valabil pentru protoni sau particule mai grele, care nu sînt relativiste. Pentru electroni acest lucru nu este valabil, de aceea ciclotronul este un accelerator exclusiv pentru particule grele (protoni, deutoni, particule  $\alpha$ , ioni grei). Pentru a accelera electroni, sau particule grele în regiunea relativistă (a variației masei cu viteza), pentru a păstra condiția de sincronism trebuie să variem fie frecvența, fie cîmpul magnetic, fie amîndouă în ritmul variației masei cu viteza, astfel încît condiția de sincronism să fie îndeplinită tot timpul. După cum se vede și din tabelul V.16 sînt posibile următoarele trei tipuri de acceleratori:

- *sincrotronul* la care cîmpul magnetic variază astfel ca raportul  $\frac{m(v)}{B}$  să fie constant
- *sincrociclotronul* (fazotronul) la care frecvența variază astfel ca produsul  $m(v) \cdot f$  să fie constant
- *sincrotronul de protoni* (sincrofazotron) la care se produce atît variația frecvenței cît și a cîmpului magnetic astfel ca  $\frac{mf}{B}$  să fie constant.

Ultimul tip de accelerator se mai numește și *cosmotron* deoarece accelerează protoni pînă la energii comparabile cu cele din radiația cosmică.

(4) *Betatronul* este un accelerator de electroni ce se bazează pe un principiu total diferit. El funcționează pe principiul transformatorului electric. Dacă

analizăm ceva mai atent funcționarea unui transformator ajungem la concluzia că în secundar ia naștere un curent electric deoarece câmpul magnetic variabil creat de primar determină apariția unui câmp electric în secundar cu linii de forță circulare care determină mișcarea electronilor din conductorii. Pentru a transpune în practică acest principiu, în locul secundarului se așază un tub toroidal în care un filament injectează electroni, ce sînt puși în mișcare prin inducție. Procesul de accelerare durează un interval de  $1/4$  din perioada curențului alternativ folosit. La capătul acestui proces, după ce electronul a efectuat aproximativ un milion de rotații el va ajunge la energii de ordinul a 20 MeV. Creșterea masei electronului cu energia nu incomodează, deoarece aici nu se pune problema unui sincronism.

## 6.8 PARTICULE ELEMENTARE

În prezent numărul particulelor ce pot fi deosebite unele de altele prin masele, sarcinile sau alte mărimi fundamentale ale lor, este atît de mare încît denumirea de elementare, devine tot mai greu de justificat. De aceea, prin particulă elementară înțelegem acea particulă care nu are o structură bine cunoscută în prezent, dar care se comportă ca un tot unitar și indestructibil în majoritatea cazurilor. Eforturile depuse în prezent de fizicieni se îndreaptă spre o clasificare a lor și o reducere a numărului de particule la cîteva, care să posede însă stări energetice superioare, în care particulele elementare cunoscute să se regăsească.

Principalele caracteristici ale particulelor elementare sînt date de: masă, sarcină electrică, spin, viață medie, schemă de transformare etc . . .

În raport cu masele lor, particulele se împart în patru mari clase: fotoni, leptoni, mezonii, barioni. Două din aceste clase cuprind fermionii (leptoni și barioni) avînd spin semiîntreg și deci se supun principiului de exclusiune a lui Pauli. Celelalte două clase (fotonii și mezonii) sînt bozoni, avînd spin zero sau întreg.

În tabelul V.17 sînt date principalele mărimi ce caracterizează aceste patru clase de particule elementare.

În capitolele precedente, am discutat despre cîteva particule elementare: electronul, protonul și neutronul. Aceste trei particule elementare au o importanță deosebită deoarece toți atomii sînt formați din aceste particule. Dar în natură mai există și alte particule despre care vom vorbi în continuare. Multe din particulele elementare au fost descoperite studiîndu-se *radiația cosmică*. Aceasta este o radiație penetrantă ce sosește din spațiul interplanetar și a cărei prezență a fost observată din 1909. Măsurători asupra radiației cosmice au fost făcute la început cu camere de ionizare, ridicate la mari înălțimi cu ajutorul baloanelor. Datorită mării penetrabilități, ele trebuie să fie compuse din particule de energie foarte mare. Astăzi se știe că radiația cosmică nu este omogenă, ea fiind compusă din diferite tipuri de particule. De asemenea compoziția ei în stratele superioare ale atmosferei (radiația primară) este diferită de cea de la suprafața Pămîntului (radiația secundară), datorită interacțiunii componentelor radiației primare cu nucleele gazului atmosferic. Radiația cosmică primară este în general compusă din protoni, particule alfa și nuclee ușoare, de energie foarte mare ( $\sim 10^4 - 10^{14}$  MeV). Radiația secundară este mai bogată în componente fiind compusă din fotoni, electroni,

pozitroni, care sînt absorbiți ușor (componenta moale) și protoni, neutroni, mezonii, care sînt mai penetranți (componenta dură). Componenta radiației cosmice primare încărcată cu sarcină va fi influențată de cîmpul magnetic terestru. Această influență constă în: a) o modificare a traiectoriei radiațiilor cosmice în apropierea Pămîntului, care determină o creștere a intensității lor de aproximativ opt ori spre regiunile polare (efect de latitudine); b) captarea lor într-o mișcare în jurul Pămîntului formîndu-se așa-numitele *centuri de radiație* (puse în evidență în ultimii ani cu ajutorul rachetelor și a sateliților artificiali).

Studiind radiațiile cosmice, C.D. Anderson în 1932 descoperă pozitronii, particule cu aceeași masă ca a electronului și sarcină egală cu a acestuia, dar de semn contrar. După cum am văzut pozitronii au jucat un rol fundamental în înțelegerea dezintegrării  $\beta$ . O dată cu descoperirea lor s-a descoperit și proprietatea particulelor elementare de a se transforma (ecuațiile 6.15), proprietate necunoscută pînă atunci. Este important să se accentueze că are loc o transformare și nu o dezintegrare, deoarece particulele ce intră în discuție sînt elementare. Gama acestor transformări de particule se poate lărgi amintind de fenomenul de *anihilare*, electron-pozitron care decurge după reacția:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Există și transformarea în sens invers, numită *generare de perechi* electron-pozitron, care se petrece la trecerea unei cuante de radiație gamma în cîmpul unui nucleu. Această proprietate de transformare a particulelor elementare face ca ele să fie instabile, cu un timp de viață scurt. Printre particulele descoperite în radiația cosmică și sînt mezonii. C.D. Anderson descoperă în 1937 *mezonii*  $\mu$  sau *miuonii* care au masa cuprinsă între cea a electronului și a protonului. Proprietățile miuonului sînt similare cu cele ale electronului, motiv pentru care face parte din clasa leptonilor. Miuonii sînt instabili ( $T_{1/2} = 2,19 \cdot 10^{-6}$ s) și se transformă într-un electron și doi neutroni.

În 1947, tot în radiația cosmică, se descoperă *mezonii*  $\pi$  sau *pionii*, particule cu masa ceva mai mare ca a miuonului. Datorită caracteristicilor lor, pionii se încadrează în clasa mezonilor propriu-ziși. Pionii pozitivi și negativi sînt instabili ( $T_{1/2} = 2,60 \cdot 10^{-8}$ s) transformîndu-se în miuoni și neutrini. Pionii neutrii se transformă în mod diferit în două cuante de radiație gamma, care la rîndul lor pot genera fiecare cîte o pereche electron-pozitron.

Toate transformările particulelor elementare se petrec în concordanță cu anumite legi de conservare. Acestea sînt: a) conservarea energiei, b) conservarea impulsului, c) conservarea spinului, d) conservarea sarcinii etc. . . În marea varietate de tipuri de particule elementare se observă că toate se găsesc sub formă de perechi, cu toate proprietățile identice, dar diferind cel puțin printr-una din mărimile care le caracterizează (de cele mai multe ori semnul sarcinii). Aceste perechi poartă denumirea de *particule* și *antiparticule*. Antiparticulele au fost prezise încă din 1928 de P.A.M. Dirac în cadrul unei teorii relativiste a electronilor. Prima antiparticulă descoperită, în concordanță cu prevederile teoriei lui Dirac, a fost pozitronul. Particulele și antiparticulele au proprietatea de a se genera sau anihila reciproc.

Fizica particulelor elementare este în momentul de față în plină dezvoltare, fiind unul din domeniile de avangardă a fizicii în înțelegerea fenomenelor naturii.

TABELUL V.20

Clasa	Parti- cula	Sarcina	Masa MeV	Spin $\hbar$	Transformarea principală	Viața medie $s$
Foton	$\gamma$	0	0	1	stabil	$\infty$
Leptoni	$\nu_e$	0	0	1/2	stabil	$\infty$
	$\nu_\mu$	0	0	1/2	stabil	$\infty$
	$e^\mp$	$\mp$	0,5	1/2	stabil	$> 2 \cdot 10^{21}$ ani
	$\mu^\mp$	$\mp$	106	1/2	$e + \nu + \bar{\nu}$	$(2,1983 \pm 0,0008) \cdot 10^{-6}$
	$\pi^\mp$	$\mp$	139,578	0	$\mu + \nu$	$(2,603 \pm 0,006) \cdot 10^{-3}$
Mezoni	$\pi^0$	0	134,975	0	$\gamma + \gamma$ $\gamma + e + e^-$	$(0,89 \pm 0,18) \cdot 10^{-16}$
	$K^\pm$	$\pm$	$493,82 \pm 0,11$	0	$\mu + \nu$ $\pi^\pm + \pi^0$ $\pi^\pm + \pi^\mp + \pi^\pm$	$(1,235 \pm 0,004) \cdot 10^{-8}$
	$K^0$	0	497,7	0		
	$K_S^0$	0		0	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0$	$(0,874 \pm 0,011) \cdot 10^{-10}$
	$K_L^0$	0		0	$\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ $\pi + \mu + \nu^0$ $\pi + e + \nu$	$(5,38 \pm 0,19) \cdot 10^{-3}$
	$p$	+	$938,256 \pm$ $\pm 0,005$	1/2	stabil	$> 6 \cdot 10^{27}$ ani
	$n$	0	$939,550 \pm 0,05$	1/2	$p + e^- + \nu$	$(0,932 \pm 0,014) \cdot 10^3$
Barioni	Nucleoni	$\Lambda$	$1115,60 \pm$ $\pm 0,08$	1/2	$p + \pi^-$ $n + \pi^0$	$(2,51 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$
		$\Sigma^+$	$1189,40 \pm$ $\pm 0,19$	1/2	$p + \pi^0$ $n + \pi^+$	$(0,810 \pm 0,013) \cdot 10^{-10}$
		$\Sigma^0$	$1192,46 \pm 0,12$	1/2	$\Lambda + \gamma$	$< 1,0 \cdot 10^{-14}$
		$\Sigma^-$	$1197,32 \pm 0,11$	1/2	$n + \pi^-$	$(1,49 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$
		$\Xi^0$	$1314,7 \pm 0,7$	1/2	$\Lambda + \pi^0$	$(3,03 \pm 0,18) \cdot 10^{-10}$
		$\Xi^-$	$1321,25 \pm 0,18$	1/2	$\Lambda + \pi^-$	$(1,66 \pm 0,4) \cdot 10^{-10}$
	Hiperoni	$\Omega^-$	$1672,5 \pm 0,5$	3/2	$\Xi^0 + \pi^-$ $\Xi^- + \pi^0$ $\Lambda + K^-$	$\left( \begin{matrix} 1,3 + 0,4 \\ - 0,3 \end{matrix} \right) \cdot 10^{-10}$

## PROBLEME

V.1. Să se determine traiectoria unui electron cu viteza inițială  $\vec{v}_0$ , care pătrunde într-un câmp electric omogen și constant, de intensitate  $\vec{E}$ ,  $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$ .

R: Traietorie rectilinie nemodificată; mișcare uniform accelerată sau încetinită.

V.2. Să se determine deviația, de la traiectoria liniară, a unui electron cu viteza inițială  $\vec{v}_0$ , care pătrunde într-o regiune cu câmp magnetic uniform  $\vec{H} \perp \vec{v}_0$ . Câmpul magnetic se întinde pe lungimea  $L_1$  în lungul traiectoriei liniare, iar deviația se măsoară pe un ecran aflat la distanța  $L_2$  de la terminarea câmpului magnetic. Discuție.

R: Relația (1.9).

V.3. Să se calculeze care sînt energiile (în electron-volți) corespunzătoare cuantelor cu lungimea de undă egală cu 1000 Å, 5000 Å și 10 000 Å.

R: 12,4 eV, 2,48 eV, 1,24 eV.

V.4. Să se calculeze masa cuantelor de energie din problema precedentă.

R:  $2,2 \cdot 10^{-32}$  g,  $0,44 \cdot 10^{-32}$  g,  $0,22 \cdot 10^{-32}$  g.

V.5. Să se compare frecvențele radiației emise de un atom de hidrogen, pentru seria Lyman în modelul lui Bohr, cu frecvențele de rotație ale electronilor pe orbitele respective. Discuție.

R: Frecvențele liniilor spectrale au valori intermediare frecvențelor de rotație ale electronilor pe orbitele între care au loc tranzițiile.

V.6. Care vor fi nivelele energetice și razele orbitelor staționare pentru un atom cu un singur electron (hidrogenoid) și cu nucleul de masă  $m = 200m_e$ .

R:  $W_n = -\frac{1,48}{n^2}$  eV,  $R_n = 0,0575 n^2$  Å.

V.7. Să se arate prin construcție grafică, dacă electronul unui atom de hidrogen cu  $n = 3$  și  $n_\varphi = 1$  intersectează sau nu, în mișcarea lui orbitală, traiectoria electronului cu  $n = 1$  și  $n_\varphi = 1$ .

R: Da.

V.8. Ce lungime de undă asociată posedă un electron, dintr-o lampă electronică, ce se mișcă sub influența unui potențial de 250 V?

R:  $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{1,24 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{V/2}} = 0,078$  Å.

V.9. Cît de mare trebuie să fie masa unei particule de energie  $E = 1$  MeV ca să „încapă” într-o sferă de rază  $R = 10^{-13}$  cm?

R:  $m \geq \frac{1}{2E} \left( \frac{h}{R} \right)^2 = 1,04 \cdot 10^{-21}$  g = 626  $m_p$ .

V.10. Să se găsească direcțiile maximelor de împrăștiere pentru un fascicul omogen de electroni, cu vitezele de  $4 \cdot 10^6$  m/s, care cad perpendicular pe o rețea liniară de difracție de constantă 2 Å.

R:  $\sin \theta = \frac{n\lambda}{a} = \frac{mh}{amv}$ ,  $\sin \theta = 0; 0,9$ .



V.11. Cum se modifică soluțiile ecuației Schrödinger, dacă fundul gropii de potențial cu pereți infiniți se deplasează de la  $U_0 = 0$  la  $U_0 \neq 0$ ?

$$\text{R: } E = U_0 + \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

V.12. Să se calculeze momentul cinetic al unui electron ce se mișcă pe o orbită  $3p$ .

$$\text{R: } |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \sqrt{2} \hbar.$$

V.13. Să se calculeze momentul magnetic orbital, în magnetoni Bohr, pentru electronii  $2s$ ,  $2p$  și  $3p$  ai atomului de hidrogen.

$$\text{R: } |\vec{\mu}| = \sqrt{l(l+1)} \mu_B$$

V.14. Care sînt unghiurile de cuantificare spațială a unui electron  $4f$ ?

$$\text{R: } \cos \theta = \frac{m}{\sqrt{20}}, \text{ cu } -4 \leq m \leq 4; 2l + 1 = 9 \text{ proiecții.}$$

V.15. Cît de mare trebuie să fie cîmpul magnetic pentru a produce o despicare Zeeman, de  $10^{-6}$  eV, a nivelului  $2p$ .

$$\text{R: } H = \frac{\Delta W}{|\vec{\mu}|} = 76,6 \text{ Gs} = 7,66 \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

V.16. Care sînt unghiurile pe care poate să le facă spinul electronului  $2p$  cu perpendiculara la planul traiectoriei orbitale?

$$\text{R: } \cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}.$$

V.17. Să se calculeze frecvențele liniilor radiațiilor X:  $K_\alpha$  și  $L_\alpha$  pentru atomul de cupru, știind că  $\delta = 1$  respectiv 7,4.

$$\text{R: } \nu K_\alpha = 1,93 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}, \nu L_\alpha = 7,61 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}.$$

V.18. Să se calculeze masa în grame a atomului de mercur.

$$\text{R: } M_{Hg} = 3,1 \cdot 10^{-22} \text{ g.}$$

V.19. Să se calculeze timpii în înjumătățire pentru următoarele nuclee radioactive:  $^{232}\text{Th}$  ( $\lambda = 1,58 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ ),  $^{224}\text{Ra}$  ( $\lambda = 2,21 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ) și  $^{213}\text{Po}$  ( $\lambda = 6,9 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ ).

$$\text{R: } T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} \rightarrow 1,4 \cdot 10^{16} \text{ a; } 3,62 \text{ d; } 1,05 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

V.20. Știind că izotopul  $^{222}\text{Ra}$  emite particule alfa, să se calculeze în cît timp se va colecta  $1 \text{ cm}^3$  de heliu, la presiune și temperatură normale, știind că cantitatea inițială de izotop radioactiv este de  $1 \text{ g}$  și că  $\lambda = 2,21 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ .

$$\text{R: } \text{Se ține seama de faptul că un atom-gram de gaz ocupă, la presiune și temperatură normale, un volum de } 22,4 \text{ l.}$$

$$t = 24,3 \text{ d.}$$

V.21. Cu cît variază raza medie a nucleului de  $^6_3\text{Li}$ , dacă fuzionează cu un alt nucleu identic de litiu?

$$\text{R: } \Delta R = 2,21 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$



**VI**

## **Elemente de fizica solidului**



## 1. Introducere

Vom căuta să expunem într-un număr restrâns de pagini obiectul fizicii solidului și câteva particularități care-i conferă caracterul de ramură distinctă a fizicii. Dezvoltarea fizicii în secolul al XIX-lea poate fi caracterizată printr-o etapă cumulativă de adunare a unei varietăți mari de date asupra proprietăților termice, optice, electrice, magnetice ale substanțelor, indiferent de starea de agregare. Tot în această perioadă au luat naștere primele capitole de fizică teoretică (Termodinamica, Electromagnetismul, etc.) care stabilesc atât descrierea matematică a fenomenelor cât și legătura fenomenologică între diferite constante. Astfel, ați învățat și dumneavoastră legea lui Hooke, definiția căldurii specifice, legea lui Ohm, etc., fără a vă întreba prea mult de ce de pildă, metalele sînt bune conductoare de căldură și de electricitate în raport cu izolatorii, sau de ce unele substanțe sînt transparente în vizibil (sarea de bucătărie, de exemplu) iar altele sînt opace. Cu alte cuvinte, s-a ivit necesitatea explicării acestor fenomene, a calculării constantelor ce caracterizează materialele ținînd seama de structura lor microscopică și determinarea naturii microscopice a legăturii între aceste constante. Primul model de legătură între fizica fenomenologică și structura microscopică a substanțelor l-a oferit teoria cinetico-moleculară a gazelor și apoi fizica statistică. Tot așa, proprietățile fizice ale stării solide au fost interpretate pornind de la structura microscopică și folosind metodele de calcul ale fizicii statistice și mecanicii cuantice. Se poate conchide deci că *Fizica Solidului* constituie o ramură a fizicii care are ca obiect studiul tuturor proprietăților fizice ale stării solide (proprietăți mecanice și termice, optice, electrice și magnetice) căutînd să stabilească pe de o parte, natura și mărimea constantelor fenomenologice pornind de la structura microscopică, iar pe de altă parte, să găsească corelațiile dintre diversele proprietăți fizice ale aceleiași substanțe. Ea poate fi subîmpărțită în 3 ramuri: fizica metalelor și aliajelor, fizica semiconductorilor și fizica dielectricilor.

Factorii care au impulsionat dezvoltarea fizicii solidului ar putea fi grupați astfel: a) dezvoltarea internă a fizicii (descoperirea difracției radiațiilor X pe cristale de către Knipping și Friedrich, dezvoltarea fizicii atomice și a mecanicii

cuantice); b) cerințele tehnicii (electrotehnica, electronica și radio-telecomunicațiile); c) dezvoltarea tehnicii militare. Deși este relativ tânără, fiind conturată ca ramură distinctă în perioada 1930 — 1935, fizica solidului a repurtat câteva succese tehnice și științifice de o importanță covârșitoare, dintre care cităm câteva: tranzistorul și toate dispozitivele semiconductoare, laserul și maserul, memoria magnetică, atingerea temperaturilor ultrajoase ( $< 10^{-5}$  °K), explicarea supraconductibilității, etc. Mai mult de jumătate din investițiile făcute în fizică sînt astăzi dirijate spre acest domeniu, fizica solidului fiind direct implicată în realizarea progreselor electronicii legate de microminiaturizare.

## 2. Structura cristalină

### 2.1. SOLIDE CRISTALINE ȘI SOLIDE NECRISTALINE

Solidele pot fi concepute ca ansambluri de atomi (gazele inerte solide), de ioni (halogenurile alcaline, de exemplu) sau de molecule (metanul solid și alte combinații complexe), în funcție deci de modul în care combinația chimică sau elementul respectiv își păstrează individualitatea. Pentru simplificarea discuției vom numi *particulă* unul din cele trei elemente care formează un solid. Particulele ocupă în spațiu poziții stabile numite *poziții de echilibru*, în jurul cărora pot executa mișcări de oscilație și de rotație când sînt molecule. Dacă în acest ansamblu se poate stabili o ordine, adică el se poate obține prin translatarea pe trei direcții necoplanare a unui element geometric numit *celulă elementară* obținem o *rețea cristalină* sau un *solid cristalin*. Celula elementară constituie un aranjament spațial format dintr-un număr mic de atomi plasați în colțurile unei figuri geometrice (cub, prisme). Dacă lipsește această ordine avem de-a face cu un *solid necristalin*. În rîndul acestora sînt incluse de fapt trei varietăți: solidele amorfe, sticlele și polimerii solizi. Un solid amorf se distinge de unul cristalin prin absența unei ordini spațiale care să se întindă în toată masa lui, prin lipsa deci a unei *ordini la distanță mare*. Este posibil să existe o ordine la distanță mică de cîteva sute de ångströmi, dar aceste regiuni mici în care există ordine sînt dezordonate în ansamblu.

Sticlele sînt combinații complexe formate prin amestecul în topitură a mai multor substanțe. De exemplu poate fi obținută o sticlă prin amestecul mai multor oxizi:  $\text{SiO}_2 - \text{P}_2\text{O}_5 - \text{Fe}_2\text{O}_3$ . Pe lîngă absența ordinii la distanță mare, într-o sticlă poate să difere local și compoziția nepăstrîndu-se în fiecare regiune raportul strict în care au fost amestecate compozițiile. În sfîrșit, polimerii solizi sînt formați din molecule mari care conțin un număr variabil de atomi, de la zeci la sute de mii, aceste molecule (lanțuri deschise sau închise) fiind așezate în diferite poziții în spațiu. Se poate introduce și o „ordine” într-un polimer solid, de exemplu, lanțurile moleculare să fie paralele, dar o asemenea stare difere de rețeaua cristalină, care are structură periodică pe cele trei direcții.

O celulă elementară este caracterizată de lungimea laturilor ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,) numite *parametrii (constante) de rețea* și de unghiurile dintre ele ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) (fig. VI.2.1). În funcție de relațiile între  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , și  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sînt definite 7 sisteme cristalografice. Astfel, dacă  $a = b = c$  și  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ , avem de-a face cu *sistemul cubic*. În fiecare sistem pot exista mai multe tipuri de celule. De exemplu, în sistemul cubic există celula *cubică simplă* (cs) (fig. VI.2.2a), celula cub cu

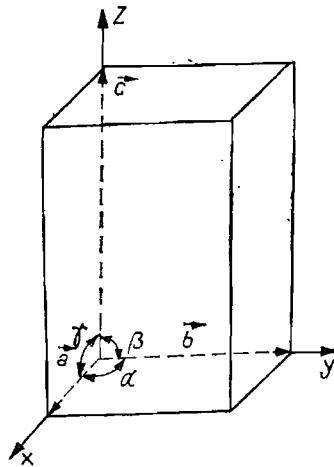


Fig. VI.2.1

*volum centrat* (cvc) (fig. VI. 2.2b) și celula cub cu *fața centrată* (cfc) (fig. VI.2.2c). În prima, particulele sînt plasate în colțurile unui cub, în a doua — în colțuri și în centrul cubului, iar în celula a treia particulele sînt plasate în colțuri și în centrele fețelor. În natură nu se întîlnește structura cs. în schimb, în celelalte structuri cristalizează multe elemente: în cfc — aluminiul, aurul, cuprul, calciul, ș.a., iar în cvc — bariul, potasiul, litiul, molibdenul, argintul etc.

O particulă ocupă o anumită poziție avînd în jurul ei alte particule. Cele mai apropiate poartă numele de *vecini de ordinul întâi* (vecinii cei mai apropiați). Coordonatele particulelor sînt date în funcție de parametri de rețea. Pentru exemplificare să luăm o celulă dreaptă ( $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ ), dar cu  $a \neq b \neq c$  și să plasăm axele sistemului de coordonate în lungul axelor celulei, adică:

$$\vec{a} = a\vec{i}, \vec{b} = b\vec{j}, \vec{c} = c\vec{k}. \quad (2.1)$$

Vectorul de poziție al unei particule oarecare din rețea va fi

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = n_1a\vec{i} + n_2b\vec{j} + n_3c\vec{k} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}, \quad (2.2)$$

unde  $n_1, n_2, n_3$  sînt numere. Poziția unei particule este dată prin cele trei numere ( $n_1, n_2, n_3$ ), care arată de cîte ori sînt cuprinși cei trei parametri în proiecțiile vectorului de poziție pe cele trei direcții.

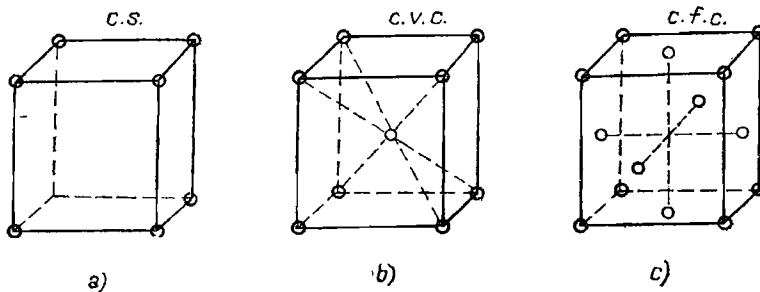


Fig. VI.2.2



Se mai introduce *planul cristalin* ca un plan care trece cel puțin prin trei poziții cristaline necoplanare. De exemplu, într-o structură cubică există plane paralele cu fețele celulei, plane care trec prin diagonalele fețelor, etc.

## 2.2. DEFECTE STRUCTURALE

O rețea în care toate particulele ar ocupa exact toate pozițiile de echilibru constituie o *rețea perfectă*. În realitate, există abateri de la structura ideală numite *imperfecțiuni* sau *defecte structurale*. Cele mai simple defecte se datoresc oscilațiilor particulelor în jurul pozițiilor de echilibru, oscilații numite *vibrațiile rețelei*. Deci, din acest punct de vedere o rețea ar fi perfectă la  $0^\circ\text{K}$ . Un alt exemplu de dezordine îl constituie solidele *policristaline* care sînt de fapt un conglomerat de cristale mici numite *cristalite* sau *granule*. De exemplu un bulgăre de sare este format dintr-o mulțime de cristalite orientate haotic. Dar și un singur cristal poate prezenta defecte de structură. Să luăm ca exemplu rețeaua aurului în care o parte din atomii de aur au fost înlocuiți cu atomi de argint. Obținem o rețea de aur cu impurități de argint. Deci impuritățile constituie o altă sursă de imperfecțiuni.

O particulă poate fi scoasă din poziția de echilibru lăsînd în urma ei un *nod vacant* (vacanță) și poate ajunge la suprafața cristalului apărînd astfel un *defect Schottky*, sau poate intra printre alte particule formînd un *interstițial*. Perechea vacanță-interstițial constituie un *defect Frenkel*. Cele două tipuri de defecte sînt reprezentate schematic în fig. VI.2.3. Ionii interstițiali dintr-o halogenură, de exemplu se pot mișca printre ionii din noduri, producînd astfel un curent de ioni. Existența defectelor poate explica apariția conductibilității ionice în cristalele dielectrice.

Defectele prezentate se referă la o singură particulă, sau cel mult la un număr mic de particule de aceea ele sînt numite și defecte *punctiforme*. Este posibil însă ca un defect structural să conțină un număr mare de particule (zeci,

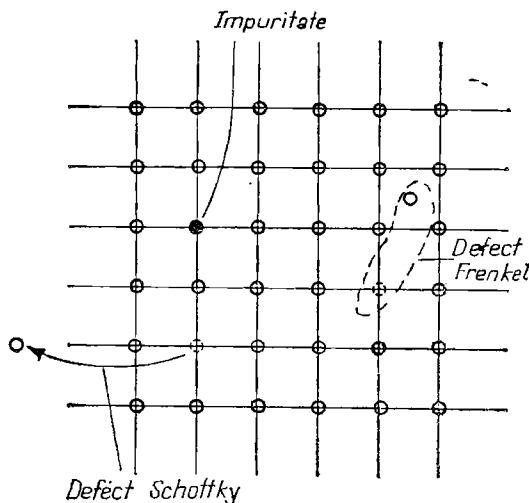


Fig. VI.2.3

sute sau chiar mii) fiind numite defecte *extinse*. Printre acestea întâlnim colonii de vacanțe, colonii de interstițiali și *dislocațiile*. Dislocațiile reprezintă regiuni cu abateri de la ordinea cristalină în care să avem de exemplu un șir de particule deplasate de la pozițiile lor, rămânând un cilindru gol în masa de particule ordonate. Există diverse tipuri de dislocații a căror prezență modifică esențial proprietățile mecanice ale cristalelor, în special, dar nu vom prezenta o descriere detaliată a lor.

### 2.3. LEGĂTURA CHIMICĂ ȘI STRUCTURA CRISTALINĂ

Se știe că o moleculă este un sistem stabil de atomi format pe baza unui anumit tip de interacțiune. Tipurile cele mai des întâlnite sînt legăturile *ionice* și legăturile *covalente*. În timp ce legătura ionică explică formarea moleculei pe baza atracției electrostatice între ioni de semn contrar apăruiți prin cedarea de electroni de valență de către atomii elementelor electropozitive (Na, K etc.) spre atomii elementelor electronegative (Cl, Br etc.), legătura covalentă presupune colectivizarea unui număr de electroni de valență pentru a forma configurația stabilă de dublet sau de octet (de exemplu,  $H:H$ ,  $Cl:Cl$  etc.). Se poate arăta prin analogie că există două tipuri fundamentale de solide: ionice și covalente. Ce modificări apar însă în raport cu moleculele? Într-o moleculă liberă, un ion este legat de un alt ion, sau de un număr mic de ioni, pe cînd într-un solid, un ion trebuie să fie legat de toți ceilalți, interacțiunea cea mai tare fiind realizată cu primii vecini. În acest fel, celula elementară trebuie să fie astfel construită încît să ofere posibilitatea unei asemenea legături. Să luăm ca exemplu molecula clorurii de cesiu ( $Cs^+Cl^-$ ), care cristalizează în sistemul cvc. Să presupunem că cesiul este în centrul celulei (fig. VI.2.4). La prima vedere ar apărea paradoxal faptul că el este legat de 8 vecini

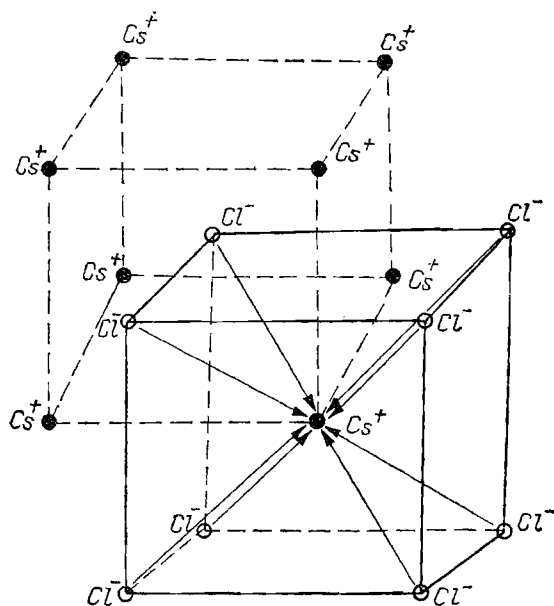


Fig. VI.2.4

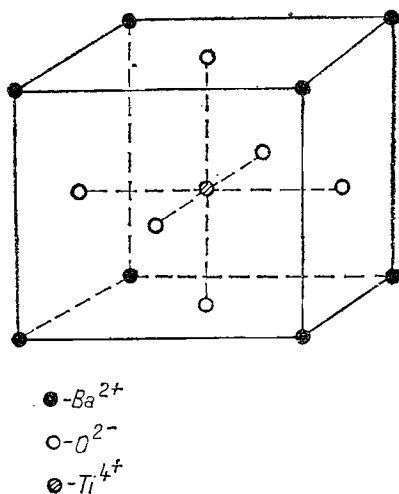


Fig. VI.2.5

de clor, în timp ce în molecula liberă este legat doar de un ion de clor. Dar dacă ținem seama de faptul că și clorul este legat de alți 7 ioni de cesiu (fig. VI.2.4) rezultă că fiecare ion de clor participă la legătură cu a 8-a parte, deci toți cei 8 ioni de clor din colțurile cubului exercită o interacțiune echivalentă cu cea a unui singur ion. Rezultă din această discuție că celula elementară conține un număr de atomi echivalent cu o moleculă. În alți compuși, celula elementară conține un număr întreg de molecule. Să discutăm acum un exemplu mai complex: titanatul de bariu ( $\text{Ba}^{2+}\text{Ti}^{4+}\text{O}_3^{2-}$ ) a cărui celulă elementară este de tipul *perovskitei* (fig. VI.2.5) și reprezintă de fapt o celulă cubică cu fețe și cu volum centrat. Dacă ne imaginăm celula „lipită” de celulele vecine, vom vedea că ionii din colțuri aparțin la 8 celule, iar cei de pe fețe aparțin la câte două celule. Deci ionii din colțuri sînt echivalenți cu  $\left(8 \cdot \frac{1}{8}\right) = 1$  ion, iar cei de pe fețe cu  $\left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3$  ioni, astfel că pe celula elementară avem 1  $\text{Ba}^{2+}$ , 3  $\text{O}^{2-}$  și 1  $\text{Ti}^{4+}$ .

Să analizăm acum cristalele cu legătură covalentă luînd ca exemplu germaniul (Ge) și siliciul (Si) care au cîte 4 electroni pe pătura de valență. Dacă cei 4 electroni ar fi puși în comun numai între doi atomi de germaniu ( $\text{Ge}::\text{Ge}$ ), atunci în spațiul dintre ei ar exista o densitate mare de sarcină negativă, care ar genera forțe de repulsie. O astfel de moleculă nu ar fi stabilă. Este posibil ca în starea solidă, un atom de germaniu să se lege simetric cu alți 4 atomi prin punerea în comun a cîte unui electron formîndu-se astfel 4 legături covalente. Cea mai simplă aranjare geometrică care permite o asemenea configurație este gruparea *tetraedrică* (fig. VI.2.6a) în care vecinii cei mai apropiați sînt plasați în colțurile unui tetraedru. Acest aranjament poate fi identificat în rețeaua diamantului în care cristalizează germaniul și siliciul (fig. VI.2.6b). Celula diamantului este de fapt un cub cu fețe centrate dar care

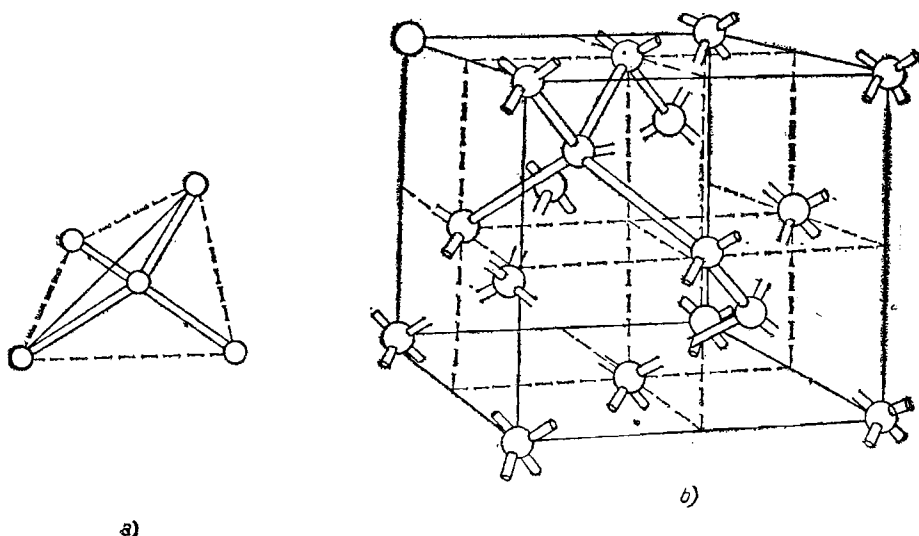


Fig. VI.2.6

mai conține 4 atomi în interior, plasați pe diagonalele de volum la un sfert din lungimea lor de la vîrfuri. Pentru a înțelege mai bine modul de plasare al atomilor, să ne imaginăm celula împărțită în 8 cubulețe formate cu ajutorul planelor paralele cu fețele cubului, dar duse pe mijloacele laturilor. Doi atomi sînt în centrele a două cubulețe diagonal opuse, în partea superioară, iar ceilalți doi sînt tot în centrele a două cubulețe, în partea inferioară și legate de celelalte două diagonale de volum.

Cu aceste precizări, sperăm că am indicat un fapt deosebit de important și anume, că există o strînsă corelație între tipul legăturii chimice și tipul rețelei cristaline.

## 2.4. DIFRAȚIA RADIAȚIEI X

Difracția radiației X pe cristale a constituit dovada directă a existenței ordinii cristaline. Pentru înțelegerea ei vom face apel la difracția luminii printr-o fantă, fenomen care apare atunci cînd lărgimea fantei este de ordinul de mărime al lungimii de undă a radiației incidente. Dacă ne-am imagina un lanț de particule, așezate regulat, acesta ar constitui o rețea de difracție. Cum un astfel de sistem de particule nu poate fi observat cu un microscop obișnuit rezultă că distanța dintre ele este foarte mică. Putem evalua această distanță ținînd seama de volumul macroscopic al unui cristal, de numărul de particule cunoscut din legea lui Avogadro. Ea este de ordinul ângströmilor. Din această cauză este justificată alegerea radiației X, cu lungimi de undă de acest ordin pentru investigarea structurii cristaline. Prin analogie cu rețelele optice de difracție, să ne imaginăm un lanț de atomi egal distanțați (fig. VI 2.7.) pe care cade un fascicul de radiație X. Conform principiului lui Huygens, fiecare atom devine un centru de oscilații care se propagă în toate direcțiile. Rezultă

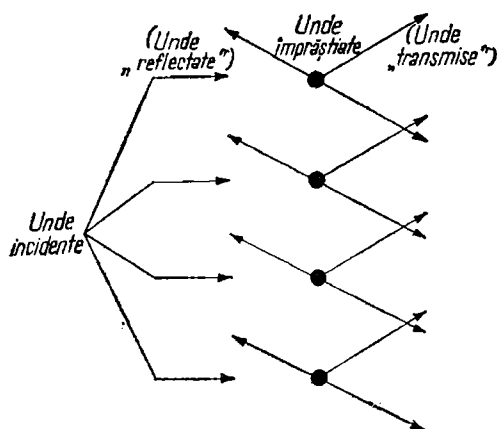


Fig. VI.2.7

că radiațiile emise pe direcții paralele vor interfera constructiv sau distructiv în funcție de valoarea diferenței de drum. Să presupunem acum că avem o familie de plane cristaline, pe care cade un fascicul paralel de radiații X de lungime de undă  $\lambda$ . În fig. VI.2.8 este desenată o secțiune printr-o astfel de familie, fiind ilustrate mai multe șiruri paralele de particule. Razele care cad sub unghiul  $\theta$  față de plane prezintă o diferență de drum între două raze reflectate de două plane succesive egală cu

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2\delta_1 = 2d \sin \theta. \quad (2.3)$$

Pentru a obține un maxim de difracție trebuie ca  $\delta$  să fie un număr par de  $\frac{\lambda}{2}$ , deci

$$\delta = 2n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2d \sin \theta = n\lambda. \quad (2.4)$$

Ultima relație reprezintă formula lui Bragg și ne dă o legătură directă între geometria rețelei ( $d$ ), lungimea de undă a radiației ( $\lambda$ ) și unghiul sub care cade pe planul cristalin respectiv. Numărul  $n$  ia valorile 1, 2, 3, ... obținându-se maxime de difracție de ordinul 1, 2, 3, ... din ce în ce mai slabe. Se

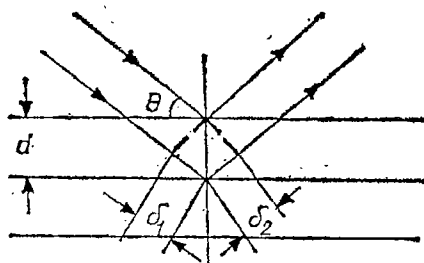


Fig. VI.2.8

poate remarca, de asemenea, similitudinea cu formula dedusă pentru rețelele de difracție obișnuite. Pentru a ne da seama de ordinul de mărime al lui  $\lambda$ , să luăm un unghi de difracție  $\theta = 30^\circ$  și  $d = 3\text{Å}$ . Se obține astfel  $\lambda = 3\text{Å}$ .

## 2.5. OSCILAȚIILE PARTICULELOR DIN NODURILE REȚELEI CRISTALINE

Într-un solid, agitația termică constă în mișcarea de oscilație a particulelor în jurul pozițiilor de echilibru. La  $0^\circ\text{K}$  ne putem imagina particulele „înghețate” în aceste poziții, dar la o temperatură  $T \neq 0^\circ\text{K}$  ele oscilează cu o anumită frecvență și cu anumită amplitudine astfel că temperatura unui solid este o măsură a energiei cinetice medii de oscilație. Pentru a examina modul de oscilație să ne imaginăm un șir de particule identice de masă  $m$ , egal distanțate cu  $a$  (fig. VI. 2.9). Pozițiile de echilibru la  $0^\circ\text{K}$  au coordonatele  $x_n = na$ , cu  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Să ne fixăm atenția asupra unei particule ( $n$ ) care interacționează mai puternic cu particulele vecine ( $n-1$ ) și ( $n+1$ ). La o temperatură  $T \neq 0^\circ\text{K}$  acestea sînt deplasate de la pozițiile de echilibru, la un moment dat cu  $u_{n-1}$ ,  $u_{n+1}$  și respectiv  $u_n$ . Dacă presupunem că forțele de interacțiune între două particule vecine sînt proporționale cu diferența între deplasările lor de la pozițiile de echilibru, atunci forțele de interacțiune ale particulei ( $n$ ) cu particulele ( $n+1$ ) și respectiv ( $n-1$ ) vor fi

$$F_{n+1,n} = f(u_n - u_{n+1}) \quad (2.6)$$

$$F_{n,n-1} = f(u_{n-1} - u_n),$$

unde  $f$  este o constantă de proporționalitate. Forța rezultantă este dată de diferența dintre cele două forțe:

$$F = F_{n,n-1} - F_{n+1,n} = f(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \quad (2.7)$$

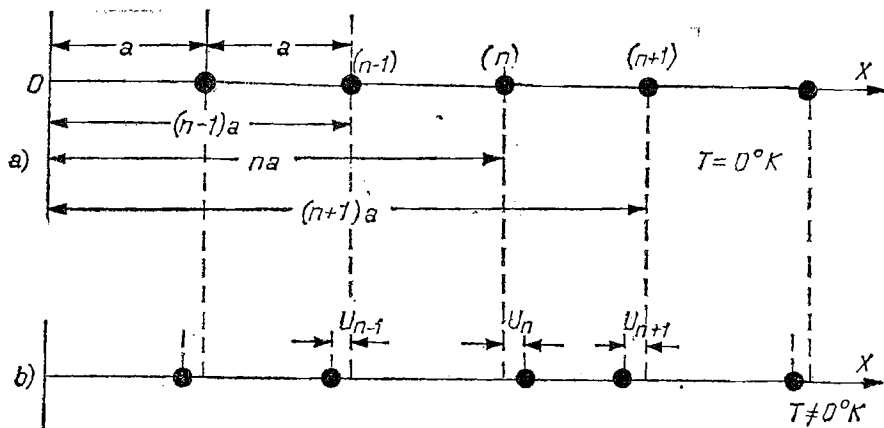


Fig. VI.2.9

Ecuția de mișcare pentru particula ( $n$ ) poate fi scrisă ușor

$$F = ma = m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m \frac{d^2(na + u_n)}{dt^2} = m \frac{d^2 u_n}{dt^2},$$

de unde rezultă

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = f(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \quad (2.8)$$

Ecuția elongației poate fi scrisă sub forma

$$u_n = A \sin \omega \left( t - \frac{x_n}{v} \right) = A \sin (\omega t - kx_n), \quad (2.9)$$

unde  $A$  este amplitudinea de oscilație,  $k = \omega/v$  este vectorul de undă, iar  $v$  este viteza de propagare. Am introdus aici soluția sub forma unei unde, deoarece particulele nu sînt izolate și dacă una dintre ele începe să oscileze, această mișcare se poate transmite din aproape în aproape. Ținînd seama că

$$\frac{du_n}{dt} = \omega A \cos (\omega t - kx_n) \text{ și } \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega^2 A \sin (\omega t - kx_n),$$

(2.9) devine

$$-m\omega^2 A \sin (\omega t - kna) = Af [\sin (\omega t - k(n+1)a) + \sin (\omega t - k(n-1)a) - 2 \sin (\omega t - kna)]. \quad (2.9')$$

Dacă descompunem primii doi termeni din dreapta în felul următor:

$$\sin (\omega t - k(n \pm 1)a) = \sin (\omega t - kna) \cos ka \mp \cos (\omega t - kna) \sin ka,$$

(2.9') devine

$$\omega^2 = \frac{f}{m} (2 \cos ka - 2) = \frac{4f}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad (2.10)$$

iar de aici obținem

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{f}{m}} \sin \frac{ka}{2} = \omega_{max} \sin \frac{ka}{2}, \text{ cu } \omega_{max} = 2 \sqrt{\frac{f}{m}}. \quad (2.11)$$

Se observă că o undă s-ar putea propaga prin lanțișorul nostru dacă are frecvențele situate între 0 și  $\omega_{max}$  care se obține pentru  $ka/2 = \pi/2$ . Rezultă de aici lungimea de undă minimă, ținînd seama că  $k = \omega/v = 2\pi/Tv = 2\pi/\lambda$ :

$$\lambda_{min} = 2a. \quad (2.12)$$

Am obținut astfel o concluzie deosebit de importantă: printr-un lanț de particule nu se poate propaga o undă de lungime de undă mai mică decît două constante de rețea. Avînd în vedere că  $a$  este de ordinul 1–3 Å rezultă că  $\lambda_{min}$  este de 2–6 Å.

Să vedem acum cum putem evalua pe  $\omega_{max}$ . Dacă ținem seama de legea lui Hooke:  $F = \frac{ES}{l} \Delta l = f \Delta l$ , vom presupune că avem de-a face cu un cub de latură  $l = a$ , astfel că  $S = a^2$ . Rezultă de aici expresia lui  $f$

$$f = \frac{Ea^2}{a} = Ea,$$

deci  $\omega_{max} = 2 \sqrt{\frac{Ea}{m}}$ . Pentru o substanță cu  $E=2 \cdot 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $a=3\text{\AA}$  și cu masa atomică egală cu 50 de mase protonice, frecvența maximă de oscilație este de ordinul a  $10^{12} \text{Hz}$ . Dacă nu vom avea de-a face cu unde generate de mișcarea termică, ci de oscilații provocate de unde venite din exterior, atunci ne putem imagina propagarea undelor elastice (sunete, ultrasunete) în solide prin intermediul oscilațiilor particulelor din nodurile rețelei cristaline.



### 3. Nivelele de energie ale electronilor în solide

#### 3.1. LEGĂTURA CHIMICĂ ȘI STĂRILE DE ENERGIE ALE ELECTRONILOR

În capitolul (2.3) am indicat stabilirea unor corelații între modul de cristalizare și legătura chimică. Vom prezenta acum o conexiune între legătura chimică și stările de energie ale electronilor prin intermediul căreia vom încerca să înțelegem distincția între metale, semiconductori și dielectrice. Să începem cu legătura ionică stabilită prin atracție electrostatică între ionii de sarcină opusă. Într-un astfel de solid, electronii de valență sînt legați în jurul anionilor, iar electronii păturilor interioare sînt legați de nucleele atomilor respectivi. În aceste solide (halogenurile—  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ ,  $\text{Ca}^{2+}\text{Cl}_2^-$ , oxizii—  $\text{Mg}^{2+}\text{O}^{2-}$ ,  $\text{Al}_2^{3+}\text{O}_3^{2-}$  etc.) nu există electroni liberi, de aceea ele se vor comporta ca un dielectric. Într-un solid format pe baza legăturii covalente, electronii de valență sînt puși în comun de către atomi. Electronii de valență nu mai sînt deci strîns localizați în jurul unui atom, dar nici nu sînt liberi deoarece sînt localizați în spațiile interatomice. Din această legătură electronii pot fi eliberați și transformați în electroni liberi prin absorbție de energie termică sau electromagnetică. Avem de-a face în acest caz cu un semiconductor (Ge, Si etc.) în care numărul de purtători de sarcină crește cu creșterea temperaturii. Ne vom referi, în sfîrșit la legătura metalică, care se distinge net de primele două, deoarece ea nu apare în formarea moleculelor în stare liberă. Într-adevăr, elementele care în stare solidă sînt metale (Na, K, Ca, Mg, Al) în stare gazoasă se află sub formă de atomi izolați. Natura acestei legături nu are analog clasic, ea este descrisă de mecanica cuantică astfel că ne vom mărgini numai la a sublinia efectul ei asupra electronilor de valență. Într-un metal, electronii de valență se află sub acțiunea atractivă a nucleului atomului din care provin, dar și sub acțiunea nucleelor învecinate. Această interacțiune este atît de puternică încît electronii de valență ai unui atom pot schimba locul cu electronii de valență ai atomilor vecini. Apare în felul acesta o interacțiune fără analogie clasică numită *interacțiune de schimb*. Efectul ei constă în schimbul de electroni între atomi, schimb care se face fără aport de energie din exterior. Electronii de valență într-un metal nu mai aparțin deci unui singur atom, ei se pot mișca de la un atom la altul. Se justifică astfel, între anumite limite, conceptul de electroni liberi. Vom vedea care sînt aceste limite.

### 3.2. ZONELE DE ENERGIE: METAL, SEMICONDUCTOR, IZOLATOR

Deoarece într-un solid electronii suferă și influența atomilor vecini (atracția nucleară și repulsia din partea celorlalți electroni) se modifică nivelele de energie pe care le aveau în atomul izolat. Fizica atomică ne-a arătat că în atomul izolat electronii au la dispoziție o serie de nivele de energie corespunzătoare numerelor cuantice orbitale ( $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ) pentru fiecare număr cuantic principal ( $n = 1, 2, \dots$ ) numerotate în felul următor:  $1s$ ;  $2s$ ,  $2p$ ;  $3s$ ,  $3p$ ,  $3d$ ;  $4s, \dots$ . Electronii pot efectua salturi între orbitele situate la diverse distanțe de nucleu, salturi care sînt descrise prin tranziții între nivelele de energie prin absorbția sau emisia de energie. Interacțiunea de schimb conduce la „amestecarea” electronilor deci la formarea unui colectiv de electroni în care nu mai putem deosebi electronii unui atom de cei ai altui atom. În acest ansamblu, electronii care aparțineau aceleiași pături în atomul izolat (același  $n$  și  $l$ ) mai au oare aceeași energie? Cu alte cuvinte, energia pe care o au electronii în atomul izolat rămîne nemodificată în starea solidă? Răspunsul este negativ și este legat de aplicarea principiului de excluziune al lui Pauli nu numai în atomul izolat ci și în cadrul unui solid. Dacă pe fiecare nivel de energie, în atomul liber găsim maximum  $2(2l + 1)$  electroni atunci prin formarea unui solid prin condensarea a  $N$  atomi am avea  $2(2l + 1) \cdot N$  electroni cu aceeași energie. Principiul lui Pauli se aplică și colectivului de electroni care provin din aceeași pătură ( $n, l$ ) în sensul că nu pot avea aceeași energie toți cei  $2(2l + 1) \cdot N$  electroni ci maximum  $2(2l + 1)$  electroni. Din această cauză în locul fiecărui nivel de energie ( $n, l$ ) din atomul izolat apar  $N$  nivele (fig. VI.3.1). Aceste nivele formează o zonă, sau *bandă de energie*. Vom avea astfel o zonă  $1s$  în care pot sta maximum  $2N$  electroni, o zonă  $2s$  cu același număr maxim de electroni, o zonă  $2p$  cu  $6N$  electroni, ș.a.m.d., numărul maxim de electroni dintr-o zonă fiind astfel egal cu  $2(2l + 1) \cdot N$ , dar care sînt distribuiți pe  $N$  nivele. Teoria solidului arată că zonele de energie corespunzătoare nivelelor atomice au lărgimi din ce în ce mai mari odată cu creșterea numărului cuantic  $n$  și  $l$  deoarece electronii cu numerele cuantice principale crescătoare se află tot

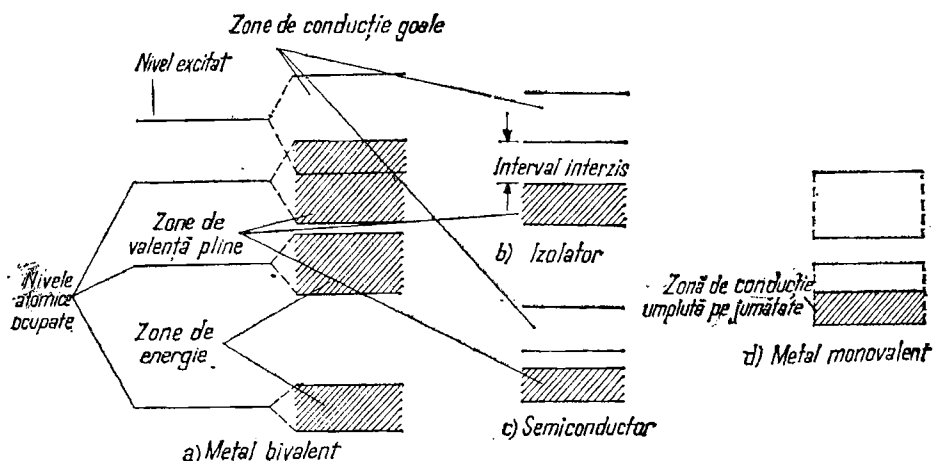


Fig. VI.3.1

mai departe de nucleu și „simt” mai puternic influența celorlalți atomi. Poziția zonelor de energie poate să fie modificată față de succesiunea nivelelor din atomul izolat. Astfel, în grupa fierului, nivelul 4s se completează înaintea lui 3d. În solid însă, deoarece electronii 3d sînt mai apropiați de nucleu decît electronii 4s, zona 4s este mai largă decît zona 3d și în plus, este situată deasupra celei din urmă. Zona de energie corespunzătoare electronilor de valență se numește *zonă de valență*, iar cea corespunzătoare primului nivel complet neocupat — *zonă de conducție*. Astfel, la litiu, care are configurația electronică  $1s^2, 2s^1$ , zona de valență este 2s, iar zona de conducție este 2p. La metalele de tranziție situația este următoarea: zona 3d este mai îngustă decît 4s, dar incomplet umplută; urmează zona 4s — zonă de valență, iar apoi zona 4p — zonă de conducție.

Folosind modelul zonelor de energie vom face acum distincția între metale semiconductori și izolatori pornind de la efectul unui cîmp electric de intensitate  $E$ , care acționînd asupra unui electron îi imprimă o accelerație  $eE/m$ . Dacă electronul se deplasează între două puncte cu potențialele  $V_1$  și  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ) el cîștigă o energie egală cu  $e(V_1 - V_2)$ . Într-un atom izolat electronul rămîne pe aceeași orbită dacă diferența de potențial nu asigură o energie suficient de mare încît să poată sări pe un nivel liber. Aceste salturi devin posibile în solide deoarece distanța dintre nivele este mai mică. Este necesar însă să existe stări libere pe care electronul să poată sări. Întrucît zonele corespunzătoare tuturor nivelelor cu excepția celui de valență și a păturilor incomplete din grupele de tranziție sînt complet umplute, vor putea efectua salturi numai electronii zonelor periferice. Astfel, dacă zona de valență este complet umplută pot face salturi pe nivelele libere ale zonei de conducție dacă primesc o energie corespunzătoare diferenței între energia ultimului nivel ocupat din zona de valență și primul nivel liber din zona de conducție. Dacă între cele două zone există un *interval interzis*, atunci aceste excitări nu pot avea loc în cîmpuri de intensități obișnuite. Intervalul de energie interzis corespunde intervalului existent între nivelele din atomul izolat (fig. VI.3.1b). Un solid în care există un interval interzis este un *dielectric*. Din acest punct de vedere un dielectric nu se deosebește de un semiconductor. Deosebirea provine din mărimea intervalului interzis: în dielectrici el este în general mai mare de 5 eV. Semiconductorii uzuali, germaniul și siliciul au intervalele egale cu 0,67 eV pentru Ge și 1,14 eV pentru Si. În semiconductori ca și în dielectrici electronii de valență sînt legați (în legăturile covalente sau ionice), iar la o temperatură diferită de 0°K devine posibilă excitarea lor în zona de conducție, adică ruperea lor din legăturile de valență. Numărul de excitări este proporțional cu

$$e^{-E_g/2kT},$$

unde  $E_g$  este energia intervalului interzis. Să remarcăm două lucruri: a) numărul de excitări într-un dielectric este de  $e^{-(E_g^d - E_g^s)/2kT}$  ori mai mic decît într-un semiconductor ( $E_g^d$  și  $E_g^s$  sînt intervalele interzise pentru dielectric și respectiv semiconductor); b) numărul de excitări devine apreciabil numai la temperaturi foarte ridicate. În general am avea de-a face cu o probabilitate mare de excitare atunci cînd  $kT$  ar fi de ordinul energiei intervalului interzis. Pentru un semiconductor cu  $E_g = 2,5$  eV, această temperatură ar fi de aproximativ... 30 000°K, temperatură la care nu rezistă nici un material în condiții normale de presiune, nici în stare topită. Iată de ce numărul de electroni liberi apăruiți

prin excitarea în zona de conducție este foarte mic în izolatori. Numărul lor este mai mare în semiconductori și devine apreciabil la materialele cu intervalul interzis mai mic de 1 eV.

Cum încadrăm în această schemă metalele? Există două situații corespunzătoare metalelor monovalente și celor bivalente. În primul caz, să ne referim de pildă la metalele din grupa I, în care zona de valență este de tip  $s$ , dar în care se găsesc  $N$  electroni, pentru că fiecare atom are câte un electron pe nivelul de valență. Nivelele zonei de valență încep să fie umplute începând cu cele care au energia cea mai mică. Deoarece pe fiecare nivel dintr-o zonă de tip  $s$  pot sta câte doi electroni, rezultă că zona de conducție a unui metal monovalent va fi plină doar pe jumătate. Electronii pot fi deci excitați cu ajutorul energiei termice sau al câmpului electric pe nivelele goale ale zonei de valență incomplet umplută (fig. VI.3.1.d). Să ne referim acum la zona de valență a metalelor bivalente din grupa a doua pentru care pe păturile  $s$  se află câte doi electroni, ceea ce face ca zona de valență să fie complet umplută. În aceste metale există însă o suprapunere cu zona de conducție (fig. VI.3.1.a), astfel că electronii pot fi excitați ușor din zona de valență în cea de conducție pentru că nu există un interval interzis. Această situație nu reflectă decât faptul că electronii de valență nu mai sînt strîns legați de edificiul atomic propriu și pot să se miște liber de la un atom la altul. O situație ușor modificată o prezintă metalele bivalente din grupa fierului, la care există zona  $3d$  incomplet umplută, situată sub zona  $4s$  complet umplută (zona de valență). Teoria arată că electronii  $3d$  contribuie la procesul de conducție într-o măsură mult mai mică decât electronii  $4s$  care pot fi excitați în zona de conducție ( $4p$ ) cu care se suprapune. Cu alte cuvinte, există un curent dat de electronii  $3d$  și unul dat de electronii  $4s$ , dar contribuția lor este diferită deoarece zona  $3d$  este mult mai îngustă decât zona de conducție, astfel că și stările excitate libere se întind pe un interval energetic mai îngust în aceasta din urmă.

### 3.3. MODELUL ELECTRONILOR LIBERI

a) **Introducere.** În capitolul consacrat curenților staționari am prezentat o teorie simplificată a conductibilității electrice a metalelor bazată pe conceptul electronilor liberi în care purtătorii de sarcină sînt tratați ca particulele unui gaz ideal. Modelul poate să explice, în linii generale, conductibilitatea electrică și termică bună a metalelor, dar nu dă rezultate atunci cînd este aplicat altor fenomene cum ar fi contribuția extrem de mică a electronilor de conducție la căldura specifică. Să luăm ca exemplu un metal monovalent, în care pe lîngă cei  $N$  ioni din nodurile rețelei există și  $N$  electroni de valență liberi. Dacă ținem seama de definiția căldurii specifice ca fiind energia necesară pentru a ridica cu un grad temperatura unității de masă, rezultă că un metal monovalent ar trebui să aibă o căldură specifică dublă în raport cu un izolator, deoarece absorb energie termică și ioni din nodurile rețelei și electronii liberi. Și totuși metalele nu au o căldură specifică mult diferită de cea a dielectricilor la temperatura camerei. Această contradicție este explicată de faptul că pentru a avea energia totală minimă, electronii din zona de valență umplu nivelele începînd cu cele de la fundul zonei. La  $0^\circ\text{K}$  electronii se găsesc pe fiecare nivel câte  $2(2l + 1)$  umplînd zona pînă la o anumită limită, numită

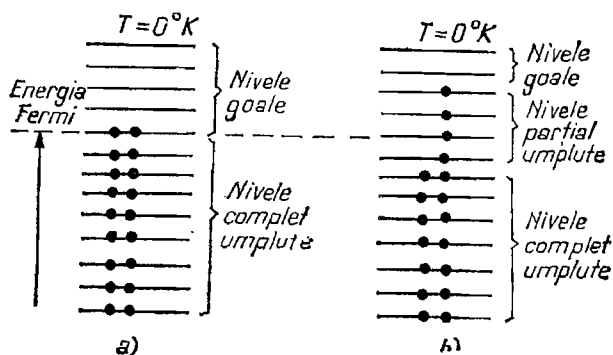


Fig. VI.3.2

limită sau energie Fermi (fig.VI.3.2a). La o temperatură diferită de  $0^\circ K$  electronii de la limita Fermi pot fi excitați pe nivelele libere situate deasupra energiei Fermi. Cealalți electroni de pe nivelele situate mult sub limita Fermi nu pot fi excitați pentru că nu au nivele libere. Ei nu pot absorbi energie termică, deci nu pot contribui la căldura specifică. Iată deci că în metale numai un număr extrem de mic din electronii de conducție pot contribui la căldura specifică și nu toți, cum era considerat în modelul clasic al electronilor liberi.

b) **Efectul Hall și efectul magnetorezistiv.** O aplicație a modelului prezentat o constituie înțelegerea efectului Hall și a variației rezistenței electrice într-un câmp magnetic (efect magnetorezistiv). Primul efect se obține dacă, într-un câmp magnetic uniform plasăm o plăcuță paralelipipedică metalică sau semiconductoră prin care trece un curent electric continuu, de intensitate  $I$  (fig. VI.3.3).

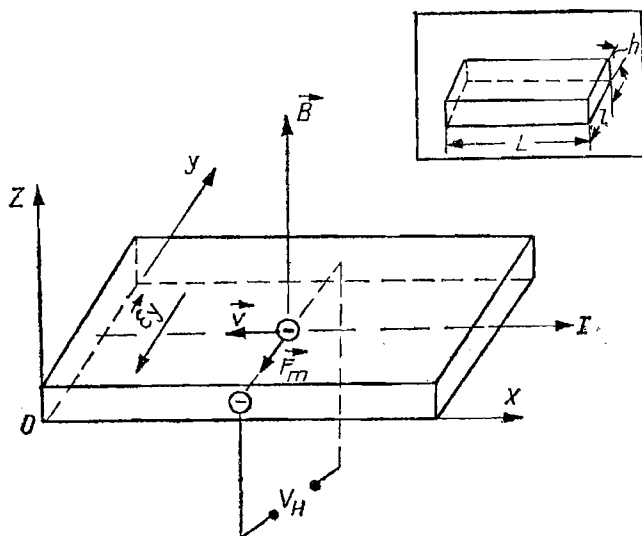


Fig. VI.3.3.

Într-un astfel de aranjament, se poate detecta o tensiune  $V_H$  între fețele laterale paralele cu planul format de  $B$  și  $I$ , adică pe direcția forței Lorentz. Tensiunea  $V_H$ , numită *tensiune Hall*, apare datorită acumulării de sarcini într-o parte a probei în raport cu partea opusă. Sarcinile în exces sînt acumulate datorită forței  $\vec{F}_m$  prin deviația de la linia curentului. Acumularea are loc pînă cînd cîmpul electric între cele două suprafețe laterale împiedică continuarea procesului. Deci tensiunea Hall este dată de

$$V_H = lE_y.$$

Calculul ordinului de mărime al lui  $V_H$  este relativ ușor de făcut, dacă ne vom plasa în starea de echilibru, adică atunci cînd cîmpul  $E_y$  (cîmp Hall) echilibrează acțiunea cîmpului magnetic și în ipoteza că toate particulele s-ar mișca cu aceeași viteză  $v$ :

$$eE_y = Bev \Rightarrow V_H = Bvl.$$

Dar cum

$$I = \frac{Ne}{t} = nL \frac{l h e}{t} = n e l h v \Rightarrow v = \frac{I}{n e l h},$$

rezultă de aici

$$V_H = \frac{BI}{n e h} = R_H \frac{BI}{h}, \quad R_H = \frac{1}{n e}, \quad (3.1)$$

unde  $n$  este concentrația purtătorilor. Se observă deci că tensiunea Hall depinde de inducția cîmpului magnetic și de intensitatea curentului electric, dar depinde și de grosimea probei. Constanta de proporționalitate ( $R$ ) se numește *constantă Hall* și ea este invers proporțională cu concentrația purtătorilor. Se vede de aici că dacă am avea de-a face cu purtători pozitivi (găuri), atunci sensul tensiunii Hall ar fi inversat. Într-adevăr, din semnul constantei Hall s-a verificat veridicitatea noțiunii de gaură sau gol (vezi VI.4).

Apare acum natural, ca în metale efectul Hall să fie slab deoarece  $n$  este mare, iar în semiconductori efectul să fie mai mare pentru că și concentrația de purtători este mai mică. Pentru a avea o idee de ordinul de mărime al efectului Hall să luăm un metal cu următoarele caracteristici:  $n = 10^{22}$  electroni pe  $\text{cm}^3$ ,  $l = 1$  mm,  $I = 10^{-1}$  A,  $B = 1$  T. Pentru acest metal, tensiunea Hall este de aproximativ  $3 \cdot 10^{-3}$  V. În semiconductori, unde concentrația de purtători este de  $10^3 - 10^5$  ori mai mică, tensiunea Hall este de ordinul a  $10^{-5} - 10^{-3}$  V.

O altă remarcă este legată de existența a două tipuri de purtători, de sarcină opusă, cum ar fi cazul unui electrolit. În această situație, tensiunea  $V_H$  este diminuată. Dacă concentrațiile celor două tipuri de purtători și vitezele lor ar fi egale, atunci efectul ar fi nul.

Vom expune acum, în cîteva cuvinte, natura variației rezistenței electrice a metalelor și semiconductoarelor în cîmp magnetic. Dacă nu ar fi aplicat cîmpul magnetic, lungimea medie a traiectoriei purtătorilor ar fi  $L$ . Sub acțiunea cîmpului magnetic traiectoriile se curbează, devin mai lungi și deci numărul de ciocniri ale purtătorilor crește, ceea ce duce la creșterea rezistenței electrice. Efectul magnetorezistiv la metale este foarte slab și el este pus în

evidență numai în câmpuri magnetice uriașe (peste 10 T). Acest efect a fost descoperit de fizicianul sovietic P. Kapița și explicat teoretic de fizicianul român Șerban Țițeica.

### 3.4. SUPRACONDUCTIBILITATEA

În 1911, Kammerlingh Onnes a găsit următoarele valori pentru rezistența unei coloane de mercur:  $0,084 \Omega$  la  $4,3^\circ\text{K}$  și mai mică de  $3 \cdot 10^{-6} \Omega$  la  $3^\circ\text{K}$ . De la această dată, fenomenul de scădere bruscă a rezistenței electrice la valori neglijabile a fost pus în evidență pe multe metale și aliaje în domeniul temperaturilor joase. Starea de rezistență neglijabilă a fost numită *stare supraconductoare*, iar temperatura la care are loc trecerea de la starea normală la cea supraconductoare se numește temperatură de tranziție sau *temperatură critică* ( $T_c$ ). Variația rezistenței electrice în jurul acestei temperaturi este redată în fig. VI.3.4. Temperatura critică este diferită pentru diferite mate-

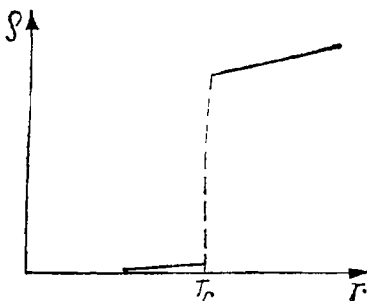


Fig. VI.3.4

riale. Astfel, aliajul  $\text{Nb}_3\text{Al}_{0,8}\text{Ge}_{0,2}$  are  $T_c = 20,05^\circ\text{K}$ , iar unii semiconductori au temperaturi de tranziție sub  $0,01^\circ\text{K}$ . Unele metale prezintă o scădere a rezistivității mult mai mare decât la mercur, atingînd circa  $10^{-23} \Omega \cdot \text{cm}$ . Supraconductorii prezintă unele proprietăți foarte interesante dintre care vom menționa două: efectul Meissner și distrugerea ei în câmp magnetic. Efectul Meissner arată că un supraconductor este un diamagnet ideal: liniile câmpului magnetic trec prin metalul în stare normală (fig. VI.3.5 a), dar îl „ocolesc”

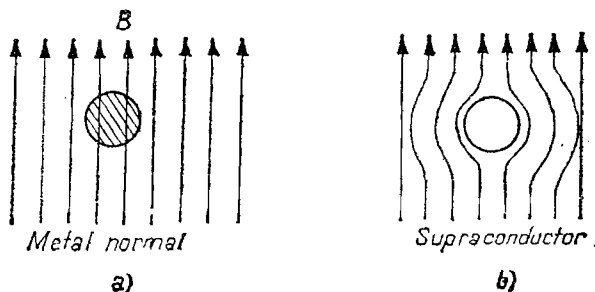


Fig. VI.3.5

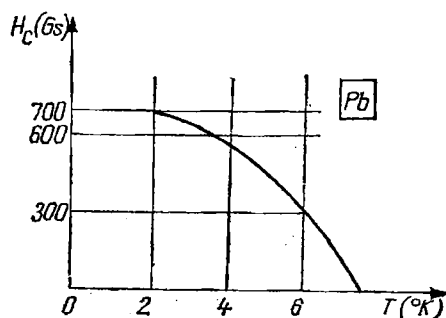


Fig. VI.3.6

în starea supraconductoare. Aceasta ne arată că momentele magnetice ale electronilor de conducție nu pot fi orientate paralel cu câmpul magnetic, deci nu poate să apară o componentă a magnetizării paralelă cu câmpul magnetic ca într-un paramagnet. Cel de-al doilea efect se referă la faptul că supraconductibilitatea poate fi distrusă de un câmp magnetic atunci când intensitatea lui are o anumită valoare numită *câmp critic* ( $H_c$ ). Mărimea câmpului critic scade odată cu creșterea temperaturii. În fig. VI 3.6 este reprezentată această variație pentru plumb. Supraconductibilitatea poate fi distrusă și de câmpul magnetic al curenților electrici așa cum a observat Onnes în 1913.

Explicarea supraconductibilității a întârziat aproximativ 50 de ani, teoria ei fiind formulată în 1957 de Bardeen, Schrieffer și Cooper (SUA) și de Bogoliubov (URSS). Ipoteza de bază a acestei teorii pur cuantice constă în faptul că electronii de aceeași energie, care au spinii orientați în sens opus, nu se mai mișcă independent unul de altul, ci sînt „legați“, sînt forțați să se miște împreună prin formarea unei perechi numită *cooperon*. Aceasta este, evident, o imagine simplificatoare, dar ea ne poate conduce la înțelegerea faptului că electronii nu se mai mișcă independent unul de altul ceea ce îngreunează ciocnirile cu ionii rețelei și deci are loc o micșorare a rezistenței electrice. Meritul teoriei constă în faptul că a propus un model de interacțiune care să cupleze electronii, deși prin natura lor (sarcini de același semn) ei se resping. Această interacțiune trebuie să fie mai puternică decît repulsia electrostatică.

În momentul de față supraconductibilitatea a pătruns în tehnică sub forma crioelectronicii și crio electrotehnicii, adică a tehnicii folosirii unor dispozitive electronice și electrotehnice la temperaturi joase, sau a unor materiale supraconductoare. Menționăm, în primul rînd, sintetizarea unor aliaje cu temperaturi de tranziție relativ ridicate și câmp critic mare, din care au fost confecționate bobinele supraconductoare care pot da câmpuri magnetice mai mari de 1 T (10 000 Gs). O a doua direcție de cercetare o constituie folosirea liniilor supraconductoare pentru transportul curenților foarte intensi pe distanțe scurte.

### 3.5. EFECTUL TERMoeLECTRIC LA CONTACTUL METAL-METAL

Efectul termoelectric, sau efectul Seebeck constă în apariția unei tensiuni între două suduri metalice cînd acestea sînt menținute la temperaturi diferite. Se realizează astfel un termocuplu cu ajutorul a două suduri: metal (1) — me-



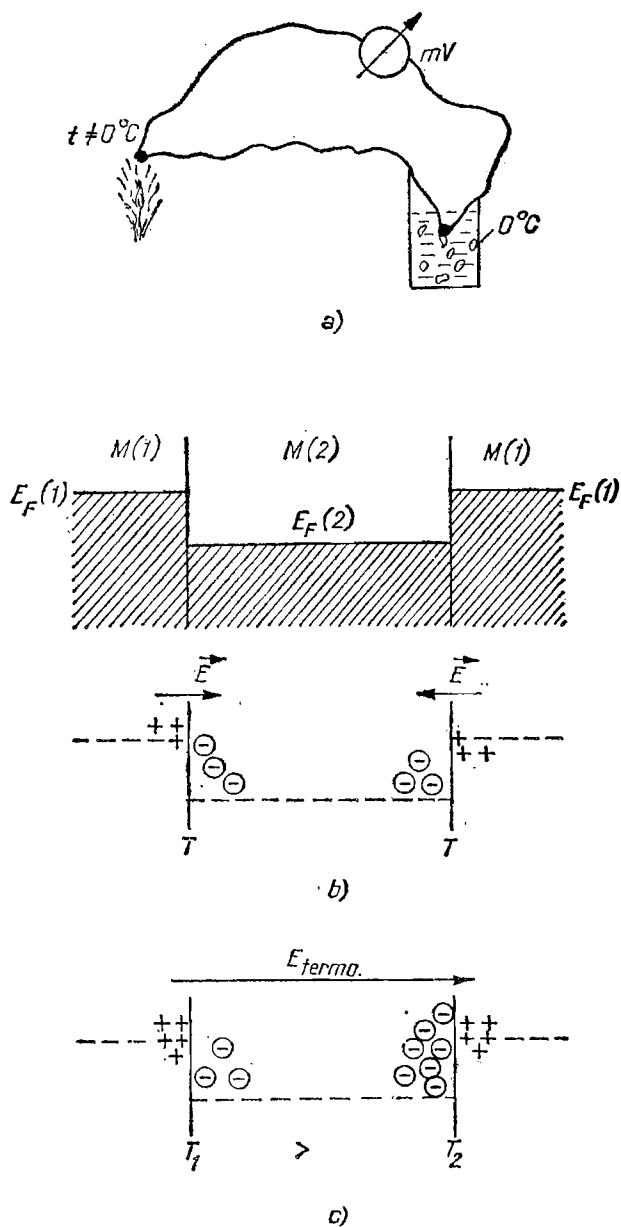


Fig. VI.3.7

tal (2) — metal (1) (fig. VI.3.7). Tensiunea termoelectromotoare  $V_t$ , măsurată cu un milivoltmetru sau cu un microvoltmetru, este proporțională cu diferența de temperatură dintre suduri

$$V_t = S(t_1 - t_2) = S\Delta t,$$

unde  $S$  este *coeficientul Seebeck*, sau puterea termoelectromotoare. În experiențe, o sudură este pusă de obicei în apă cu gheață pentru a avea o temperatură bine fixată. Coeficientul Seebeck diferă de la termocuplu la termocuplu. Valorile lui sînt cuprinse de obicei între 10 și 50  $\mu\text{V}/\text{grad}$ . Exemple de termocupluri uzuale: cupru-constantan, platină-(platină-rhodium), fier-constantan.

Vom prezenta acum o explicație succintă a efectului termoelectric folosind modelul electronilor liberi. Să presupunem că metalul (2) are nivelul Fermi mai coborît decît al metalului (1). În cele două metale electronii sînt situați deci la nivele maxime de energie diferite. În mod natural apare o tendință de trecere a electronilor cu energie mai mare din metalul (1) în metalul (2), pe nivele de energie mai scăzută, deoarece aceste stări sînt mai stabile din punct de vedere termodinamic. Această scurgere de electroni lasă însă metalul (1) încărcat pozitiv, apărînd astfel la contactul celor două metale un cîmp electric care se opune trecerii ulterioare, cîmp descris de o diferență de *potențial de contact*. Intensitatea acestui cîmp nu diferă la cele două suduri atunci cînd acestea au aceeași temperatură (fig. VI.3.7b). Atunci cînd sudurile au temperaturi diferite, electronii de la sudura mai caldă, care au trecut în metalul (2), pot fi excitați pe nivelele superioare goale și au acum o energie mai mare decît cei de la capătul rece. Din această cauză există acum tendința de realizare a echilibrului termic între cele două suduri ale metalului (2) prin migrarea unui număr de electroni de la capătul cald spre cel rece, mișcare care are loc împotriva cîmpului electric de contact. Deplasarea de sarcini de la o sudură la cealaltă face ca cele două suduri să fie încărcate diferit, apărînd astfel între ele o diferență de potențial. O discuție analogă poate fi efectuată și în cazul cînd nivelul Fermi al metalului (2) este mai ridicat decît cel al metalului (1), dar diferența de potențial dintre suduri va avea semn schimbat.

## 4. Semiconductori

### 4.1. SEMICONDUCTORI INTRINSECI ȘI SEMICONDUCTORI IMPURIFICAȚI

Semiconductorii constituie astăzi o clasă de materiale larg folosită în electronică, datorită posibilității controlului proprietăților electrice. Rezistivitatea electrică a unui semiconductor scade odată cu creșterea temperaturii iar valoarea ei poate fi modificată între limite foarte largi ( $10^{-2} - 10^3 \Omega \cdot \text{cm}$ ) prin impurificare controlată. Într-un semiconductor foarte pur, conductibilitatea electrică este dată de electronii proprii, de aceea este numită *conductibilitate intrinsecă*, iar în cazul materialelor impurificate, în care conductibilitatea este puternic afectată de prezența impurităților, avem de-a face cu conductibilitatea *extrinsecă*. Conductibilitatea intrinsecă poate fi înțeleasă în limitele teoriei zonelor de energie prin apariția de electroni liberi în zona de conducție în urma excitării termice din zona de valență (fig. VI.4.1b). Această excitare poate fi înțeleasă în modul următor: la  $0^\circ\text{K}$  toți electronii de valență sînt localizați în legăturile covalente formate între atomii semiconductorului intrinsec (vezi fig. VI.4.1a pentru Ge sau Si în gruparea tetraedrică). Odată cu creșterea temperaturii, unii electroni pot fi ruși din aceste legături fiind astfel liberi să se miște prin cristal (vezi electronul B din poziția A din fig. VI.4.1a). Această ionizare este ilustrată în schema energetică prin apariția unui electron în zona de conducție. În locul electronului excitat a rămas un ion pozitiv necompensat (*gol*, sau *gaură* în zona de valență). În poziția A, goală, poate sări un alt electron din legăturile învecinate — oricare dintre ei (de exemplu electronul C din fig. VI.4.1a) — astfel că gaura se mută pe o altă legătură. Dacă aplicăm un câmp electric, electronii liberi se vor mișca în sens invers câmpului, deci vor da naștere unui curent electric în sensul câmpului  $[\vec{j}_e]$ , dar se va produce și o mișcare a găurilor în sensul câmpului dînd naștere unui curent de sarcini pozitive ( $\vec{j}_h$ ), care se adună cu primul. Trebuie precizat că mișcarea golurilor reprezintă tot o mișcare de electroni, a electronilor de pe legăturile de valență, mișcare echivalentă cu cea a unor sarcini pozitive. Introducerea descrierii prin goluri este comodă, iar corectitudinea ei a fost verificată prin măsurători de efect Hall.

Dacă ținem seama de expresia densității de curent și apoi a conductibilității prin intermediul concentrației de electroni ( $n$ ) și găuri ( $p$ ) și a mobilităților  $\mu_n$  și respectiv  $\mu_p$ , rezultă următoarea formulă pentru conductibilitatea electrică a unui semiconductor intrinsec, în care  $n = p$ :

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p = ne\mu_n + pe\mu_p = ne(\mu_n + \mu_p).$$

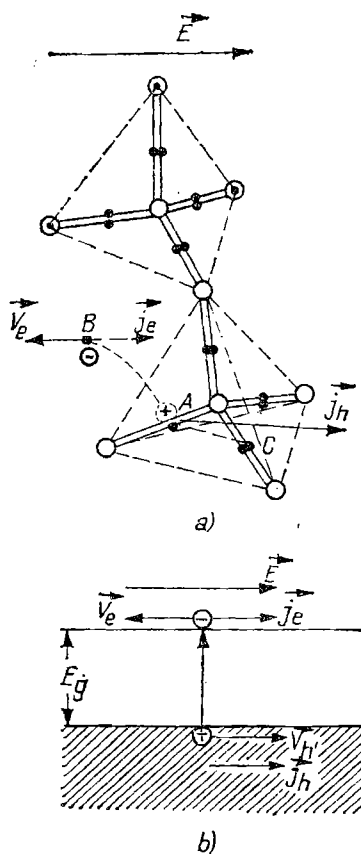


Fig. VI.4.1

Cel mai interesant fenomen îl reprezintă însă modificarea spectaculoasă a rezistivității electrice a semiconductorilor, prin impurificare. Astfel, dacă din  $10^5$  atomi de siliciu unul este înlocuit cu un atom de bor, rezistivitatea siliciului scade, la temperatura camerei, de 1000 de ori. Impurificarea constituie o problemă specifică și fundamentală a fizicii și tehnologiei semiconductorilor. Trebuie să menționăm faptul că nu orice fel de impuritate poate afecta proprietățile electrice ale unui semiconductor ci numai impuritățile a căror valență este diferită de cea a materialului gazdă. Să luăm ca exemplu germaniul și siliciul plasați în gruparea tetraedrică. Să presupunem că substituim un astfel de atom cu atomul unui element din grupa a V-a (Ev): P, As, Sb. Atomul de impuritate pune 4 electroni în comun cu cei 4 atomi din colțurile tetraedrului, dar cel de-al 5-lea electron rămâne mai slab legat, decît care poate fi rupt mai ușor și transformat în electron liber (fig. VI.4.2). Această impuritate constituie un *donor*, iar nivelul de energie este mai aproape de zona de conducție (fig. VI.4.2.b). Semiconductorul astfel impurificat este de tip *n*. Energia necesară excitării unui electron de pe un nivel donor în zona de conducție este  $E_d$  și este mai mică decît lărgimea intervalului interzis ( $E_g$ ). Să dăm

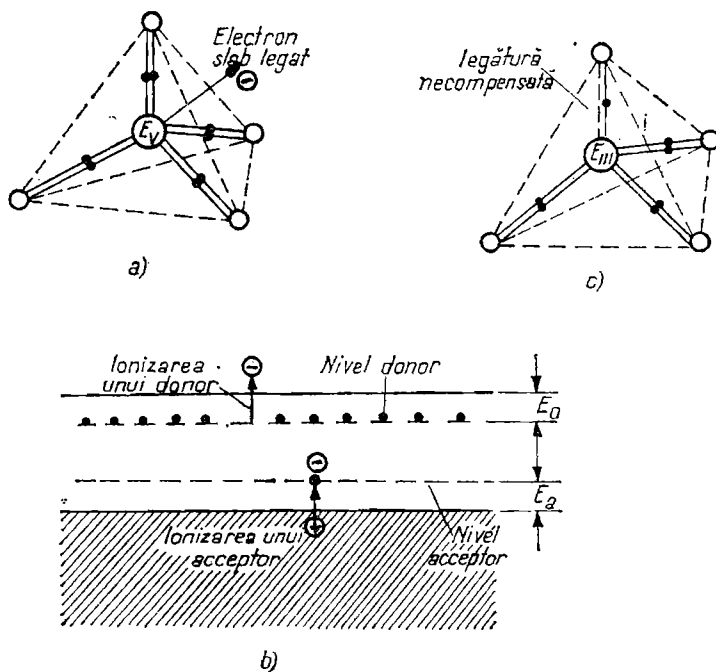


Fig. VI.4.2

cîteva exemple:  $E_d$  pentru stibiu în siliciu este de 0,039 eV și de 0,009 eV în germaniu. Deoarece  $E_d < E_g$  la temperatura camerei, conductibilitatea electrică poate să fie determinată în esență de electronii liberi apăruiți prin excitarea donurilor.

Dacă impurificarea este făcută cu atomi ai elementelor din grupa a III-a ( $E_{III}$ ), B, Al, Ga, atunci există doar trei electroni ai impurității care pot participa la legăturile covalente. A patra legătură în jurul impurității rămîne necompensată. Pe această legătură necompensată poate sări un electron de pe legăturile compensate ale atomilor gazdă generîndu-se astfel găuri în zona de valență prin captarea unui electron în jurul impurității trivalente. Din această cauză atomii acestui tip de impurități au primit numele de *acceptori*, iar nivelul respectiv de energie (fig. VI.4.2.b) este situat la o distanță  $E_a$  de zona de valență fiind plasat în intervalul interzis.  $E_a$  ca și  $E_d$  sînt mai mici decît  $E_g$ . De exemplu,  $E_a$  pentru Ga în siliciu este 0,065 eV, iar în germaniu 0,0108 eV, ceea ce face ca într-un semiconductor astfel impurificat să predominie purtătorii pozitivi, de unde și numele de semiconductor de tip *p*.

## 4.2. EFECTUL FOTOELECTRIC ÎN SEMICONDUCTORI

După cum se știe, efectul fotoelectric extern constă din emisia de electroni dintr-un metal sub acțiunea luminii, emisie care are loc numai atunci cînd frecvența radiației este mai mare decît o limită ( $\nu_0$ ):  $h\nu_0 = \Phi$ , unde  $\Phi$  este lucrul

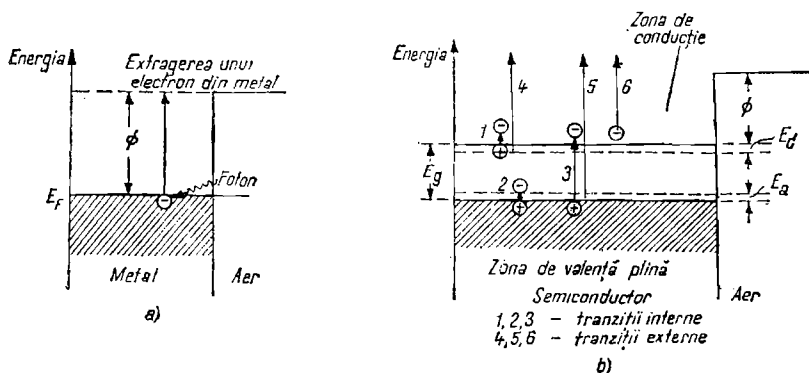


Fig. VI.4.3

de extracție. Dacă ne reprezentăm metalul ca pe o „cutie” cu electroni a căror energie are valori pînă la o anumită limită (energia Fermi), atunci emisia unui electron are loc cînd i se comunică o energie mai mare decît bariera de potențial pe care o întîlnește la suprafața metalului (fig. VI.4.3).

Efectul fotoelectric poate fi produs și într-un semiconductor, sau dielectric, dar diferă de cel produs pe metale. Să analizăm cazul unui semiconductor care are impurități de ambele tipuri (fig. VI.4.3.b). Sub acțiunea fotonilor pot fi efectuate tranzițiile 1, 2, 3 de pe nivelul donor în zona de conducție ( $\nu_1 = E_d/h$ ), din zona de valență pe nivelul acceptor ( $\nu_2 = E_a/h$ ) sau tranziții între cele două zone ( $\nu_3 = E_g/h$ ). În urma acestor excitări apar purtători liberi (efect fotoelectric intern). Cum la temperatura la care are loc iradierea probei acești purtători nu ar exista, ei au fost denumiți *purtători de neechilibru*, care după un timp (timp de viață) revin la starea inițială. Procesul de revenire se numește *recombinare*. Timpul de viață este de ordinul microsecundelor. Existența proceselor de recombinare ne explică de ce nu crește nelimitat numărul de purtători generați prin efect fotoelectric. Este evident că poate să existe efect fotoelectric extern și într-un semiconductor prin emisia directă de pe nivelele donoare ( $\nu_4 = (E_d + \Phi)/h$ ), din zona de conducție ( $\nu_6 = \Phi/h$ ) sau din zona de valență ( $\nu_5 = (E_g + \Phi)/h$ ). Aceste tranziții au loc de obicei sub acțiunea luminii de la limita violetă și ultravioletă a spectrului radiațiilor electromagnetice.

O aplicație directă a efectului fotoelectric intern o constituie *fotorezistența*, dispozitiv a cărui rezistență electrică scade sub acțiunea luminii. Ele sînt sensibile atît în vizibil, dar lucrează și în infraroșu (sulfura de plumb). Variația rezistenței sub acțiunea luminii poate fi studiată static prin inserarea fotorezistenței în brațul unei punți Wheatstone (fig. VI.4.4). Se echilibrează puntea la întuneric și apoi sub acțiunea luminii măsurîndu-se astfel direct variația rezistenței electrice în funcție de intensitatea luminii și de frecvența ei. Efectul poate fi studiat și dinamic folosind montajul din fig. 4.4.b în care a fost interpus între sursa de lumină și fotorezistență un „chopper”, adică un disc cu fante care lasă să treacă lumina în impulsuri. În felul acesta rezistența variază în timp. Dacă se înregistrează pe un oscilograf o tensiune de pe o rezistență fixă ( $R_0$ ), atunci aceasta fluctuează între  $U_i = \frac{U_0}{R_0 + R_i} R_0$  (la

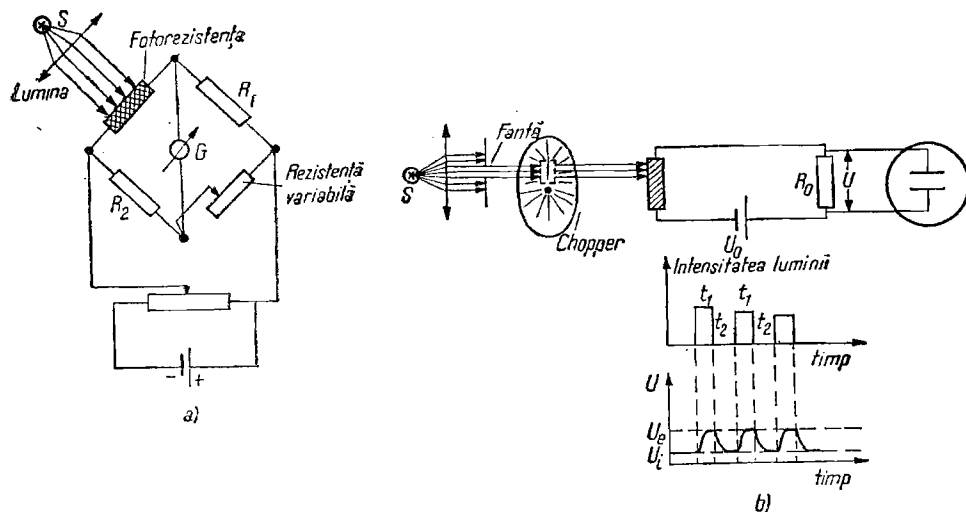


Fig. VI.4.4

întuneric) și  $U_e = \frac{U_0}{R_0 + R_e} \cdot R_0$ , la lumină, unde  $R_i$  și  $R_e$  reprezintă rezistența la întuneric, respectiv la lumină. Semnalul cules, nu urmărește la fel de rapid variațiile intensității luminii: la începutul fiecărui impuls, tensiunea crește pînă atinge o saturație, iar după încetarea iluminării, nu scade brusc la valoarea de întuneric (fig. VI.4.4). Fotorezistențele și-au găsit o sferă largă de aplicații dintre care cităm cîteva: detectoare de radiații în infraroșu (utilizare în spectroscopia în infraroșu și în scopuri militare), relee fotoelectrice în care iau locul celulelor fotoelectrice fiind mai robuste, cu gabarit mai redus și mai ieftine.

### 4.3. EFECTUL DE REDRESARE LA CONTACTUL METAL-SEMICONDUCTOR

Redresorii cu semiconductori ( $\text{Cu}_2\text{O}$ , seleniu, siliciu etc.) sînt dispozitive care pot redresa curentul alternativ renunțîndu-se la diode. Pentru a înțelege acest fenomen, să facem un contact între un metal ( $M$ ) și un semiconductor de tip  $n$  ( $S_n$ ) (fig. VI.4.5a), ale căror zone de energie nu coincid, iar lucrurile de extracție sînt diferite ( $\Phi_n \neq \Phi_s$ ). În  $S_n$  există un număr de electroni în zona de conducție care au o energie superioară electronilor metalului. Din această cauză apare o tendință de scurgere spre metal, ceea ce duce la acumularea de electroni pe suprafața metalului. Prin plecarea acestor electroni, semiconductorul rămîne încărcat pozitiv, astfel că la contactul  $M-S$  apare un cîmp electric numit *cîmp de baraj* dirijat din  $S_n$  spre metal. Metalul fiind neutru, nu acceptă electroni în plus, astfel că electronii transferați rămîn pe suprafața metalului în zona de contact. Datorită cîmpului de baraj diagrama energetică se modifică, astfel că limita superioară a zonei de valență a semiconduc-

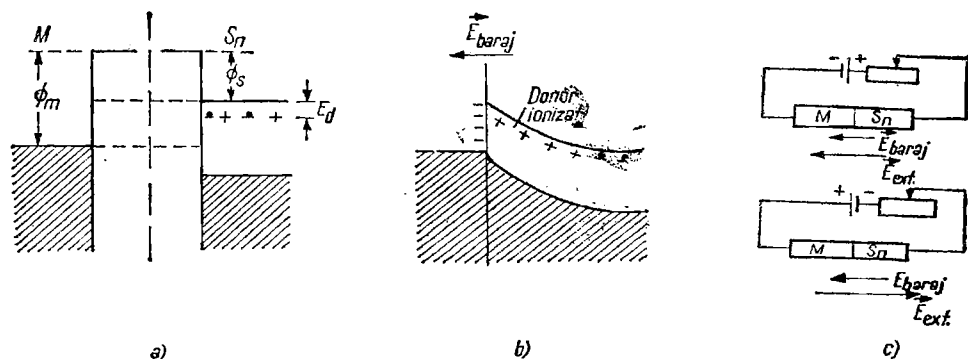


Fig. VI.4.5

torului se apropie de cea a metalului, atingându-se local un echilibru energetic.

Care este efectul unui câmp electric extern? Când câmpul electric extern ( $\vec{E}_{ext}$ ) are același sens ca și câmpul de baraj (polul pozitiv pe semiconductor) atunci electronii din metal sînt împiedicați să treacă spre semiconductor pentru că ei ar trebui să fie excitați pe stări superioare de energie. Când însă câmpul extern are sens contrar câmpului de baraj (polul negativ pe semiconductor), electronii se pot mișca din semiconductor spre metal și curentul trece ușor. În felul acesta un contact metal-semiconductor acționează ca un redresor. Un raționament analog poate fi efectuat pentru contactul metal-semiconductor de tip  $p$ . Trebuie menționat că în acest caz câmpul de baraj are sens invers.

#### 4.4. JONCȚIUNI $p - n$ ȘI APLICAȚII

a. **Formarea unei joncțiuni.** O joncțiune semiconductoră este un ansamblu format prin alipirea unui semiconductor de tip  $p$  cu unul de tip  $n$ . Zona sau interfața de separare între cele două semiconductoare  $S_n$  și  $S_p$  este de ordinul a  $10^{-4}$  cm (fig. VI.4.6). În regiunea  $S_n$  există donori neutri, donori ionizați și electroni, iar în  $S_p$  acceptori neutri, acceptori ionizați și goluri (vezi și diagrama energetică din fig. VI.4.6b). Între cele două regiuni există o diferență de concentrație de electroni, respectiv de goluri, ceea ce generează o tendință de egalare a lor prin difuzie de electroni în regiunea  $p$  și de goluri în regiunea  $n$ . În felul acesta, apare în regiunea de separare un câmp electric, care are o astfel de intensitate încît împiedică difuzia ulterioară de purtători. Electronii care au trecut în regiunea  $p$  sînt în minoritate față de goluri, de aceea ei au fost numiți purtători *minoritari*, iar ultimii — purtători *majoritari*. Rolul lor este inversat în regiunea  $n$ .

Să vedem mai explicit cum se poate fabrica o joncțiune. Vom prezenta două procedee: a) joncțiunea formată prin aliere și b) joncțiunea formată prin difuzie. Pentru joncțiunea aliată se pune o bucățică de metal trivalent (aluminiiu de exemplu) pe o lamă de germaniu sau siliciu de tip  $n$  (fig. VI.4.7a) Se încălzește sistemul pînă se topește metalul, formîndu-se o picătură care nu se împrășteie datorită tensiunii superficiale (fig. VI.4.7b). Din lichid, o parte din



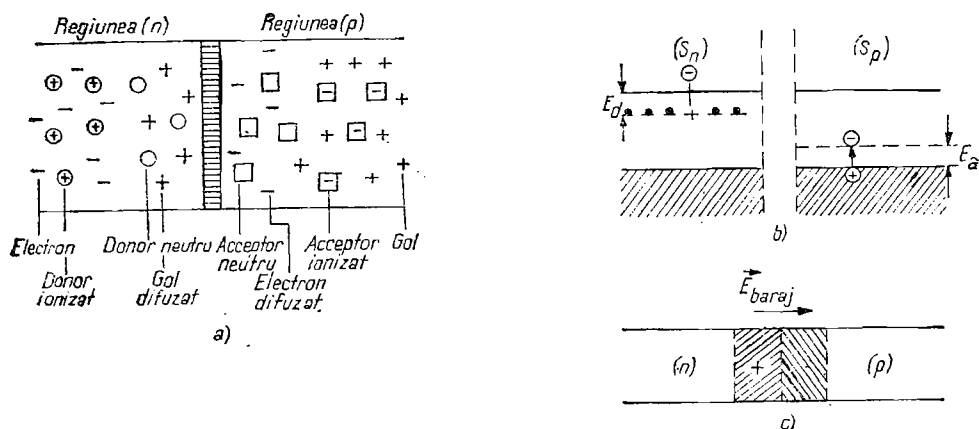


Fig. VI.4.6

atomii metalului trivalent intră în rețeaua semiconductorului formînd un strat de tip  $p$ . Contactele sînt asigurate între baza inferioară pe care s-a depus un strat metalic care asigură un contact ohmic și metalul solidificat de pe suprafața exterioară (fig. VI.4.7c). Pentru tipul al doilea se depune prin evaporare în vid o impuritate trivalentă, pe suprafața unui semiconductor de tip  $n$  (fig. VI.4.7d). Prin încălzire, impuritatea difuzează formînd joncțiunea  $p-n$  (fig. VI.4.7.e).

b) **Acțiunea de redresare a unei joncțiuni  $p-n$ . Dioda semiconductoră.** Apariția cîmpului electric de baraj în zona joncțiunii indică imediat posibilitatea folosirii ei ca redresor. O joncțiune poate fi alimentată în sens direct (polarizată în sens direct) cînd polul (+) al sursei de tensiune se află pe regiunea ( $p$ ), iar cel negativ pe regiunea ( $n$ ) (fig. VI.4.8), sau în sens *invers*, cînd polaritatea alimentării este schimbată. Prin aplicarea cîmpului electric în

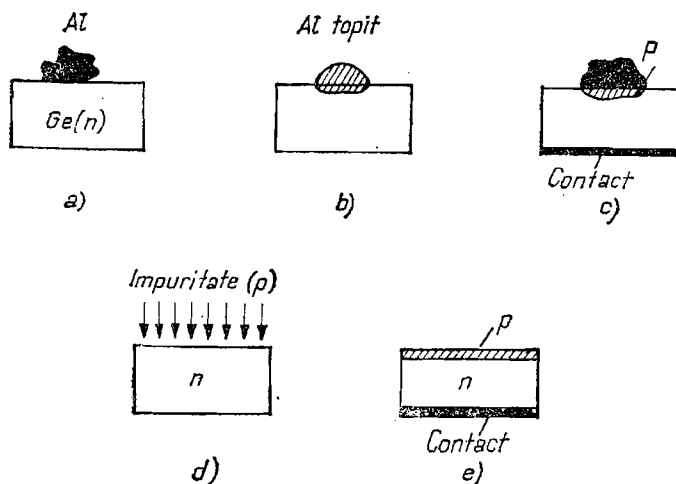


Fig. VI.4.7

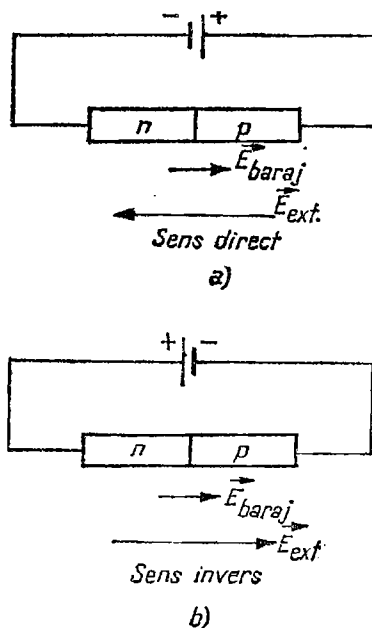


Fig. VI.4.8

sens direct are loc o micșorare a barierei de potențial între cele două regiuni, deoarece câmpul extern are sens invers câmpului de baraj și ușurează mișcarea electronilor din regiunea  $n$  în regiunea  $p$ , respectiv a golurilor spre regiunea  $n$  și deci curentul poate trece. Câmpul aplicat în sens invers are același sens cu câmpul de baraj și deci împiedică mișcarea purtătorilor.

Ne putem imagina acum că o joncțiune poate juca rolul unei diode în curent alternativ, regiunea  $p$  fiind echivalentul anodului, iar regiunea  $n$  — rolul catodului. Se pune problema dacă prin aplicarea tensiunii în sens invers dioda poate suporta orice tensiune. Răspunsul este negativ. Să analizăm pe scurt caracteristica tensiune-curent a unei diode semiconductoare (fig. VI.4.9), rugînd

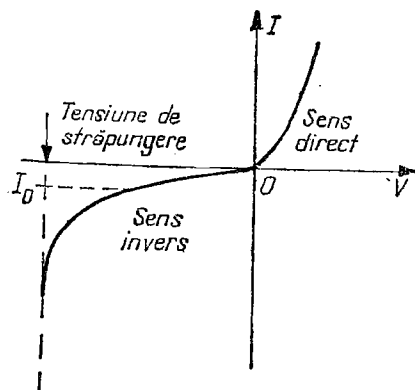
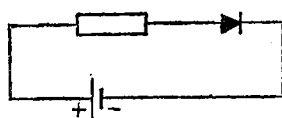


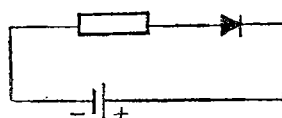
Fig. VI.4.9

cititorii s-o compare cu cea a unei diode cu emisie termoelectrică. Când  $V > 0$  (polarizare directă), intensitatea curentului crește rapid la variații mici ale tensiunii. Astfel într-o joncțiune  $p-n$  cu germaniu, pentru o tensiune de 0,1 V pe joncțiune, densitatea de curent atinge 100 mA/cm<sup>2</sup>. Când tensiunea are semnul schimbat (polarizare inversă) curentul este slab, atingând o valoare de saturație. Pentru aceeași diodă, la 100 V densitatea de curent, este de 0,5 mA/cm<sup>2</sup>. La o anumită valoare a tensiunii are loc străpungerea diodei. Deci o diodă semiconductoare nu suportă tensiuni inverse oricât de mari am dori!

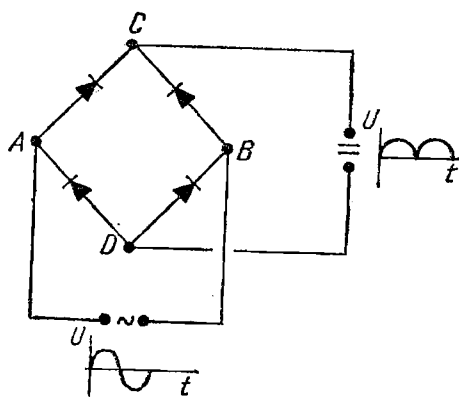
O diodă semiconductoare este notată grafic prin semnul  $\rightarrow$ . Modul de alimentare este indicat în fig. VI.4.10a și b. Un montaj de redresare a ambelor alternanțe, folosit în mod curent, conține 4 diode dispuse într-o punte cu 4 ramuri (fig. VI.4.10c). Tensiunea alternativă este aplicată între două puncte opuse (C și D). Într-o alternanță, în care A este pozitiv, curentul trece de la



a)



b)



c)

Fig. VI.4.10

A la C, prin circuitul exterior revine la D, apoi la B și de aici la sursă. În cealaltă alternanță, curentul pleacă din B, trece prin C, prin circuitul exterior, prin D și A și din nou la sursă.

#### 4.5. TRANZISTORUL

De când Bardeen, Brattain și Shockley (SUA) au inventat tranzistorul în 1948, s-a dezvoltat furtunos o nouă ramură în electronică — *electronica semiconductoare*. Au fost create de atunci zeci de tipuri de tranzistori, astfel că în rîndurile de față, ne vom mărgini în a expune doar principiile de funcționare ale unui tranzistor,  $p-n-p$  obținut prin montarea a două diode semiconductoare în opoziție (fig.VI.4.11): o diodă este polarizată în sens direct (*emiterul*), iar cealaltă — în sens invers (*colectorul*). Regiunea din mijloc a tranzistorului (*baza*) este legată în circuit printr-un contact făcut cu un strat metalic. Să analizăm pe scurt mersul curenților. În prima diodă are loc o injecție de goluri din regiunea  $p$  în  $n$  ( $I_{ep}$ ) și o injecție de electroni din  $n$  în  $p$  ( $I_{en}$ ), fiind generați doi curenți care se adună

$$I_e = I_{en} + I_{ep}.$$

În bază are loc o separare a curentului electronic de cel al golurilor, primul închizîndu-se prin bateria  $B_e$ . Curentul de goluri este dirijat spre cea de-a doua regiune  $p$  legată la polul negativ la bateriei  $B_c$ . Deoarece rolul anodului care colecta electronii este luat de această regiune, i-a fost atribuit numele de *colector*. Spre deosebire de anodul unei triode colectorul este legat la polul negativ pentru un tranzistor  $p-n-p$ , dar este legat la plus pentru un tranzistor  $n-p-n$ . Curentul colectorului, în cazul nostru, este format din curentul la saturație obținut sub tensiunea inversă ( $I_{co}$ ) și dintr-o fracțiune a curentului care vine de la emiter ( $I_e$ )

$$I_e = I_{co} + \alpha I_e,$$

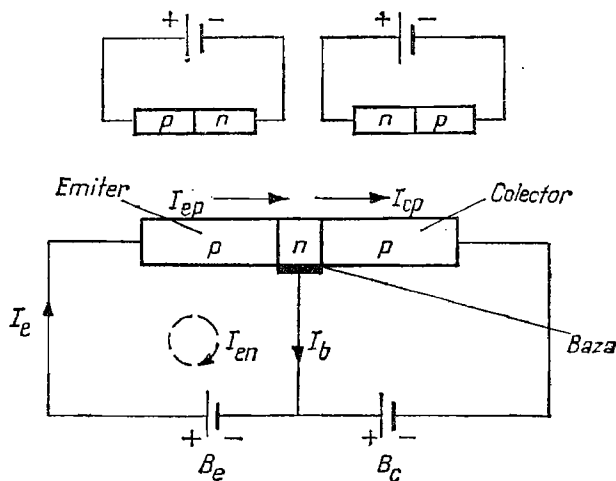


Fig. VI.4.11

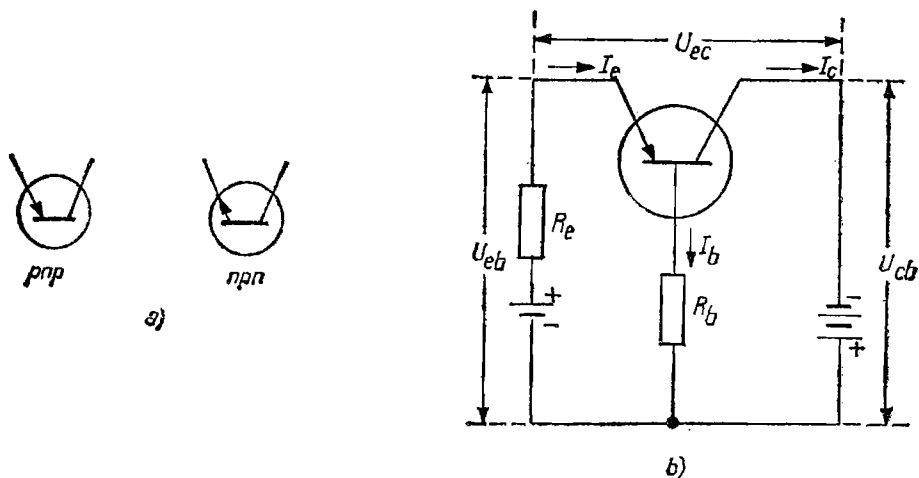


Fig. VI.4.12

unde  $\alpha$  este *factorul de amplificare*, care ne arată că intensitatea curentului de goluri ajuns la colector este diferită de cea plecată de la emiter. Nu ajunge deci tot curentul de goluri la colector, pentru că golurile sînt purtători minoritari în regiunea  $n$  și de aceea ele se pot recombină cu electronii. Pentru ca acest proces să fie redus, baza, respectiv regiunea  $n$ , trebuie să fie cît mai îngustă. De ce dacă  $\alpha < 1$  avem de-a face cu o amplificare? Este vorba de o amplificare a tensiunii, deoarece joncțiunea a II-a are o impedanță mare în raport cu prima. În sfîrșit, curentul bazei  $I_b$  este format din curentul deviat din  $I_e$ , din care se scade  $I_{co}$ :

$$I_b = (1 - \alpha) I_e - I_{co}.$$

Un tranzistor poate fi folosit în toate circuitele electronice jucînd rolul de redresor, amplificator sau oscilator. În fig. VI.4.12 a sînt date simbolurile

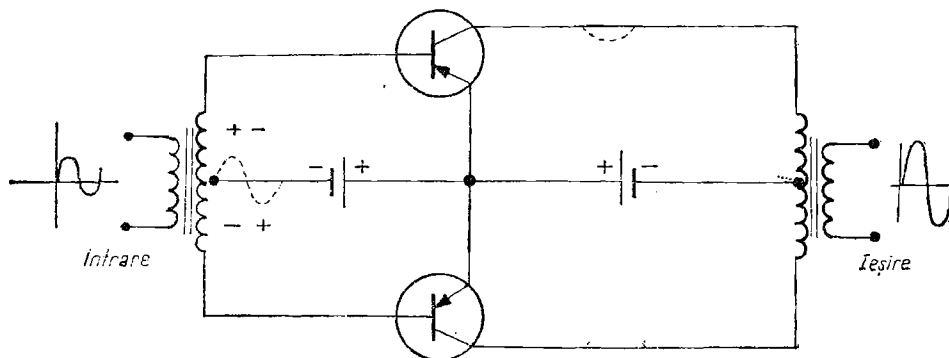


Fig. VI.4.13

grafice, pentru tranzistorii  $p-n-p$  și  $n-p-n$ , iar în fig. VI.4.12 *b* este reprezentată schema de alimentare a unui tranzistor  $p-n-p$  cu baza comună, fiind indicați curenții și tensiunile importante. Un exemplu de folosire al tranzistorului ca amplificator îl constituie montajul „push-pull” (fig. VI.4.13) în care doi tranzistori sînt astfel montați, încît fiecare să amplifice o alternanță. Semnalul amplificat este introdus în primarul transformatorului de ieșire.

## 5. Emisia stimulată a luminii (LASER)

### 5.1. INVERSIUNEA POPULAȚIILOR

După cum se știe, atomii și moleculele corpurilor se află într-o neconținută mișcare dezordonată, energiile lor cinetice fiind distribuite în jurul unor anumite valori medii ce depind numai de temperatură. În afară de aceasta, atomii și moleculele se pot afla în diferite stări discrete de energie (stări electronice, stări de vibrație, de rotație etc.), astfel încât absorbția sau cedarea energiei de către aceste particule are loc numai în cuante corespunzătoare tranziției între două stări energetice staționare. Distribuția atomilor (sau moleculelor) pe aceste stări energetice este de asemenea funcție de temperatura corpului. Această dependență trebuie înțeleasă în felul următor: la o temperatură dată, numărul atomilor aflați în stări energetice joase este mult mai mare decât al celor excitați pe nivelele superioare de energie. Dacă temperatura corpului crește, distribuția se modifică, în sensul că sistemul devine mai bogat în atomi excitați pe nivele de energie din ce în ce mai mare. În fig. VI.5.1 *a* sînt reprezentate trei nivele de energie ale unui atom  $E_1 < E_2 < E_3$ . Să reprezentăm simbolic prin cerușele numărul de atomi care la o temperatură dată posedă energia corespunzătoare nivelelor respective. Nivelul cel mai înalt,  $E_3$ , este populat cu numărul cel mai mic de atomi excitați, iar nivelul cel mai jos, cu numărul cel mai mare de atomi ( $N_3 < N_2 < N_1$ ). Aceasta este repartiția obișnuită a atomilor unui corp aflat în *echilibru termodinamic* la o temperatură

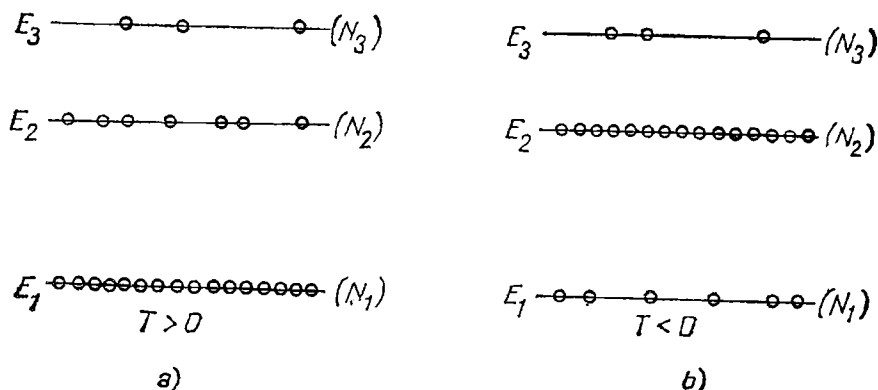


Fig. VI.5.1

dată. Ea este descrisă matematic printr-o relație care reprezintă *legea de distribuție a lui Boltzmann*. Astfel, pentru temperatură  $T$ , între numărul  $N_2$  de atomi de pe nivelul de energie  $E_2$ , și numărul  $N_1$  al celor aflați pe un nivel inferior  $E_1$  ( $E_2 > E_1$ ) există relația:

$$N_2 = N_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad (5.1)$$

unde  $k$  este constanta lui Boltzmann. Evident, dacă  $E_2 > E_1$ , atunci  $N_2 < N_1$ , deoarece temperatura absolută  $T$  este totdeauna o mărime pozitivă. Pe măsură ce încălzim corpul ( $T$  crește), numărul  $N_2$  de atomi excitați pe nivelul superior  $E_2$  crește, dar nu va putea niciodată deveni mai mare decât  $N_1$ . Într-adevăr, chiar în cazul în care  $T \rightarrow \infty$ ,  $N_2$  tinde să devină egal cu  $N_1$  (deoarece  $e^{1/\infty} = 1$ ), dar nu mai mare.\* Așadar, în condiții obișnuite, de echilibru termodinamic, nu vom putea obține pe cale termică  $N_2 > N_1$ . Dacă însă, pe o altă cale, am putea popula mai mult nivelul 2 decât nivelul 1, adică dacă am putea realiza ceea ce se numește o *inversiune de populație* între nivelele  $E_2$  și  $E_1$ , atunci relația (5.1) ne furnizează, formal, o *temperatură absolută negativă*. Într-adevăr, logaritmînd relația (5.1) obținem:

$$T = -\frac{E_2 - E_1}{k \ln \frac{N_2}{N_1}}.$$

Dacă, așa cum am spus, am obține  $N_2 > N_1$ , atunci  $\ln N_2/N_1$  este pozitiv, și, deoarece și diferența  $E_2 - E_1$  este pozitivă, rezultă că  $T$  este negativ. Trebuie spus însă, de la bun început, că noțiunea de temperatură negativă nu are sens în termodinamică, unde sînt studiate numai stările de echilibru. Stările cu temperatură negativă sînt stări de neechilibru termodinamic, legate cum am văzut, de schimbare forțată a populațiilor pe nivelele de energie. Această noțiune, ciudată pentru termodinamica obișnuită, poate fi interpretată în *fizica statistică*, în care sînt studiate și stările de neechilibru. Întrucît această interpretare depășește cadrul acestei cărți este preferabil să se folosească în locul ei noțiunea de inversiune a populațiilor, care are un sens fizic mai direct, înțelegînd prin populația unui nivel energetic  $E$  numărul total de atomi din corpul fizic dat, care se află în starea de energie  $E$ . Acest fenomen, de inversiune a populațiilor între două nivele cuantice ale unui sistem fizic stă la baza fenomenului de emisie stimulată a luminii așa cum vom vedea mai departe.

## 5.2. EMISIA SPONTANĂ ȘI EMISIA INDUSĂ

Un atom aflat în starea de energie superioară  $E_2$  poate reveni pe un nivel inferior  $E_1$  fie spontan, emițînd o cantă de energie  $h\nu = E_2 - E_1$ , fie ca urmare a interacțiunii cu un foton de frecvență egală cu cea corespunzătoare inter-

---

\* Cu titlu informativ, relevăm faptul că relația lui Boltzmann (5.1) arată că la orice temperatură  $T > 0$  corpurile pot emite unde electromagnetice prin dezexcitarea atomilor de pe nivelele superioare (de tipul  $E_2$ ), dat fiind că totdeauna există un anumit număr ( $N_2 \neq 0$ ) de atomi excitați, capabili să emită. Doar la  $T = 0$  (zero absolut) avem  $N_2 = 0$ , adică încetează orice emisie din partea acestor corpuri.



valului dintre cele două nivele  $\nu_{\text{incident}} \frac{E_2 - E_1}{h}$ . Primul fenomen se numește *emisie spontană*, iar cel de al doilea — *emisie indusă* sau *stimulată*, fiind deseori numit și *emisie forțată*. Emisiile spontane și stimulate au fost considerate prima dată de A. Einstein în 1917. Evident, în cazul emisiei induse, pe lângă fotonul incident, mai apare încă unul, de aceeași energie și în fază cu primul. Acesta, la rândul său, ar putea provoca apariția unui alt foton când întâlnește un nou atom în starea  $E_2$ , și așa mai departe, încât am putea obține astfel o amplificare a radiației incidente, dacă în proba iradiată s-ar găsi destul de mulți atomi în starea superioară  $E_2$ . În realitate, fenomenul de amplificare, practic, nu există, deoarece, după cum am văzut, la echilibru termodinamic nivelul superior  $E_2$  este mult mai puțin populat decât  $E_1$  și atunci fenomenul cel mai frecvent la iradierea unei substanțe va fi interacțiunea fotonilor incidenti cu numeroșii atomi aflați în starea energetică inferioară  $E_1$ . Această interacțiune poate duce, după cum știm, la excitarea atomului în starea energetică  $E_2$ . Atomul stă însă în starea excitată un timp limitat numit *viață medie a stării excitate*, după care revine în starea de energie inferioară  $E_1$ , fie prin cedarea energiei  $E_2 - E_1$  atomilor vecini, sub formă de căldură (tranziție neradiativă), fie prin emisia unui foton (tranziție radiativă). Acest nou foton poate ieși din corpul iradiat sau poate fi la rândul său absorbit în urma altor procese de excitare. Deci, în condiții normale, din corpul iradiat va ieși în unitatea de timp un număr de fotoni mai mic decât cel incident și astfel radiația incidentă va fi totdeauna slăbită în urma trecerii ei prin corpul respectiv. În aceste considerații am neglijat reflexiile, presupunându-le neînsemnate.

### 5.3. PRINCIPIUL DE FUNCȚIONARE A LASERULUI\*

Din cele spuse mai sus reiese că orice corp iradiat va emite o putere mai mică decât puterea incidentă, datorită pierderilor, care pînă la urmă, duc la încălzirea corpului. Să examinăm însă cu mai multă atenție bilanțul energetic al fenomenelor. Să presupunem că trimitem asupra unui corp o radiație electromagnetică ai cărei fotoni au energie  $h\nu$ , egală cu diferența dintre energiile  $E_2$  și  $E_1$  ( $E_2 > E_1$ ) a două nivele. Dacă notăm cu  $I_\nu$  numărul de fotoni incidenti, de energie  $h\nu$ , în unitatea de timp, atunci puterea radiației incidente este  $P_{\text{inc.}} = I_\nu h\nu$ . O parte din acești fotoni vor fi absorbiți de atomii aflați pe nivelul inferior  $E_1$ , provocînd tranziția acestora pe nivelul  $E_2$ . Desigur, numărul tranzițiilor  $E_1 \rightarrow E_2$  în unitatea de timp va fi proporțional cu numărul fotonilor incidenti  $I_\nu$  și cu numărul  $N_1$  de atomi aflați în starea  $E_1$ . Notînd coeficientul de proporționalitate cu  $B_{12}$ , puterea absorbită (consumată pentru excitarea atomilor) este  $P_{\text{excit.}} = B_{12} I_\nu N_1 h\nu$ . O parte din atomii aflați în starea energetică  $E_2$  vor reveni spontan pe nivelul  $E_1$  fie radiativ, fie neradiativ. Pentru simplificare, vom analiza numai dezexcitățile radiative. Fotonii emiși cu această ocazie au aceeași energie  $h\nu$ , iar numărul lor va fi evident proporțional cu numărul  $N_2$  de atomi aflați pe nivelul energetic  $E_2$ . Dacă vom nota cu  $A_{21}$  coeficientul de proporționalitate, atunci puterea emisă de corp prin

---

\* LASER: Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation (Amplificarea luminii prin emisia stimulată a radiației).

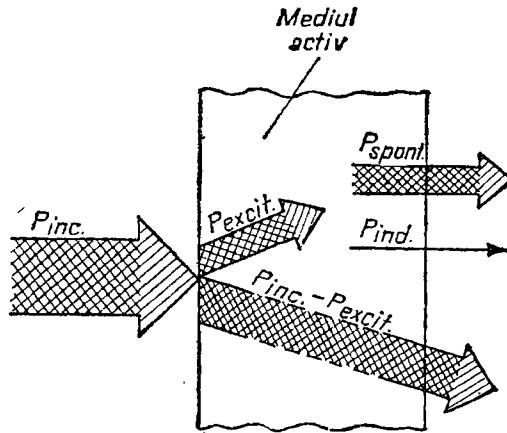


Fig. VI.5.2

dezexcitare spontană va fi  $P_{\text{spont.}} = A_{21}N_2h\nu$ . Ea nu depinde de intensitatea radiației incidente  $I_\nu$ . O altă parte din atomii de pe nivelul  $E_2$  se vor dezexcita în urma acțiunii fotonilor incidenti (emisie stimulată). Luînd tot numai cazul radiativ, numărul fotonilor astfel formați va fi proporțional de asemenea cu  $N_2$ , dar și cu numărul  $I_\nu$  al fotonilor ce provoacă această emisie stimulată. Notînd cu  $B_{21}$  coeficientul de proporționalitate, puterea emisă prin tranziții induse va fi  $P_{\text{ind.}} = B_{21}I_\nu N_2h\nu$ . Mărimile  $B_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  se numesc *coeficienții lui Einstein* și au, printre altele, proprietatea  $B_{21} = B_{12}$ . Din schema dată în fig. VI.5.2 se vede ușor că puterea emisă de sistemul iradiat este:

$$P_{\text{emis}} = P_{\text{inc.}} + P_{\text{spont.}} + P_{\text{ind.}} - P_{\text{excit.}}, \quad (5.2)$$

de unde

$$P_{\text{emis}} = P_{\text{inc.}} + A_{21}N_2h\nu + B_{21}I_\nu (N_2 - N_1)h\nu \quad (5.3)$$

În cazul surselor obișnuite (corpuri incandescente, descărcări în gaze, flăcări etc.), cel mai important termen este cel corespunzător emisie spontane. Însă pentru a realiza o sursă în care puterea emisă să fie mai mare decît puterea incidentă, în primul rînd trebuie ca ultimul termen — singurul care ar putea aduce o contribuție negativă la sumă — să fie pozitiv adică  $N_2 > N_1$ ; cu alte cuvinte, este necesar în primul rînd să se realizeze o inversiune a populațiilor între cele două nivele. În al doilea rînd, pentru a avea, practic, numai emisie stimulată sau, cu alte cuvinte pentru ca emisia spontană să fie neglijabilă, trebuie ca termenul  $A_{21}N_2h\nu$  să fie neglijabil față de ultimul. Aceasta se poate realiza mărind considerabil intensitatea radiației incidente  $I_\nu$ . Valoarea lui  $I_\nu$  pentru care se realizează condiția de mai sus se numește *intensitate de prag*. Ea se calculează pentru fiecare dispozitiv în parte, iar în calculul ei intră și coeficienții de reflexie ai suprafețelor. Așadar, dacă, folosind o anumită sursă de energie, realizăm inversiunea de populație între două nivele energetice ale atomilor unui mediu dat (care în acest caz se mai numește și mediu activ), iar intensitatea radiației incidente depășește intensitatea de prag, puterea radiată de mediul activ poate deveni mai mare decît puterea incidentă și obținem în acest fel un *amplificator cuantic de radiație* prin emisie

stimulată (laser). Dacă în urma iradierii mediului activ cu o radiație de o anumită frecvență, el furnizează o radiație laser de o altă frecvență (în general, mai mică) însă de asemenea mult mai intensă, dispozitivul se numește *generator cuantic de radiație*.

#### 5.4. NIVELELE ENERGETICE ALE IONILOR PARAMAGNETICI ÎN DIELECTRICI

Pentru explicarea funcționării laserului pe nivele este util să spunem câteva cuvinte despre spectrele optice ale ionilor din grupa metalelor de tranziție (ne vom referi mai ales la grupa fierului), când aceștia sînt incluși în cristale dielectrice. După cum se știe, în aceste metale există pătura  $3d$  care se completează pe măsură ce crește numărul atomic, de la vanadiu la cupru, deși pătura  $4s$  poate fi completată, cum este cazul manganului, fierului, cobaltului, nichelului, ș.a. Datorită păturilor incomplete, acești ioni pot avea diverse stări de valență:  $Mn^{2+}$ ,  $Mn^{3+}$  și  $Mn^{4+}$ ;  $Fe^{2+}$  și  $Fe^{3+}$  etc.... În felul acesta ionii bivalenți din această grupă pot substitui ionii bivalenți ai unui cristal dielectric (de exemplu,  $Mg^{2+}$  din  $MgO$ ), iar ionii trivalenți de tranziție pot substitui ionii trivalenți ai unui cristal dielectric (ex.  $Al^{3+}$  din  $Al_2O_3$ ). Ce se poate constata? Ionii care impurifică aceste cristale le modifică culoarea. De exemplu ionul  $Cr^{3+}$  introdus în  $Al_2O_3$  transformă monocristalul de corindon încolor în rubinul roșu. Alte pietre semiprețioase de culoare verzuie, albastră (topaz, ametist) se obțin prin impurificare cu alți ioni din grupa fierului, ioni care au un moment magnetic diferit de zero. Care este explicația colorării? Mecanica cuantică demonstrează că un câmp electric poate să despică nivelele de energie ale atomilor și ionilor. O astfel de despicare are loc în cristalele dielectrice în câmpul electric produs de ionii înconjurători, astfel că nivelul  $3d$  al ionilor introduși este despicat în mai multe nivele (fig. VI.5.3). În loc să avem doar

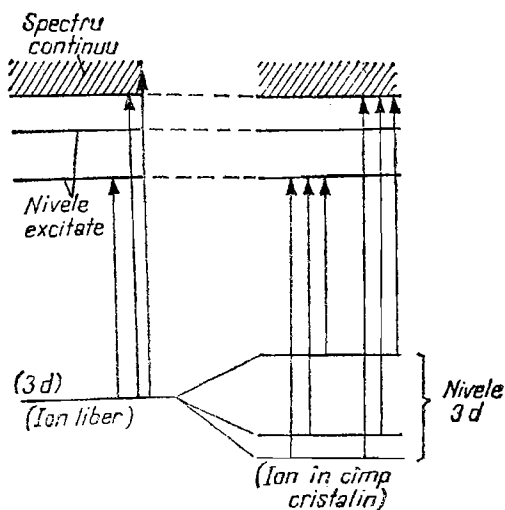


Fig. VI.5.3

tranziții între nivelul  $3d$  și nivelele excitate, care pot fi și ele despicate la rîndul lor în câmpul rețelei cristaline, pot să existe mai multe tranziții care au loc sub acțiunea radiației electromagnetice din domeniul vizibil, ceea ce duce la modificarea culorii. În fig. VI.5.3 este redată numai o schemă ipotetică de despicare în care nivelele excitate nu ar fi afectate de câmpul cristalin. Se vede cum prin despicarea nivelului  $3d$ , ionul de tranziție aflat în cristal prezintă mai multe tranziții electronice. Un exemplu concret cu o schemă completă de nivele este oferit de ionul  $\text{Cr}^{3+}$  în  $\text{Al}_2\text{O}_3$  care este redată în fig. VI. 5.5. Cunoașterea acestor nivele de energie, a mecanismului de despicare, a influenței concentrației impurităților a oferit cheia descoperirii laserului pe rubin și mai apoi a construirii unei mari varietăți de laseri pe nivelele impurităților incluse în diverse cristale dielectrice sau în sticle.

## 5.5. LASERUL CU RUBIN

În fig. VI.5.4 (a)  $R$  reprezintă o bară cilindrică de rubin roz tăiată dintr-un monocristal obținut pe cale sintetică din corindon (oxid de aluminiu,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) impurificat în mod controlat cu ioni trivalenți de crom ( $\text{Cr}^{+++}$ ) în proporție de aproximativ 0,05%, astfel că, în medie, din 2000 atomi de Al unul este înlocuit cu  $\text{Cr}^{+++}$ . Suprafețele de bază  $S_1$  și  $S_2$  ale barei sînt paralele, foarte bine șlefuite și acoperite cu un strat de argint, obținut prin evaporare în vid. Una din fețe, și anume  $S_2$ , are un strat mai subțire de Ag (este „semiargintat”), avînd rolul de a permite ieșirea fasciculului laser (transparența ei este de aproximativ 5–10%). Aceste două suprafețe reflectătoare fac ca volumul barei de rubin să se comporte ca o cavitate rezonantă\* pentru lumina din interiorul ei. Bara  $R$  este montată pe una din cele două axe focale ale unei

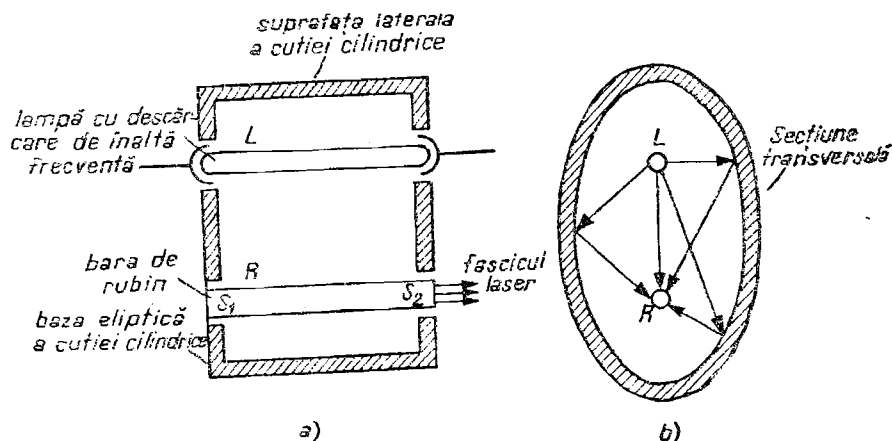


Fig. VI.5.4

\* Cavitatarea rezonantă este o incintă cu pereți reflectători, în interiorul căreia se pot întreține oscilații electromagnetice de amplitudine maximă, atunci cînd frecvența lor este egală cu frecvența proprie (de rezonanță) a cavității. Este folosită în mod curent în radio-tehnică și constituie, pentru undele electromagnetice, analogul rezonatorilor din acustică.

cutii cilindrice cu secțiunea eliptică, avînd suprafața interioară reflectătoare. În cealaltă axă focală se află o lampă cu descărcare în gaze,  $L$ . Aceasta constituie „lampa de pompaj” a dispozitivului. Lumina produsă de ea este concentrată pe cristalul de rubin  $R$ , în urma reflexiilor de pe oglinda eliptică (fig. VI.5.4b). Bara de rubin constituie mediul activ al dispozitivului în care se produce efectul laser. În fig. VI.5.5 sînt reprezentate schematic nivelele de energie ale rubinului implicate în acest efect, folosind notațiile spectroscopice. Radiațiile din domeniul verde-albastru, cu lungimile de undă în vecinătatea valorii  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$  și conținute în lumina emisă de lampa  $L$ , provoacă

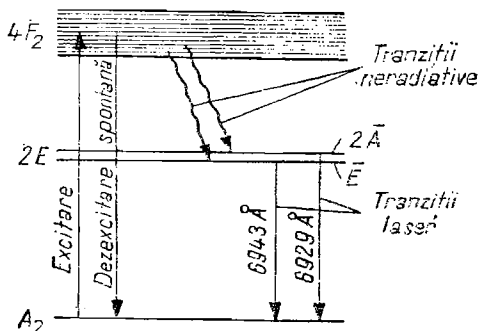


Fig. VI.5.5

tranziții ale ionilor de crom ( $\text{Cr}^{+++}$ ) de pe nivelul  $4A_2$  pe numeroasele nivele de energie situate în banda  $4F_2$ . Îndată după excitație, are loc dezexcitarea spontană a ionilor de crom aflați pe nivelele din banda  $4F_2$ : unii prin tranziții spontane radiative pe nivelul  $4A_2$ , neinteresante pentru efectul laser, cu care ocazie sînt emiși fotoni avînd energia egală cu cea absorbită la tranziția  $4A_2 \rightarrow 4F_2$ , iar alții, prin tranziții spontane neradiative pe nivelul energetic  $2E$ . Diferența de energie a tranzițiilor  $4F_2 \rightarrow 2E$  este preluată de vibrațiile rețelei cristaline sub formă de energie termică, încălzind deci cristalul. Nivelul  $2E$  este însă un nivel metastabil, adică un nivel energetic pe care particulele excitate zăbovesc, pînă la dezexcitarea lor spontană, un interval de timp mult mai lung decît cel al nivelelor obișnuite de excitație (amintim că viața medie a stărilor excitate este, de obicei, de ordinul  $10^{-8} \text{ s}$ ). Ioni de crom de pe nivelul  $2E$  au o viață medie, în această stare, cu cîteva ordine de mărime mai mare decît în stările din banda  $4F_2$ . Cu alte cuvinte, în unitatea de timp, numărul dezexcitărilor spontane  $2E \rightarrow 4A_2$  este mult mai mic decît numărul de tranziții spontane  $4F_2 \rightarrow 4A_2$ . Dacă acum intensitatea luminii excitate verde-albastră este suficient de mare (intensitatea de prag), astfel ca în unitatea de timp numărul fotonilor radiației excitatoare să depășească numărul dezexcitărilor spontane de pe nivelele  $4F_2$  și  $2E$  pe nivelul fundamental  $4A_2$ , atunci va avea loc un proces de acumulare a ionilor excitați pe nivelul  $2E$ , ca urmare a tranzițiilor spontane neradiative  $4F_2 \rightarrow 2E$ , pînă ce acest nivel devine mai populat decît nivelul inferior  $4A_2$ . Se realizează astfel inversiunea de populație între nivelele  $2E$  și  $4A_2$ . Fenomenul de excitație pe nivelele  $4F_2$ , superioare nivelului metastabil care ne interesează ( $2E$ ), în scopul realizării inversiunii de populație între  $2E$  și  $4A_2$ , se numește *pompaj optic*.

După realizarea suprapopulării, bara de rubin  $R$  are o mare concentrație de ioni de crom excitați pe nivelul metastabil  $2E$ . Primii fotoni emiși *spontan*, în urma tranziției de pe acest nivel pe nivelul fundamental  $4A_2$ , întâlnind alți ioni aflați pe nivelul  $2E$ , provoacă tranziția stimulată a acestora pe nivelul  $4A_2$  și deci noi fotoni, care, la rândul lor, vor provoca emisii stimulate și așa mai departe, în cascadă, ceea ce duce la depopularea aproape instantanee a nivelului  $2E$  și deci la emisia unui număr foarte mare de fotoni. Trebuie spus că la acest proces de „golire” rapidă a nivelului metastabil  $2E$ , un rol hotărâtor îl joacă cele două oglinzi  $S_1$  și  $S_2$  (plan—paralele, în dispozitivul din fig. VI.5.4) care fac ca o parte din noii fotoni produși în volumul barei să străbată, în urma reflexiilor, de mai multe ori lungimea ei, înainte de a o părăsi, măbind astfel considerabil numărul actelor de dezexcitare rezonantă a ionilor de crom aflați în starea  $2E$ . În afară de efectul de reținere a energiei electromagnetice în interiorul mediului activ, aceste reflexii unidirecționale repetate provoacă și o acumulare a fotonilor, cu precădere de-a lungul axei. În cele din urmă, după realizarea condiției de prag, aceștia ies prin oglinda semitransparentă  $S_2$ , constituiți într-un fascicul *paralel* de lumină *coerentă*, extrem de *intens* și *monocromatic*, numit *fascicul laser*.

Trebuie spus că, folosind ca nivel de pompaj o bandă largă (banda  $4F_2$ , în cazul nostru) și nu un nivel îngust, obținem o eficiență sporită a pompatului. Într-adevăr, pentru excitarea atomilor în banda  $4F_2$  este folosit un număr mare de radiații monocromatice ale lămpii de pompaj, corespunzător numeroaselor nivele energetice ale acestei benzi. Înseamnă, deci că folosind o *lămpă* de pompaj cu spectru continuu, vom obține un număr mult mai mare de atomi excitați (capabili de efect laser) pe o bandă largă, decât pe un nivel îngust.

Mai trebuie să precizăm că, de fapt, nivelul  $2E$  este un „dublet”, adică este alcătuit din două subnivele notate  $\bar{E}$  și  $2\bar{A}$  (fig. VI.5.5). Se poate obține deci efect laser pentru două tranziții:  $\bar{E} \rightarrow 4A_2$  ( $\lambda_1 = 6943\text{\AA}$ ) și  $2\bar{A} \rightarrow 4A_2$  ( $\lambda_2 = 6929\text{\AA}$ ). Ambele radiații se află, după cum se vede, în regiunea roșie a spectrului vizibil. Nu sînt însă la fel de intense; cea mai intensă este radiația avînd lungimea de undă  $\lambda_1 = 6943\text{\AA}$ , datorită faptului că tranzițiile neradiative  $4F_2 \rightarrow 2E$  populează cu precădere nivelul  $\bar{E}$  mai rapid decât nivelul  $2\bar{A}$ . În condiții speciale de depunere a stratelor reflectate, s-a putut obține o intensitate apreciabilă, și pentru cealaltă radiație.

În experiențele descrise, laserul cu rubin funcționează ca un *generator cuantic de radiație*: este iluminat cu o radiație verde-albastră, care realizează pompatul și generează lumină roșie. El poate funcționa însă și ca *amplificator cuantic de radiație*. Se realizează în prima etapă inversiunea de populație prin pompat în modul arătat. Trimișind pe dispozitiv radiația roșie (de exemplu,  $\lambda = 6943\text{\AA}$ ), aceasta este puternic amplificată. În ambele cazuri fenomenul de bază este emisia stimulată. În cazul generatorului, emisia este stimulată de primii fotoni emiși spontan, iar în cazul amplificatorului, de fotonii radiației incidente.

După cum am spus, depopularea nivelului  $2E$  are loc într-un timp *extrem* de scurt, ceea ce face ca semnalul luminos generat să scadă brusc. Emisia se va putea *repetă* după ce nivelul  $2E$  va fi din nou populat, prin pompat, de către lămpa  $L$ . Deci, dacă puterea lămpii de pompaj nu este suficientă pentru a menține o suprapopulare permanentă a nivelului  $2E$ , în condițiile în care acesta se „golește” foarte repede, emisia laserului va fi alcătuită din im-

pulsuri de lumină, ce se repetă cu o frecvență care depinde de puterea lămpii și de valoarea intensității de prag. Majoritatea laserilor cu rubin funcționează în regim de impulsuri. Folosind însă un cristal prelucrat în mod special și un alt sistem de pompare, s-au obținut laseri cu rubin cu funcționare continuă, la care suprapopularea nu este distrusă în timpul emisiei.

## 5.6. LASERUL CU GAZ

În timp ce în laserul cu rubin inversiunea de populație se realizează prin pompare optică, cu o radiație electromagnetică, în laserul cu gaz această inversiune se realizează de obicei, prin ciocniri electronice. În fig. VI.5.6 sînt reprezentate elementele principale ale unui laser cu amestec de heliu și neon. Mediul activ îl constituie plasma unei descărcări electrice într-un tub de sticlă de lungime aproximativ 1 m și diametru interior între 2 mm și 15 mm, în care se află amestecul gazos. Presiunea totală a amestecului depinde de diametrul tubului. Pentru un diametru de 3 mm, de exemplu, presiunea tubului este de aproximativ 1 mm Hg. Presiunea parțială a heliului este de 5 pînă la de 10 ori mai mare decît cea a neonului. Descărcarea poate fi produsă atît în curent alternativ de înaltă frecvență, cu  $\nu \approx 30$  MH (fig. VI.5.6), cît și în curent continuu. Oglinzile sferice  $O_1$  și  $O_2$ , cea de a doua — semitransparentă, formează, împreună cu spațiul de descărcare, rezonatorul optic. Tubul de descărcare este prevăzut cu două ferestre transparente înclinate cu unghiul Brewster față de axa tubului (direcția de propagare a luminii laser), pentru reducerea pierderilor prin reflexie.

În fig. VI.5.7 este dată o schemă simplificată a cîtorva nivele de energie implicate în efectul laser: în stînga sînt două nivele ale atomului de heliu, notate cu  $1S$  și  $2^3S$ , iar în dreapta, trei nivele ale atomului de neon, notate cu  $1p$ ,  $2p$  și  $2s$ .

În volumul descărcării, atomii de heliu sînt excitați pe nivelul  $2^3S$  în urma ciocnirilor cu acei electroni care au energia cinetică egală cu energia de excitare

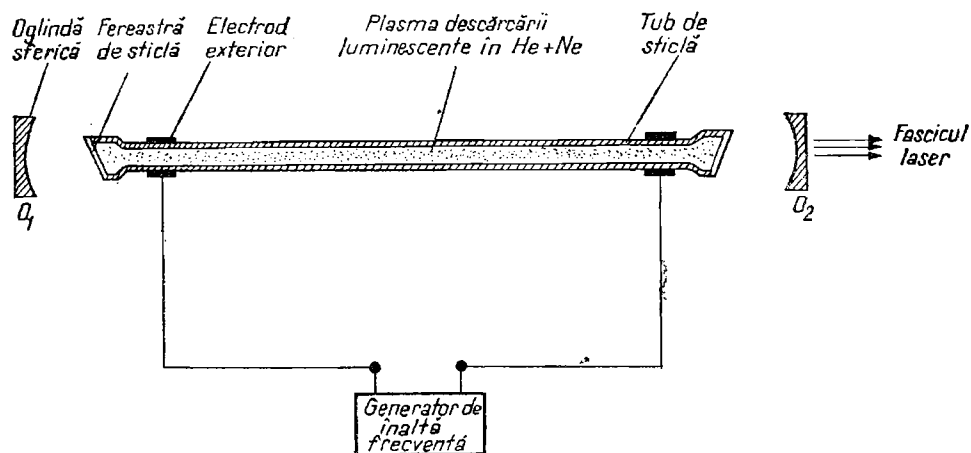


Fig. VI.5.6

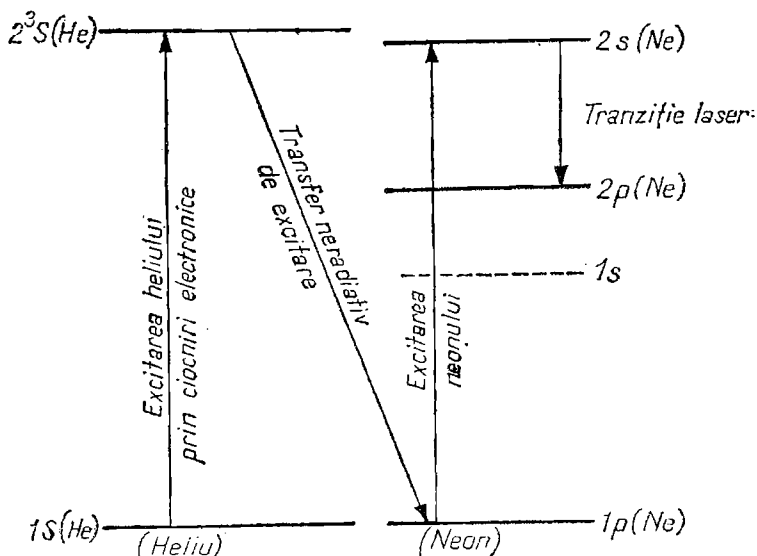


Fig. VI.5.7

a nivelului respectiv (19,81 eV). Dar printre nivelele de energie ale atomului de neon se află unul (2s) avînd energia aproape egală cu cea corespunzătoare stării  $2^3S$  a heliului. De aceea ciocnirea dintre atomul de *heliu în starea*  $2^3S$  și atomul de *neon* duce la dezexcitarea atomului de heliu și excitarea atomului de neon în starea 2s, în urma unui proces de transfer a energiei de excitare a heliului către atomul de neon. Starea 2s a atomului de neon are însă o viață medie cu aproximativ un ordin de mărime mai mare decît cea a stării inferioare 2p a aceluiași atom. Datorită acestui fapt, între aceste două nivele ale neonului se realizează inversiunea de populație: la temperatura dată, concentrația atomilor de neon excitați în starea 2s va depăși concentrația lor în starea 2p. La suprapopularea nivelului 2s contribuie și faptul că în timpul ciocnirii atomilor de heliu ( $2^3S$ ) și neon (1p), excitarea neonului în starea 2s este un fenomen mult mai probabil decît excitarea sa în starea 2p, datorită caracterului aproape rezonant al transferului de energie între nivelele  $2^3S(He)$  și  $2s(Ne)$ . Odată realizată suprapopularea nivelului 2s (Ne) față de 2p (Ne), primele tranziții spontane  $2s \rightarrow 2p$  sau o radiație exterioară de energie  $h\nu = E_{2s} - E_{2p}$  declanșează emisia stimulată între aceste două nivele și deci apariția fascicului laser.

De fapt, nivelul 2s (Ne) este format la rîndul său din 4 subnivele, iar nivelul 2p, din 10 subnivele. În afară de aceasta, mai există o pereche de nivele,  $2^1S(He)$  și  $3s(Ne)$  care pot interacționa rezonant, ducînd la inversiunea de populație între 3s (4 subnivele) și altele inferioare ale neonului. Toate acestea au făcut ca în amestecul  $He + Ne$  să se obțină zeci de linii laser corespunzătoare diverselor tranziții ale neonului. Dintre toate, cea mai intensă este o radiație din infraroșu, cu lungimea de undă  $\lambda = 11\,527\text{ \AA}$ , dată de o tranziție între 2s și unul din subnivelele stării 2p.



Întrucît energiile corespunzătoare nivelelor în cauză ale heliului și neonului nu sînt perfect egale (există între ele diferențe de ordinul a  $10^{-3}$  eV), interacțiunea nu are caracter de rezonanță exactă, mica diferență de energie fiind preluată, neradiativ, de mișcarea termică a atomilor din incinta tubului de descărcare.

Datorită numeroaselor ciocniri electronice din descărcare, tubul conține în orice moment o cantitate destul de mare de atomi de heliu excitați și, ca urmare, o populație destul de numeroasă de atomi de neon excitați pe nivelul 2s. Aceasta face ca inversiunea de populație să se mențină chiar și în timpul tranziției laser, ceea ce înseamnă că acest laser poate funcționa în mod continuu. Această proprietate constituie un important avantaj față de laserul cu solid, care de regulă funcționează în impulsuri. Laserii solizi pot însă furniza puteri radiante mult mai mari decît cei gazoși.

## 5.7. LASERUL CU SEMICONDUCTORI

Emisia stimulată poate să apară și în semiconductori. Lucrări în acest domeniu au apărut din 1962, cele mai multe fiind consacrate arseniurii de galiu (Ga As). Spre deosebire de laserul pe nivele atomice, laserul cu semiconductori se realizează prin inversiunea populațiilor într-o joncțiune. Astfel, dacă o diodă cu joncțiune este supusă unei tensiuni directe, de la o anumită valoare a ei se poate inversa populația în imediată vecinătate a joncțiunii. Este necesară însă folosirea unei joncțiuni degenerate\* a cărei diagramă de energie este indicată în fig. VI.5.8, unde am marcat prin  $n$  și  $p$  regiunile de conducție electronică și, respectiv, de goluri. Spre regiunea de tranziție difuzează electroni din regiunea  $n$  și golurile din regiunea  $p$ , astfel că în acest spațiu există un proces de recombinare electron — gol, adică de „cădere” a electronului de pe nivelele ocupate din zona de conducție pe stările goale din zona de valență (traziția este indicată pe fig. VI.5.8). Dacă pentru crearea unei

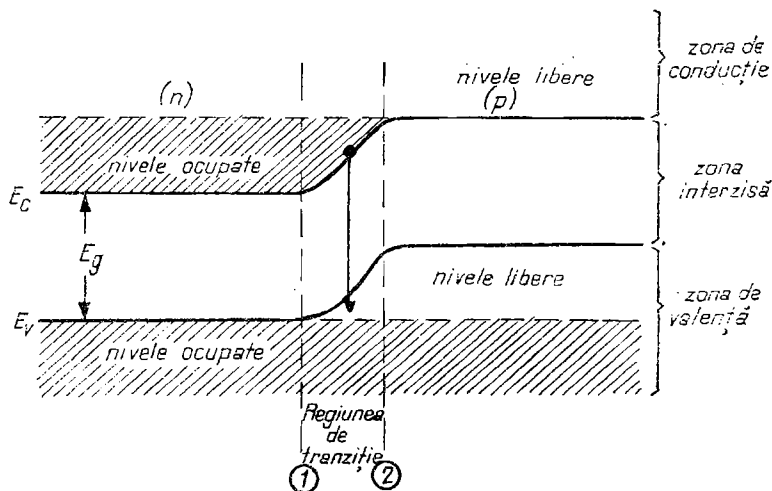


Fig. VI.5.8

\* O joncțiune este degenerată dacă în regiunea  $n$  sînt complete stările de la fundul zonei de conducție, iar în regiunea  $p$  sînt complete stările de la vîrfurile zonei de valență.

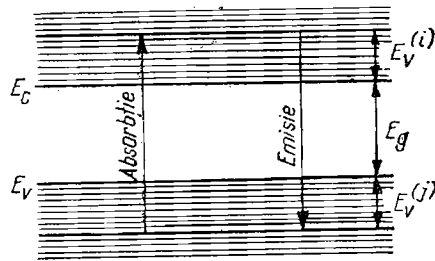


Fig. VI.5.9

perechi electron — gol, respectiv pentru o excitare, a unui electron din banda de valență în cea de conducție este necesară absorbția unui foton, prin recombinare va fi emis un foton de aceeași energie. Fie  $E_c^{(i)}$  distanța de la un nivel din banda de conducție pînă la limita ei inferioară,  $E_g$  — lărgirea zonei interzise, iar  $E_v^{(j)}$  distanța de la un nivel de energie, din banda de valență, pînă la limita ei superioară (fig. VI.5.9). O tranziție între cele două stări are loc numai cu absorbția sau emisia unui foton de energie  $E_g + E_c^{(i)} + E_v^{(j)} = h\nu_{ij}$ . Se remarcă faptul că fotonii a căror energie este mai mică decît  $E_g$  nu pot induce tranziții. Pentru a analiza condiția de inversiune a populațiilor într-o astfel de joncțiune trebuie să plecăm de la faptul că actele de excitare și dezexcitare trebuie să țină seama de nivelele de energie disponibile în cele două bande. Vom face următoarele notații:  $N_c(E)$  și  $N_v(E)$  sînt, respectiv, numerele de stări pînă la limita  $E$  în cele două bande, iar  $n_c(E)$  și  $n_v(E)$  reprezintă numerele de stări ocupate. Vom nota prin  $\mathcal{P}$  probabilitatea de a avea loc o tranziție între două nivele situate în cele două bande. Numărul de excitări, adică de tranziții din banda de valență în banda de conducție  $N_{v \rightarrow c}$  este proporțional atît cu numărul de stări ocupate în banda de valență, de pe care vin electronii, cît și cu numărul de stări disponibile în banda de conducție, pe care sar, adică

$$N_{v \rightarrow c} = \mathcal{P} n_v (N_c - n_c),$$

unde  $\mathcal{P}$  joacă rolul de coeficient de proporționalitate. Numărul de dezexcitări, adică recombinații (tranziții din banda de conducție în cea de valență,  $N_{c \rightarrow v}$ ) este proporțional însă cu numărul de stări ocupate în banda de conducție și cu numărul de stări disponibile în cealaltă,

$$N_{c \rightarrow v} = \mathcal{P} n_c (N_v - n_v).$$

Expresia probabilității de tranziție este calculată cu ajutorul mecanicii cuantice.

Se vede așadar, că dacă  $N_{c \rightarrow v} > N_{v \rightarrow c}$ , va predomina emisia. Inegalitatea aceasta furnizează și condiția de inversiune a populațiilor:

$$\frac{n_c}{N_c} > \frac{n_v}{N_v}.$$

Dacă vom compara această condiție cu cea impusă inversiunii populațiilor în cazul a două nivele izolate ( $N_2 > N_1$ ), se poate remarca o diferență, în sensul

că în laserul cu semiconductori este necesar ca numărul relativ de stări energetice superioare ocupate (stări din banda de conducție) să fie mai mare decât raportul respectiv calculat pentru stările energetice inferioare (cele din zona de valență). Nu vom intra în detaliile de funcționare ale acestui tip de laser; vom menționa însă un fapt deosebit: la laserul pe nivele avem de-a face cu o frecvență bine determinată, în timp ce în schema din fig. VI.5.7 există mai multe nivele, deci mai multe posibilități de dezexcitare, deci n-am avea de-a face cu o emisie monocromatică, adică n-am avea de-a face cu un laser în adevăratul înțeles al cuvântului. Fizicienii au reușit însă să depășească și acest obstacol, obținând o emisie stimulată aproape monocromatică.

## 5.8. PROPRIETĂȚILE RADIAȚIEI LASER

Într-o sursă obișnuită atomii excitați emit radiații electromagnetice complet întâmplător și independent unul de altul. Între semnalele luminoase ale atomilor nu există deci vreo diferență de fază constantă în timp; ele se întăresc și se slăbesc reciproc în mod haotic, conducând la o intensitate medie și, de aceea se spune că lumina emisă de sursele obișnuite nu este coerentă. Într-o cavitate laser, deși emițătorii de lumină sînt tot atomi individuali, ei emit, cum am văzut, în fază cu radiația stimulatoră. Lumina astfel emisă este coerentă. Fără a intra în detalii, observăm că datorită coerenței, undele laser nu vor mai interfera haotic, ci numai prin adunare, ceea ce face ca *intensitatea fasciculului laser* să devină foarte mare. La creșterea intensității contribuie și faptul că marea cantitate de fotoni (deci de energie) este emisă într-un timp extrem de scurt prin dezexcitarea stimulată a unui număr imens de atomi excitați. Valoarea intensității emise depinde desigur de tipul de laser folosit. Pînă în prezent, intensitățile cele mai mari au fost obținute cu laserii cu solid. Dacă, de exemplu, lumina emisă, la vîrfurile impulsului, de către un laser obișnuit, de 100 kW, este concentrată, cu ajutorul unui sistem optic, pe o suprafață de aproximativ  $0,008 \text{ mm}^2$ , se obține o iluminare a acestei suprafețe de aproximativ  $5 \cdot 10^4$  ori mai mare decât iluminarea obținută de la Soare cu același sistem optic, iar intensitatea luminoasă este cam de 20 de ori mai mare decât intensitatea emisă de o arie egală din suprafața Soarelui. Dispozitivele laser speciale, care produc așa-numitele *pulsuri gigantice*, pot da intensități de 1 000 000 de ori mai mari decât laserii obișnuiți. Intensitatea focalizată pe o suprafață pe care lumina solară ar produce  $10 \text{ W/cm}^2$ , este, în cazul acestor laseri, de peste 10 000 000 000  $\text{W/cm}^2$ .

O altă calitate a fasciculului laser este *monocromaticitatea* sa, rezultată printre altele, din faptul că tranzițiile atomilor de pe nivelul suprapopulat sînt practic, simultane. Fasciculul cel mai apropiat de monocromatismul ideal îl dau laserii cu gaz. Urmează cei cu solid (rubin, sau sticlă cu neodiu, de exemplu), apoi cei cu semiconductori.

În sfîrșit, o proprietate foarte importantă a radiației laser este *direcționalitatea* sa extrem de pronunțată. În timp ce lumina unei surse obișnuite poate fi transformată într-un fascicul paralel numai cu ajutorul unor sisteme optice colimatoare, lumina laser este emisă de la început sub forma unui fascicul paralel. Paralelismul fasciculului emergent este un rezultat al acțiunii oglinzilor rezonatorului, datorită cărora multiplele reflexii din cavitate pot avea

loc, practic, numai după direcția axei sale. În timp ce un reflector obișnuit de lumină, orientat de pe Pământ spre Lună, ar lumina pe suprafața acesteia o arie de aproximativ 27 000 km în diametru, un fascicul laser luminează o porțiune cu un diametru mai mic de 3 km. Aceasta a permis, de exemplu determinarea cu foarte mare precizie a distanței de la Pământ pînă la Lună.

După domeniul spectral în care funcționează, dispozitivele de generare și amplificare a radiației prin emisie stimulată poartă, uneori, denumiri diferite. Astfel, dacă în domeniul vizibil, ei se numesc *laseri*, în domeniul microundelor ei poartă numele de *maseri*, iar în infraroșu — *iraseri* (microundă = micro-wave, infraroșu = infrared).

## 5.9. APLICAȚII ALE EMISIEI STIMULATE

Radiațiile emise de dispozitivele laser au o mare varietate de aplicații în fizică, chimie, tehnică, industrie, biologie și medicină. Cadrul impus cărții de față nepermițînd o descriere a celor mai importante aplicații, ne vom mîrgini aci doar la enumerarea cîtorva.

În primul rînd laserii sînt folosiți ca *amplificatori* și *generatori* de unde electromagnetice, așa cum am văzut. Fasciculul laser, putînd dezvolta temperaturi care pot topi sau vaporiza orice material existent pe Pământ, este folosit la *prelucrarea materialelor foarte dure*, cum ar fi perforarea pieselor de diamant sau la microsudurii în electronică și chirurgie. Marea directivitate a fasciculului de radiații stimulate a dus la construirea unor *instrumente radar cu foarte mare putere de rezoluție*, atît pe distanțe terestre, cît și astronomice. Este folosit la *ghidarea sateliților artificiali și a navelor interplanetare*. Pe lîngă realizările spectaculoase din domeniul *fotografiei obișnuite*, utilizarea radiației laser a *revoluționat tehnica fotografiei în relief*, dînd posibilitatea obținerii unor fotografii în relief fără obiectiv fotografic. Noua tehnică poartă numele de *holografie*, iar fotografiile respective se numesc *holograme*. Marea monocromaticitate a fasciculului laser a determinat folosirea lui ca *etalon de frecvență și de timp*.

Există de asemenea multe aplicații de ordin pur științific ale laserilor. Astfel, cîmpurile electrice ale radiației laser, putînd atinge valori ce depășesc cîmpurile electrostatice intraatomice, este posibilă obținerea de noi informații asupra structurii materiei, precum și asupra interacțiunii fotonului cu substanța. Coerența aproape perfectă a fasciculului laser, determină folosirea sa în studiul aprofundat al interferenței și difracției undelor electromagnetice. Folosind laseri în domeniul infraroșu, pot fi controlate anumite reacții chimice, datorită acțiunii radiației laser asupra mișcărilor vibratorii ale moleculelor. Deoarece cantitatea de informații pe care o poate transporta o undă electromagnetică este proporțională cu frecvența ei, modularea luminii laser permite transmiterea unui volum foarte mare de informații care depășește cu mult performanțele celor mai bune mijloace clasice în tehnica telecomunicațiilor, iar aplicarea dispozitivelor laser în tehnica calculatoarelor electronice deschide perspectiva măririi considerabile a vitezei de lucru a acestora și anume, de aproximativ 10 000 de ori față de viteza de lucru a calculatoarelor obișnuite.

## PROBLEME

1. Să se calculeze lungimea de undă pentru difracția Bragg pe planele paralele cu fețele unui cub simplu, dacă radiațiile X vin pe direcția diagonalei de volum. Se dă  $a = 2 \text{ \AA}$ .

R:  $\lambda \simeq 2,36 \text{ \AA}$ .

2. Un metal bivalent cristalizează într-o rețea cvc cu  $a = 2 \text{ \AA}$ . Să se calculeze timpul de relaxare dacă  $\rho = 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ .

R:  $\tau \simeq 7,7 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ .

3. Să se calculeze tensiunea Hall care ar fi măsurată pe o probă dreptunghiulară din metalul precedent, groasă de  $1 \text{ 000 \AA}$ , dacă  $I = 10 \text{ mA}$ , iar  $B = 1 \text{ T}$ .

R:  $V_H \simeq 10^{-6} \text{ V}$ .

4. Explicați apariția efectului Seebeck la contactul metal-semiconductor, prin analogie cu efectul la contactul metal-metal!



## A.1. ALGEBRĂ

**Progresia aritmetică.** Fie progresia aritmetică  $\div a_1, a_2, \dots, a_n$  de rație  $r$  și  $S_n$  suma sa. Există relațiile:  $a_n = a_1 + (n-1)r$ ,  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ .

**Progresia geometrică.** Fie progresia geometrică  $\div a_1, a_2, \dots, a_n$  de rație  $q$  și  $S_n$  suma sa. Există relațiile:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Dacă progresia este descrescătoare ( $|q| < 1$ ) și numărul termenilor — infinit ( $n \rightarrow \infty$ ), avem

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (\text{A. 1})$$

TABELUL A.1 : Ecuații algebrice

Forma ecuației	Formulele soluțiilor (rădăcinilor)	Relații între rădăcini și coeficienți
$ax + b = 0$	$x_1 = -b/a$	$x_1 = -b/a$
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 + x_2 = -b/a$ $x_1 x_2 = c/a$

## A.2. TRIGONOMETRIE

Amintim câteva din identitățile fundamentale:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Sinusul și cosinusul sumei și diferenței a două unghiuri:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Relații pentru unghiul dublu:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

Transformarea sumelor în produse:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

### A.3. CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

Prin definiție, derivata unei funcții continue  $f(x)$  este

$$f'(x_0) = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A.2})$$

Diferențiala  $df$  a funcției  $f(x)$  este:

$$df = f'(x) dx. \quad (\text{A.3})$$

Dacă considerăm că punctul  $x$  este suficient de apropiat de  $x_0$ , adică dacă  $|\Delta x| = |x - x_0| \ll 1$ , se poate scrie în locul relației (A.2) relația aproximativă,

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sau

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (\text{A.4})$$

Această egalitate aproximativă este cu atât mai bine satisfăcută cu cât  $\Delta x$  este mai mic. Dacă luăm  $x_0 = 0$ , relația (A.4) ne dă valoarea aproximativă a lui  $f(x)$  într-un punct  $x$  apropiat de zero ( $|x| \ll 1$ ):

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x. \quad (\text{A.5})$$

Se poate demonstra că aproximația pe care am făcut-o pentru a obține relațiile (A.4) constă în neglijarea în membrul drept a unor termeni proporționali cu puteri superioare ale lui  $\Delta x$ , adică  $(\Delta x)^2$ ,  $(\Delta x)^3$ , ... În consecință, pentru a aproxima mai bine pe  $f(x)$  trebuie introduși în membrul drept al relației (A.4) și acești termeni. Analog, în cazul relației (A.5), trebuie adăugați termeni proporționali cu  $x^2$ ,  $x^3$ ...



TABELUL A.2

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(0)$	$f(0) + f'(0) \cdot x$
$(1 \pm x)^{-1}$	$\mp (1 \pm x)^{-2}$	$\mp 1$	$1 \mp x$
$(1 \pm x)^{1/2}$	$\pm 1/2(1 \pm x)^{-1/2}$	$\pm 1/2$	$1 \pm x/2$
$(1 \pm x)^{-1/2}$	$\mp 1/2(1 \pm x)^{-3/2}$	$\mp 1/2$	$1 \mp x/2$
$e^x$	$e^x$	1	$1 + x$
$\sin x$	$\cos x$	1	$x$
$\cos x$	$-\sin x$	0	1
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	1	$x$

În primul rând al tabelului A.2, am găsit  $1/(1-x) \simeq 1+x$ . Comparînd cu ecuația (A.1) observăm că aproximația făcută prin folosirea relației (A.5) constă tocmai din neglijarea puterilor superioare ale lui  $x(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$ . Cititorul poate verifica, de exemplu pentru  $x = 10^{-3}$ , că acești termeni contribuie de-abia de la a șasea zecimală în timp ce termenul în  $x$  contribuie la a treia zecimală.

Deoarece derivata funcției  $\cos x$  se anulează în  $x = 0$ , relația (A.5) ne dă  $\cos x \simeq 1$ . Pentru a obține o aproximație dependentă de  $x$  trebuie considerați și termeni în  $x^2$ . Deoarece nivelul cărții nu ne permite introducerea riguroasă în relația (A.5) a termenilor în  $x^2$ , vom proceda, în cazul funcției  $\cos x$ , astfel:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \simeq 1 - 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.6})$$

unde am folosit faptul că  $\sin \frac{x}{2} \simeq \frac{x}{2}$  (tabelul A.2).

În tabelele de mai jos indicăm derivatele și integralele nedefinite ale cîtorva funcții care ne interesează în cuprinsul cărții:

TABELUL A.3 Derivatele  $\frac{df(u)}{dx}$  cu  $u = u(x)$ 

Funcția	Derivata	Funcția	Derivata
$Ku$	$Ku'$	$\operatorname{tg} u$	$u'/\cos^2 u$
$u^\alpha$ ( $\alpha$ real)	$\alpha u^{\alpha-1} u'$	$\operatorname{ctg} u$	$-u'/\sin^2 u$
$\sin u$	$u' \cos u$	$e^u$	$u' e^u$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$\ln u$	$u'/u$

Reamintim și regulile de derivare:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right),$$

unde  $u$  și  $v$  sînt funcții de  $x$ .

TABELUL A.4 Integrale nedefinite.

Funcția	Integrala	Funcția	Integrala
$K$ (const)	$Kx + C$	$1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$e^x$	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$1/x$	$\ln  x  + C$

#### A.4. GEOMETRIE ANALITICĂ

Poziția unui punct oarecare  $P$  în plan este unic determinată dacă se cunosc două numere  $(x, y)$  numite coordonatele punctului. Într-un sistem de coordonate dreptunghiular aceste reprezentă distanțele de la  $P$  la cele două axe, sau, așa cum se vede din fig. A.1, segmentele orientate de la originea  $O$  la proiecțiile  $A$  și  $B$  ale punctului pe cele două axe ( $x = \overline{OA}$ ,  $y = \overline{OB}$ ).

În cazul mai general al unui punct  $P$  din spațiu, poziția sa este unic determinată dacă se cunosc trei coordonate  $x, y$  și  $z$ . Pentru aceasta vom considera o a treia axă  $Oz$  perpendiculară pe planul  $xOy$  (fig. A.2). Coordonata  $z$  reprezintă distanța de la  $P$  la planul  $xOy$  adică segmentul orientat  $\overline{P'P}$  ( $= \overline{OC}$ ), unde  $P'$  este proiecția lui  $P$  pe planul  $xOy$ . Coordonatele  $x, y$  ale lui  $P$  sînt chiar coordonatele punctului  $P'$  din planul  $xOy$  ( $x = \overline{OA}$ ,  $y = \overline{OB}$ ). Rezultă imediat, din teorema celor trei perpendiculare, că segmentele  $x = \overline{OA}$ ,  $y = \overline{OB}$  și  $z = \overline{OC}$  reprezintă proiecțiile dreptei  $\overline{OP}$  pe axele respective de coordonate.

În continuare vom reaminti ecuațiile principalelor curbe din plan.

Ecuația dreptei de coeficient unghiular  $m$  și care trece printr-un punct dat  $P_0(x_0, y_0)$  este

$$y - y_0 = m (x - x_0), \quad (\text{A.7})$$

iar ecuația dreptei de pantă  $m$  și ordonată la origine  $n$ :

$$y = mx + n.$$

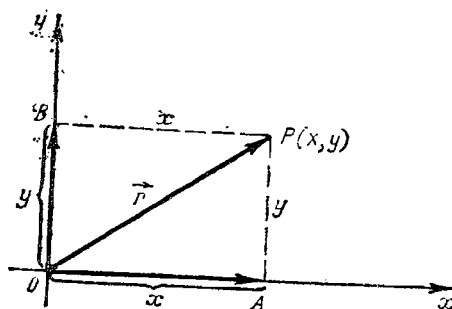


Fig. A.1

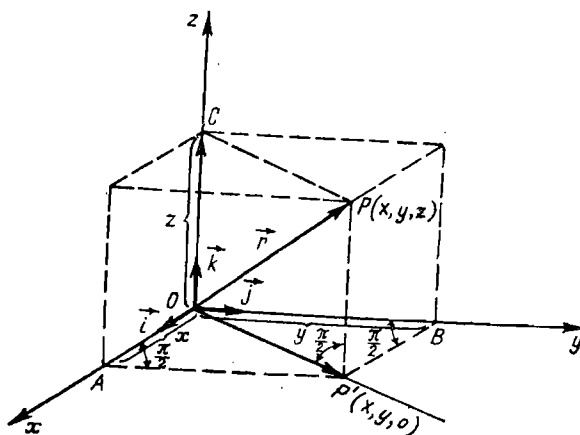


Fig. A.2

Ecuția cercului de rază  $R$  cu centrul în origine

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{A.8})$$

și cu centrul în punctul  $C(a, b)$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (\text{A.9})$$

Ecuțiile elipsei și hiperbolei ale căror axe de simetrie coincid cu axele de coordonate:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.10})$$

Ecuția parabolei avînd axa de simetrie paralelă cu  $Oy$  și de ecuație  $x = -\frac{b}{2a}$  este:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (\text{A.11})$$

coordonatele vîrfului parabolei fiind  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ . Dacă parabola trece prin origine atunci  $c = 0$ , iar dacă vîrful este în origine atunci și  $b = 0$ .

După cum în geometria analitică în plan orice relație între  $x$  și  $y$  reprezintă ecuația unei curbe în planul  $xOy$ , în geometria analitică în spațiu orice relație între  $x$ ,  $y$  și  $z$  reprezintă ecuația unei suprafețe în spațiu.

În continuare nu ne vom ocupa decît de deducerea ecuației sferei care după cum se știe reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix numit centrul sferei.

Fie  $P(x, y, z)$  un punct de pe sfera de rază  $R$  cu centrul în originea  $O$  a sistemului de coordonate. Conform definiției, trebuie să avem  $\overline{OP}^2 = R^2$ . Din

triunghiul dreptunghic  $OP'P$  avem  $\overline{OP^2} = \overline{OP'^2} + \overline{P'P^2}$ . Dar  $\overline{P'P^2} = z^2$  iar  $\overline{OP'^2} = \overline{OA^2} + \overline{AP'^2} = x^2 + y^2$ , deci

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (\text{A.12})$$

este relația dintre  $x$ ,  $y$  și  $z$ , care reprezintă ecuația sferei cu centrul în origine.

#### A.4. CALCUL VECTORIAL

În fizică, pe lângă mărimile caracterizate doar prin valoarea numerică (mărimi scalare), întâlnim și mărimi vectoriale sau vectori, care se caracterizează prin valoare numerică, direcție în spațiu și sensul pe această direcție. Vom nota vectorul printr-o literă cu o săgeată deasupra, de exemplu  $\vec{a}$  iar valoarea sa numerică sau modulul prin simbolul vectorului între două bare,  $|\vec{a}|$ , sau prin litera respectivă fără săgeată,  $a$ . Atragem atenția că în fizică modulul vectorului se măsoară în unități caracteristice mărimii fizice respective: în SI forța se măsoară în newtoni, viteza în metri pe secundă, etc.

Grafic, vectorul se reprezintă printr-un segment orientat, de lungime proporțională cu valoarea numerică a vectorului așezat pe dreapta care indică direcția în spațiu a vectorului respectiv și având sensul acestuia (fig. A.3). Punctele  $A$  și  $B$  se numesc originea (punctul de aplicație) și respectiv extremitatea vectorului. Folosind aceste puncte, vectorul se notează  $\vec{AB}$ . Dreapta care trece prin punctele  $A$  și  $B$  se numește suportul vectorului.

După tipul mărimilor vectoriale întâlnite în fizică, vectorii pot fi clasificați astfel:

- *Vectori legați* care au punctul de aplicație fixat; de exemplu forțele care acționează asupra unui corp deformabil (plastic sau elastic).

- *Vectori alunecători* care au suportul fixat dar al căror punct de aplicație poate fi deplasat în lungul suportului. Forțele care acționează asupra unui corp perfect rigid sînt astfel de vectori.

- *Vectori liberi* ale căror puncte de aplicație pot fi luate oriunde în spațiu, suportul lor rămînînd însă paralel cu aceeași dreaptă.

În nici unul din aceste cazuri, modulul, direcția și sensul vectorului nu se schimbă.

Doi *vectori liberi* se numesc *egali* dacă au același modul, aceeași direcție și același sens. Egalitatea a doi *vectori alunecători* necesită în plus ca punctele de aplicație să se găsească pe aceeași dreaptă (dreapta suport), pe cînd egalitatea a doi *vectori legați* implică și punct de aplicație comun.

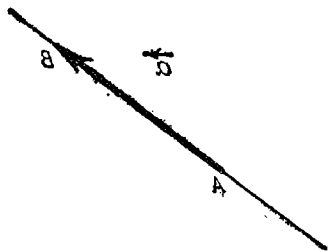


Fig. A.3

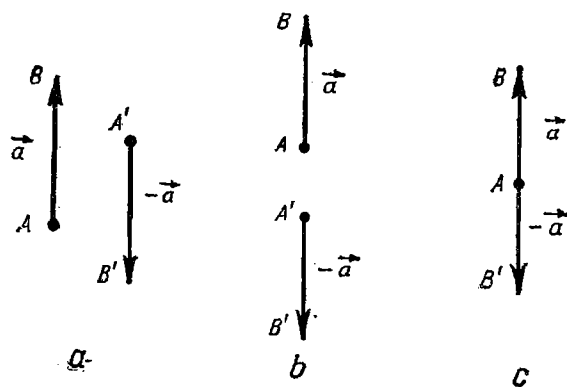


Fig. A.4

Pentru toate categoriile de vectori, numim *opusul unui vector*  $\vec{a}$ , un alt vector, notat  $-\vec{a}$ , care satisface toate condițiile de egalitate cu  $\vec{a}$  avînd însă sensul contrar. În fig. A.4 este reprezentat vectorul împreună cu opusul său  $-\vec{a}$  pentru vectori liberi (a), alunecători (b) și legați (c).

Numim *vector unitate* vectorul de modul unu, iar *vector nul* pe cel de modul zero. Un vector unitate  $|\vec{a}_0|$ , care are aceeași direcție și același sens cu un vector  $\vec{a}$ , se numește *versorul* lui  $\vec{a}$ .

**Operații cu vectori.** Prin definiție *suma* sau *rezultanta*  $\vec{c}$  a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este dată de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori ca laturi (fig. A.5a):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ sau } \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}. \quad (\text{A.13})$$

În fig. A.5b este ilustrată metoda triunghiului, echivalentă cu metoda precedentă.

Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată, din figură rezultă imediat modulul lui  $\vec{c}$ :

$$c = |\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}, \quad (\text{A.14})$$

unde  $\varphi$  este unghiul dintre direcțiile celor doi vectori care se sumează.

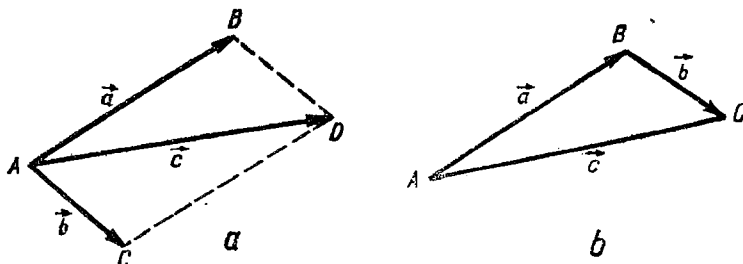


Fig. A.5

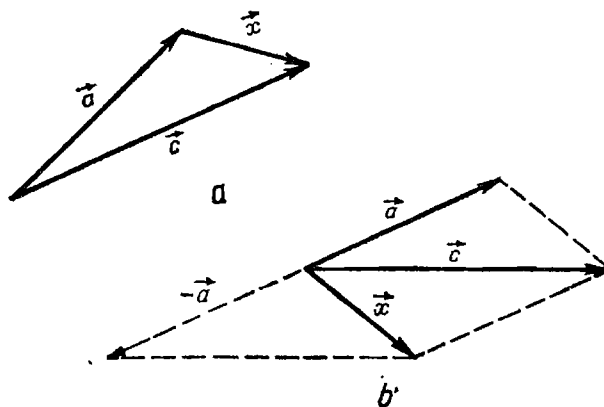


Fig. A.6

Suma dintre un vector  $\vec{a}$  și opusul său  $-\vec{a}$  este vectorul nul:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Adunarea mai multor vectori se efectuează aplicând succesiv regula paralelogramului pînă cînd se obține un singur vector rezultat care reprezintă suma sistemului de vectori.

Diferența dintre doi vectori  $\vec{c}$  și  $\vec{a}$  ( $\vec{c} - \vec{a}$ ) este un vector  $\vec{x}$  care adunat cu scăzătorului ( $\vec{a}$ ) dă vectorul descăzut  $\vec{c}$ , adică

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{x} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} + \vec{x}. \quad (\text{A.16})$$

Legătura dintre cele două relații de mai sus este ilustrată grafic în figurile A.6a și A.6b.

În mod echivalent, diferența ( $\vec{x}$ ) dintre vectorii  $\vec{c}$  și  $\vec{a}$  poate fi interpretată ca suma vectorului  $\vec{c}$  cu opusul lui  $\vec{a}$  (fig. (A.6b).

$$\vec{x} = \vec{c} + (-\vec{a}). \quad (\text{A.17})$$

Produsul dintre un vector  $\vec{a}$  și un scalar  $\lambda$  este prin definiție vectorul  $\lambda\vec{a}$  care are modulul  $|\lambda||\vec{a}|$ , aceeași direcție cu  $\vec{a}$  și este dirijat în același sens cu  $\vec{a}$  dacă  $\lambda > 0$  și în sens contrar dacă  $\lambda < 0$ . În cazul particular  $\lambda = -1$  se obține vectorul opus ( $-\vec{a}$ ). Pentru  $\lambda = 0$  sau  $\vec{a} = 0$  rezultă vectorul nul,  $\lambda\vec{a} = 0$ .

Din definiția versorului, a egalității a doi vectori, precum și a înmulțirii unui vector cu un scalar, rezultă egalitatea:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 = a\vec{a}_0, \quad (\text{A.18})$$

unde  $\vec{a}_0$  este versorul vectorului  $\vec{a}$ .

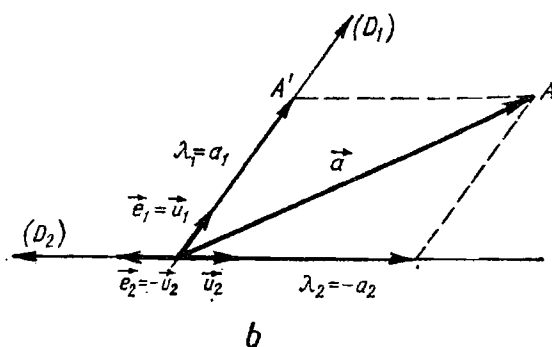
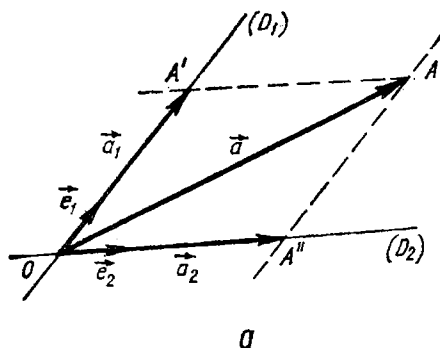


Fig. A.7

Descompunerea unui vector după două direcții oarecare. Fie două direcții neparalele  $(D_1)$  și  $(D_2)$  și un vector dat  $\vec{a} = \vec{OA}$  (fig. A.7a). Ducînd prin  $A$  paralelele la  $(D_1)$  și  $(D_2)$ , se formează paralelogramul  $AA'OO''$  din care rezultă  $\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{OA''}$  sau  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ . În acest mod se realizează descompunerea vectorului  $\vec{a}$  după direcțiile date. Deoarece printr-un punct nu se poate duce decît o singură paralelă la o direcție dată, înseamnă că paralelogramul  $AA'OA''$  este singurul paralelogram care se poate construi în situația dată. Din acest motiv, descompunerea unui vector după două direcții date este unică.

Notînd cu  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$  versorii vectorilor  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  și folosind (A.18), relația de descompunere se poate scrie

$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2. \quad (\text{A.19})$$

În general, o direcție  $(D)$  orientată este caracterizată de un vector unitate  $\vec{e}$  care are aceeași direcție și sens cu ea, numit versorul direcției  $(D)$ .

Dacă descompunerea vectorului  $\vec{a}$  o facem după două direcții orientate și dorim să rescriem relația (A.19) cu ajutorul versorilor  $\vec{e}_1$  și  $\vec{e}_2$  ai lui  $(D_1)$  și

( $D_2$ ), trebuie să avem în vedere că  $\vec{u}_1 = \pm \vec{e}_1$ ,  $\vec{u}_2 = \pm \vec{e}_2$  după cum ( $D_1$ ) și  $\vec{a}_1$ , respectiv ( $D_2$ ) și  $\vec{a}_2$  au sau nu același sens. În acest caz vom scrie:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2, \quad (\text{A.20})$$

unde  $\lambda_1 = \pm a_1$  iar  $\lambda_2 = \pm a_2$ .

În figura (A. 7b) este exemplificată situația în care sensul convențional al lui ( $D_1$ ) coincide cu al lui  $\vec{a}_1$  ( $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$ ) iar sensul lui ( $D_2$ ) este contrar lui  $\vec{a}_2$ . ( $\vec{u}_2 = -\vec{e}_2$ ). Mărimile  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  se numesc componentele vectorului  $\vec{a}$  după direcțiile orientate ( $D_1$ ) și respectiv ( $D_2$ ).

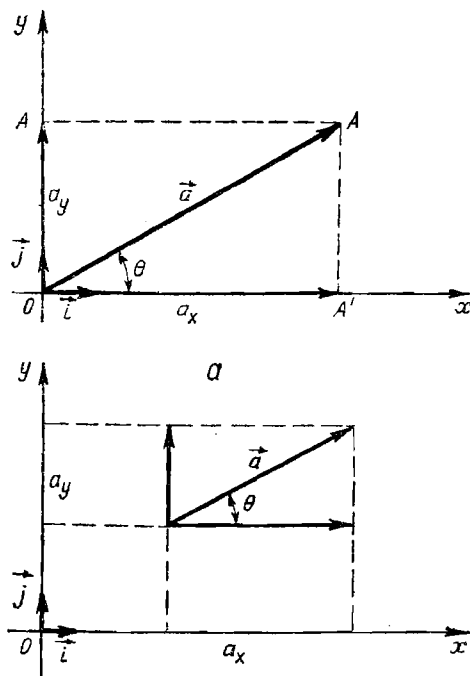
*Descompunerea unui vector după două axe perpendiculare.* Acesta reprezintă cazul particular în care direcțiile orientate ( $D_1$ ) și ( $D_2$ ) sînt ortogonale, fiind alese drept axe de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  (fig. A.8a). Versorii axelor  $Ox$  și respectiv  $Oy$  se notează cu  $\vec{i}$  și respectiv  $\vec{j}$ , iar componentele lui  $\vec{a}$  după cele două axe cu  $a_x$  și respectiv  $a_y$ . Relația (A.20) devine

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (\text{A.21})$$

sau

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \quad (\text{A.21a})$$

unde  $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$  și  $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ .



**b**  
Fig. A.8



Componenta  $a_x$  se mai numește și proiecția vectorului  $\vec{a}$  pe direcția  $Ox$  și din triunghiul  $AAA'$  rezultă că  $a_x = a \cos \theta$ . Analog rezultă că proiecția lui  $\vec{a}$  pe  $Oy$  este  $a_y = a \sin \theta$ .

Dacă punctul de aplicație a lui  $\vec{a}$  nu coincide cu originea  $O$  a sistemului de axe descompunerea se face după aceeași schemă, însă prin  $\theta$  înțelegem unghiul dintre vectorul  $\vec{a}$  și dreapta care trece prin punctul de aplicație al lui  $\vec{a}$  și este paralelă cu axa  $Ox$  avînd aceeași orientare cu aceasta (fig. A.8b).

Ținînd seama că unghiul  $\varphi$  dintre  $a_x$  și  $a_y$  este  $\pi/2$ , din relația (A.14) rezultă:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (\text{A.22})$$

Din această relație se observă că  $\vec{a} = 0$  implică  $a = 0$  și deci  $a_x = a_y = 0$ . Prin urmare vectorul nul este un vector care are componentele nule.

Relația (A.21) ne permite să scriem suma sau diferența  $\vec{c}$  a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  cu ajutorul componentelor lor. Într-adevăr avem  $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$ , adică

$$\vec{c} = c_x \vec{i} \pm c_y \vec{j} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j},$$

deci

$$c_x = a_x \pm b_x, c_y = a_y \pm b_y. \quad (\text{A.23})$$

Putem folosi cele discutate mai sus pentru a defini vectorial poziția unui punct  $P$  din plan (fig. A.1). Segmentul orientat  $\vec{OP}$  se numește vectorul de poziție al punctului  $P$  și se notează cu  $\vec{r}$ . Coordonatele  $x$  și  $y$  ale lui  $P$  reprezintă tocmai componentele vectorului  $\vec{r}$  după axele  $Ox$  și  $Oy$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (\text{A.24})$$

unde  $x = r \cos \theta$  și  $y = r \sin \theta$  reprezintă totodată proiecțiile vectorului  $\vec{r}$  pe cele două axe.

Dacă considerăm cazul mai general al unui punct oarecare din spațiu  $P(x, y, z)$  (fig. A.2), vectorul său de poziție  $\vec{r}$  va fi dat tot de segmentul orientat  $\vec{OP}$ . Pentru a obține componentele lui  $\vec{r}$  după cele 3 axe îl proiectăm întâi pe direcțiile ortogonale  $Oz$  și  $Ow$ , unde  $Ow$  reprezintă intersecția planului  $xOy$  cu planul format de  $Oz$  și  $(OP)$ :  $\vec{r} = \vec{OP}' + \vec{OC}$ . Notînd versorii axelor  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  cu  $\vec{i}, \vec{j}$  și respectiv  $\vec{k}$ , avem  $\vec{OC} = z\vec{k}$  iar vectorul  $\vec{OP}'$  din planul  $xOy$  se poate scrie  $\vec{OP}' = x\vec{i} + y\vec{j}$ , deci

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (\text{A.25})$$

Produsul scalar a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , notat  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , este un scalar egal prin definiție cu produsul dintre modulele lui  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și cosinusul unghiului dintre ei (fig. A.9):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta. \quad (\text{A.26})$$

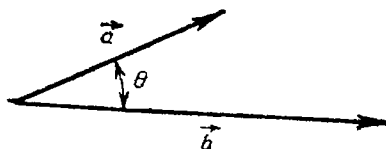


Fig. A.9

Din această relație rezultă  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$  dacă vectorii sînt coliniari și de același sens ( $\theta = 0$ ),  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  dacă vectorii sînt perpendiculari ( $\theta = \pi/2$ ) și  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$  dacă vectorii sînt coliniari dar au sensuri opuse ( $\theta = \pi$ ).

Dacă în (A.26) îl considerăm pe  $\vec{b}$  drept versor  $\vec{e}$  al direcției orientate ( $D$ ), rezultă  $\vec{a} \cdot \vec{e} = a \cdot 1 \cdot \cos \theta = a \cos \theta$ , care este tocmai proiecția lui  $\vec{a}$  pe direcția ( $D$ ).

Din definiția produsului scalar rezultă că este comutativ, adică  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ; de asemenea produsul scalar este distributiv față de adunare:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (\text{A.27})$$

Produsul vectorial al vectorului  $\vec{a}$  cu vectorul  $\vec{b}$ , notat  $\vec{a} \times \vec{b}$ , este, prin definiție, un vector de modul  $ab \sin \theta$ , perpendicular pe planul format de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ; sensul lui este cel de înaintare al unui burghiu rotit în același sens în care trebuie rotit vectorul  $\vec{a}$  pentru a-l suprapune peste vectorul  $\vec{b}$  printr-o rotație de unghi minim, adică  $\theta < \pi$  (fig. A.10).

Notînd vectorul produs vectorial cu  $\vec{c}$ , avem

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{A.28 a})$$

și

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta. \quad (\text{A.28 b})$$

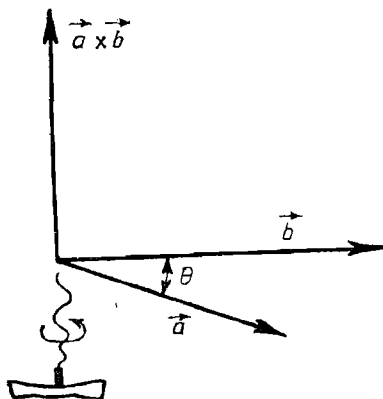


Fig. A.10

Din (A.28b) rezultă că produsul vectorial este nul dacă vectorii sînt coliniari ( $\theta = 0$ ) sau sînt coliniari și au sensuri opuse ( $\theta = \pi$ ), iar în cazul în care sînt perpendiculare ( $\theta = \pi/2$ ),  $c = ab$ .

Dacă vectorii apar în ordinea  $\vec{b} \times \vec{a}$ , modulul și direcția produsului vectorial sînt aceleași cu ale lui  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , însă are sens contrar lui  $\vec{c}$ , deoarece vectorul  $\vec{b}$  este suprapus peste vectorul  $\vec{a}$  printr-o rotație în sens invers față de cazul precedent, deci

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (\text{A.29})$$

Și produsul vectorial este distributiv față de adunare:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \quad (\text{A.30})$$

*Analiză vectorială.* Să considerăm cazul în care vectorul  $\vec{a}$  este o funcție vectorială de o variabilă scalară  $t$ , de exemplu de timp, adică  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ . Altfel spus atît modulul cît și direcția lui  $\vec{a}$  depind de  $t$  (adică variază în timp):

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0(t). \quad (\text{A.31})$$

Ținînd seama că un vector poate fi întotdeauna descompus după axele de coordonate ai căror versori sînt ficși, rezultă că într-o asemenea descompunere doar componentele vectorului depind de timp:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}. \quad (\text{A.32})$$

Prin definiție derivata vectorului  $\vec{a}$  după variabila  $t$  este funcția vectorială  $\frac{d\vec{a}}{dt}$  adică:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.33})$$

Se poate demonstra că regulile de derivare ale funcțiilor vectoriale sînt întru totul analoge regulilor de derivare ale funcțiilor scalare:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}, \quad (\text{A.34 a})$$

$$\frac{d}{dt} (f(t)\vec{a}(t)) = \frac{df}{dt} \vec{a}(t) + f(t) \frac{d\vec{a}}{dt}. \quad (\text{A.34 b})$$

Din relațiile (A.31) și (A.34 b), respectiv (A.32) și (A.34a, b) rezultă:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \vec{a}_0(t) + a(t) \frac{d\vec{a}_0}{dt}, \quad (\text{A.35 a})$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}. \quad (\text{A.35 b})$$

Dacă vectorul  $\vec{a}$  variază doar în modul atunci  $\frac{d\vec{a}_0}{dt} = 0$  iar dacă  $\vec{a}$  variază doar ca direcție  $\frac{da}{dt} = 0$  și din (A.35a) obținem  $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \vec{a}_0$  în primul caz și respectiv  $\frac{d\vec{a}}{dt} = a \frac{d\vec{a}_0}{dt}$  în cel de al doilea.

Regulile de derivare pentru produsul scalar și produsul vectorial sînt asemănătoare cu cele pentru produsul a două funcții scalare, adică

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{A.36})$$

și

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \quad (\text{A.37})$$

Atragem atenția că în cazul derivării produsului vectorial A.(37) ordinea în care apar factorii în membrul stîng trebuie menținută și în membrul drept. Datorită comutativității produsului scalar în membrul drept al relației (A.36) nu contează ordinea factorilor.

## A.5. ELEMENTE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

a) **Ecuații diferențiale de ordinul I.** O ecuație diferențială de ordinul I este o relație între funcția căutată  $y(t)$ , variabila independentă  $t$  și derivata întii  $y' = \frac{dy}{dt}$  a funcției căutate:

$$y' + F(t, y) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{dt} + F(t, y) = 0, \quad (\text{A.38})$$

unde  $F(t, y)$  este o funcție continuă dată de  $t$  și  $y$ . Se numește soluție a ecuației diferențiale (A.38) orice funcție  $y = f(t)$  care fiind introdusă în (A.38) o transformă în identitate.

Dacă  $F(t, y) = p(t) q(y)$ , ecuația (A.38) devine

$$\frac{dy}{dt} + p(t) q(y) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{q(y)} = -p(t) dt \quad (\text{A.39})$$

și se numește ecuație cu variabile separate.

Să presupunem că  $y = f(t)$  este o soluție a ecuației (A.39). Avînd în vedere că  $dy = y' dt = f'(t) dt$ , din ecuația (A.39) obținem

$$\frac{f'(t)}{q[f(t)]} = -p(t).$$

Membrul drept reprezintă derivata funcției

$$-\int p(t) \, dt,$$

iar membrul stâng derivata funcției

$$\int \frac{f'(t)}{q[f(t)]} dt = \int \frac{dy}{q(y)},$$

unde ultima egalitate se obține prin schimbarea de variabilă sub semnul de integrare  $y = f(t)$ . Știm că funcțiile ale căror derivate sînt egale, diferă între ele cel mult printr-o constantă aditivă  $C$ . Aceasta ne permite să scriem egalitatea

$$\int \frac{dy}{q(y)} = -\int p(t) \, dt + C. \quad (\text{A.40})$$

Un caz particular important este cazul  $q(y) = 1$  cînd ecuația (A.39) devine  $y' - p(t) = 0$  iar din (A.40) se obține:

$$y = \int dy = -\int p(t) \, dt + C. \quad (\text{A.41})$$

Presupunînd că am găsit primitiva  $P(t) = \int p(t) \, dt$ , constanta aditivă  $C$  se determină dacă pentru o anumită valoare a lui  $t = t_0$  este cunoscută valoarea lui  $y = y_0$ :  $C = y_0 + P(t_0)$ .

Dacă  $q(y) = y$  ecuația (A.39) devine

$$y' + p(t)y = 0 \text{ sau } \frac{dy}{y} = -p(t) \, dt \quad (\text{A.39 a})$$

și se numește ecuație liniară omogenă de ordinul I. Relația (A.40) ne dă

$$\ln |y| = -\int p(t) \, dt + C = -\int p(t) \, dt + \ln |K|,$$

unde în locul constantei  $C$  am introdus constanta  $K$  definită prin relația  $C = \ln |K|$ . Obținem

$$\ln \left| \frac{y}{K} \right| = -\int p(t) \, dt \text{ sau } \left| \frac{y}{K} \right| = e^{-\int p(t) \, dt}$$

și cum exponențiala este pozitivă,  $y$  are semnul lui  $K$ , deci

$$y = K e^{-\int p(t) \, dt} \quad (\text{A.42})$$

În cazul în care în ecuația (A.39a)  $p(t) = \lambda$  ( $= \text{const}$ ), obținem ecuația liniară omogenă de ordinul I cu coeficienți constanți

$$y' + \lambda y = 0 \text{ sau } \frac{dy}{dt} = -\lambda y \quad (\text{A.39b})$$

a cărei soluție se obține din (A.42) punând  $p(t) = \lambda$ :

$$y = K e^{-\int \lambda dt} = K e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.43a})$$

Și în această situație constanta  $K$  se determină considerând că pentru  $t = t_0$  știm că  $y = y_0$ :  $K = y_0 e^{+\lambda t_0}$ , deci (A.43) devine

$$y = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (\text{A.43 b})$$

**b) Ecuații diferențiale de gradul II cu coeficienți constanți.** Prin ecuație diferențială de ordinul II se înțelege o relație între funcția  $y(t)$  ce trebuie determinată, variabila independentă  $t$  și derivatele de ordinul întâi și doi ale funcției căutate.

Aceasta înseamnă o relație de tipul:

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = F(t), \quad (\text{A.44})$$

unde  $y$  este funcția de determinat, coeficienții  $b$  și  $c$  sînt în general și ei funcții de variabila independentă  $t$ , iar  $F(t)$  este o funcție cunoscută. Nu vom considera în cele ce urmează o asemenea situație complicată, ci vom presupune că  $b$  și  $c$  sînt numere reale, constante. Atunci ecuația (A.44) se zice că este de ordinul II cu coeficienți constanți. Dacă  $F(t) = 0$  ecuația se numește *omogenă*, iar dacă  $F(t) \neq 0$  se numește *neomogenă*.

**Rezolvarea ecuației omogene.** Ne vom ocupa mai întâi de rezolvarea ecuației omogene.

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

adică de găsirea funcției  $y = f(t)$  care să o satisfacă pentru orice valoare a lui  $t$ .

În cele ce urmează, vom introduce, pentru simplificarea scrierii relațiilor în locul constantei  $b$  o altă constantă  $b' = b/2$ . Ultima ecuație devine

$$y''(t) + 2b'y'(t) + cy(t) = 0. \quad (\text{A.45})$$

Se cunoaște din calculul diferențial o funcție care pînă la factori constanți, coincide cu derivatele ei. Această funcție este  $e^{\alpha t}$ , unde  $\alpha$  este o constantă arbitrară. Vom încerca să satisfacem ecuația noastră luînd  $f(t) = e^{\alpha t}$  și să determinăm pe  $\alpha$  așa încît ecuația (A.45) să se transforme într-o identitate, adică să fie satisfăcută pentru orice valoare a lui  $t$ . Avem

$$\frac{df}{dt} = f' = \alpha e^{\alpha t} \quad \text{și} \quad \frac{d^2f}{dt^2} = f'' = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Întroducînd în ecuația (A.45), se obține ecuația

$$(\alpha^2 + 2b'\alpha + c)e^{\alpha t} = 0,$$

care este satisfăcută pentru orice  $t$  dacă

$$\alpha^2 + 2b'\alpha + c = 0, \quad (\text{A.46})$$

adică dacă  $\alpha$  este o rădăcină a ecuației (A.46) numită și ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (A.45). Vom considera pe rînd cele trei cazuri posibile pentru discriminantul ecuației caracteristice.

a)  $\Delta = 4(b'^2 - c) > 0$ . Ecuația caracteristică are două rădăcini reale și distincte

$$\alpha_1 = -b' + \sqrt{b'^2 - c} \text{ și } \alpha_2 = -b' - \sqrt{b'^2 - c}.$$

Fiecărei rădăcini îi corespunde o soluție particulară a ecuației diferențiale,

$$f_1 = e^{\alpha_1 t}, f_2 = e^{\alpha_2 t}. \quad (\text{A.47})$$

Se observă că  $a_1 f_1$  respectiv  $a_2 f_2$ , unde  $a_1$  și  $a_2$  sînt constante, reprezintă de asemenea soluții particulare ale ecuației (A.45).

Deoarece între soluțiile  $f_1$  și  $f_2$  nu poate avea loc o egalitate de forma  $f_1 = \text{const} \cdot f_2$  care să fie valabilă pentru orice valoare a lui  $t$  ( $f_1 \neq \text{const} \cdot f_2$ ), spunem că soluțiile  $f_1$  și  $f_2$  sînt distincte, iar soluția generală a ecuației (A.45) este combinația cu coeficienți constanți

$$y = f(t) = a_1 f_1 + a_2 f_2 = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (\text{A.48})$$

Ne putem convinge imediat că aceasta este tot o soluție a ecuației diferențiale (A.45).

b)  $\Delta = 4(b'^2 - c) = 0$ . Ecuația caracteristică are o rădăcină multiplă de ordinul II

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -b' \quad (\text{A.49})$$

căreia îi corespunde soluția  $f_1 = e^{\alpha_1 t}$ .

Se observă că  $f_2 = t e^{\alpha_1 t}$ , este o soluție particulară a ecuației (A.45). Într-adevăr calculînd  $df_2/dt$  și  $d^2 f_2/dt^2$ :

$$\frac{df_2}{dt} = e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 t e^{\alpha_1 t}, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 2\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_1^2 t e^{\alpha_1 t}$$

și introducînd în ecuația (A.45) avem

$$[t(\alpha_1^2 + 2b'\alpha_1 + c) + 2\alpha_1 + 2b'] e^{\alpha_1 t} = 0.$$

Ecuația ultimă este într-adevăr satisfăcută pentru orice  $t$  pentru că  $\alpha_1$  este rădăcina ecuației caracteristice, deci coeficientul lui  $t$  este nul iar  $2\alpha_1 + 2b' = 0$  conform relației (A.49).

Soluția generală va fi:

$$y = f(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 t e^{\alpha_1 t} = (a_1 + a_2 t) e^{-b' t}. \quad (\text{A.50})$$

c)  $\Delta = 4(b'^2 - c) < 0$  (deci  $c > 0$ ). Rădăcinile ecuației caracteristice sînt complex conjugate:

$$\alpha_1 = -b' + i\sqrt{c - b'^2} \text{ și } \alpha_2 = -b' - i\sqrt{c - b'^2}. \quad (\text{A.51a})$$

Să ne ocupăm mai întîi de cazul mai simplu cînd rădăcinile sînt pur imaginare, adică partea reală este nulă, aceasta înseamnă  $b = 0$  și deci

$$\alpha_1 = i\sqrt{c}; \quad \alpha_2 = -i\sqrt{c} \quad (\text{A.51b})$$

iar ecuația diferențială devine

$$f'' + cf = 0 \text{ cu } c > 0. \quad (\text{A.52})$$

Se pot scrie soluțiile (A.47) cu  $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\sqrt{c}$ , deci cu ajutorul unor funcții care depind de variabile complexe, soluția generală fiind de forma  $f(t) = a_1 e^{i\sqrt{c}t} + a_2 e^{-i\sqrt{c}t}$ . Se poate arăta că pînă la urmă soluția generală se exprimă prin funcții reale de variabilă reală. Deoarece această demonstrație depășește nivelul cărții, vom determina soluțiile particulare fără a folosi exponențiale complexe.

Vom raționa în același mod ca la rezolvarea ecuației (A.45): căutăm funcțiile elementare de variabilă reală care să transforme ecuația (A.52) într-o identitate. Avem în vedere că derivatele de ordinul doi al funcțiilor trigonometrice  $\sin \alpha t$  și  $\cos \alpha t$  coincid pînă la factori constanți chiar cu aceste funcții. Căutăm atunci o soluție particulară de forma  $f_1 = \sin \alpha_1 t$ .

Introducînd în ecuația (A.52) obținem ecuația

$$(-\alpha_1^2 + c) \sin \alpha_1 t = 0,$$

care este satisfăcută pentru orice  $t$  dacă  $\alpha_1 = \pm \sqrt{c}$  ( $c > 0$ ). Prin același procedeu se poate arăta că și  $f_2 = \cos \alpha_2 t$  este o soluție particulară a ecuației (A.52) dacă  $\alpha_2 = \pm \sqrt{c}$ .

Soluția generală va fi

$$y = f(t) = a_1 \sin \alpha_1 t + a_2 \cos \alpha_2 t. \quad (\text{A.53})$$

În relația (A.53) este suficient să luăm  $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{c}$ . Într-adevăr deoarece  $\sin(-\sqrt{c}t) = -\sin(\sqrt{c}t)$  și  $\cos(-\sqrt{c}t) = \cos(\sqrt{c}t)$ , considerarea valorilor  $\alpha_1 = -\sqrt{c}$  și  $\alpha_2 = -\sqrt{c}$  nu ne conduce la soluții distincte.

Soluția generală va fi deci

$$y = f(t) = a_1 \sin(\sqrt{c}t) + a_2 \cos(\sqrt{c}t), \quad (\text{A.54})$$

adică în locul exponențialelor complexe am reușit să facem să apară funcțiile de variabilă reală  $\sin \sqrt{c}t$  și  $\cos \sqrt{c}t$ , unde  $\sqrt{c}$  este factorul care înmulțește pe  $\pm it$  în exponențiala complexă.

Luînd constantele arbitrare  $a_1$  și  $a_2$  de forma

$$a_1 = A \cos \varphi, \quad a_2 = A \sin \varphi, \quad (\text{A.55})$$

adică introducînd alte 2 constante arbitrare  $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  și  $\text{tg } \varphi = a_2/a_1$  ( $\varphi = \arctg a_2/a_1$ ), obținem

$$y = f(t) = A (\sin(\sqrt{c}t) \cos \varphi + \cos(\sqrt{c}t) \sin \varphi) = A \sin(\sqrt{c}t + \varphi), \quad (\text{A.56})$$

unde  $\sqrt{c}$  este de fapt partea imaginară a rădăcinilor (A.51b) ale ecuației caracteristice.

În concluzie, pentru  $c > 0$ , ecuația (A.52) are soluția generală (A.56) care este periodică cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$ .



Dacă coeficientul  $b'$  este diferit de zero, rădăcinile caracteristice sînt complex conjugate. Soluția generală este de forma

$$f(t) = a_1 e^{(-b' + i\sqrt{c-b'^2})t} + a_2 e^{(-b' - i\sqrt{c-b'^2})t}$$

sau

$$f(t) = e^{-b't} (a_1' e^{i\sqrt{c-b'^2}t} + a_2' e^{-i\sqrt{c-b'^2}t}).$$

Pentru a obține soluția generală a ecuației (A.45) fără să utilizăm exponențialele complexe, avem în vedere observația făcută după ecuația (A.54), care ne-a permis să înlocuim expresia  $a_1' e^{i\sqrt{c-b'^2}t} + a_2' e^{-i\sqrt{c-b'^2}t}$  prin expresia (A.54), precum, și faptul că în acest caz rolul lui  $\sqrt{c}$  este jucat de  $\sqrt{c-b'^2}$  adică,

$$y = f(t) = e^{-b't} (a_1 \sin \sqrt{c-b'^2}t + a_2 \cos \sqrt{c-b'^2}t).$$

Înlocuind  $a_1$  și  $a_2$  prin expresiile (A.55) putem scrie

$$y = f(t) = A e^{-b't} \sin (\sqrt{c-b'^2}t + \varphi) \quad (\text{A.57})$$

Propunem cititorului să verifice direct, prin derivare și înlocuire în ecuația (A.45), faptul că expresia (A.57) este într-adevăr soluția ecuației diferențiale.

*Rezolvarea ecuației neomogene.* Se poate demonstra că soluția generală  $f(t)$  a ecuației neomogene (A.44) este dată de suma dintre soluția generală  $y_{\text{omog}}(t)$  a ecuației omogene (A.45) și o soluție particulară  $y_{\text{part}}(t)$  a ecuației neomogene (A.44):

$$y = f(t) = y_{\text{omog}}(t) + y_{\text{part}}(t). \quad (\text{A.58})$$

Din cele spuse mai înainte știm să găsim soluția  $y_{\text{omog}}$  a ecuației omogene iar soluția  $y_{\text{part}}$  se obține pentru fiecare problemă concretă dată fiind funcția  $F(t)$  care apare în membrul drept al ecuației omogene.

Se observă cu ușurință că dacă  $b' > 0$ , factorul exponențial care apare în ecuația (A.57) tinde la zero cînd  $t \rightarrow \infty$ . În acest caz, pentru valori mari ale variabilei  $t$ , soluția generală a ecuației omogene poate fi neglijată în relația (A.58), care se va scrie acum

$$y = f(t) = y_{\text{part}}(t). \quad (\text{A.59})$$

REDACTOR : DINU-IOANIȚIU NECHITA  
TEHNOREDACTOR : MIRCEA NASTA  
COLI DE TIPAR : 55.00  
INDICI PENTRU CLASIFICAREA ZECIMALA :  
BIBLIOTECI MARI : 53 BIBLIOTECI MICI : 53.

---

TIPARUL EXECUTAT SUB COMANDA NR. 20 135  
LA COMBINATUL POLIGRAFIC „CASA ȘCINTEII“,  
PIAȚA ȘCINTEII NR. 1, BUCUREȘTI  
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

